

539.1
B.85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

— • —
МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике
2 сессия ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА
(конспекты лекций)

Л. А. КОНДРАТЮК

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ
ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
МЯГКИХ ГАММА-КВАНТОВ
НУКЛОНАМИ И ЯДРАМИ

МОСКВА — 1971

-I-

Кондратюк Л. А.

Низкоэнергетические теоремы . . .

СОДЕРЖАНИЕ

I. Низкоэнергетические теоремы

- § 1. Введение
- § 2. Рассеяние мягких γ -квантов на нуклонах
- § 3. Теорема Лоу для тормозного излучения
- § 4. Характерные особенности зарядового и магнитно-тормозного излучения
- § 5. Дальнейшие обобщения низкоэнергетической теоремы для тормозного излучения

II. Тормозное излучение в прямых ядерных реакциях

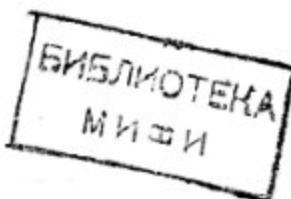
- § 1. Амплитуды радиационных распадов для мягких γ -квантов в нерелятивистском случае
- § 2. Спектр тормозного излучения в случае полюсного механизма прямой ядерной реакции

- § 3. Спектр тормозного излучения при треугольном механизме

III. Радиационные поправки к β^- -распаду

- § 1. Проблема расходимостей
- § 2. Общие свойства радиационных поправок, не зависящие от модели
- § 3. Спектр электронов
- § 4. Численные оценки радиационных поправок и неопределенности

562261



I. Низкоэнергетические теоремы.

§ I. Введение.

Количественное рассмотрение электромагнитных процессов с участием сильно взаимодействующих частиц, как правило, сталкивается с теми же трудностями, что и теория сильных взаимодействий. Однако существует целый класс радиационных процессов, которые допускают точное количественное описание. Это такие процессы, в которых с сильно взаимодействующими частицами и системами частиц взаимодействуют мягкие γ -кванты, то есть γ -кванты, обладающие малой энергией. Описание реакций с мягкими γ -квантами основывается на существовании так называемых низкоэнергетических, или предельных, теорем. Суть этих теорем состоит в том, что если амплитуду радиационного процесса разложить в ряд по энергии γ -кванта, то оказывается, что несколько первых членов разложения (обычно два) выражаются через соответствующую амплитуду, описывавшую тот же процесс, но без излучения γ -кванта, и через статические электромагнитные характеристики частиц. Поэтому, если мы измерим амплитуду какого-либо сильного процесса экспериментально, то например, тормозное излучение мягких γ -квантов в таком процессе мы уже можем вычислить с большой точностью. Следствия из низкоэнергетических теорем являются точными в пределе нулевой энергии γ -кванта.

Сам факт существования предельных теорем основывается на калибровочной инвариантности электромагнитных взаимодействий и законе сохранения электромагнитного тока. Значение низкоэнергетических теорем состоит в том, что они дают независимый

способ определения фундаментальных констант, таких, например, как заряд, магнитный момент, квадрупольный момент, электромагнитный радиус и т.д.

Исторически впервые низкоэнергетические теоремы были доказаны для комптоновского рассеяния γ -кванта на нуклоне. Это доказательство выполнили Лоу¹ и почти одновременно и независимо от него Гелл-Мани и Гольдбергер².

§ 2. Рассеяние мягких γ -квантов на нуклонах.

Рассмотрим рассеяние мягкого γ -кванта на протоне (см. рис. I). Через K и E обозначим 4-импульс и 4-вектор поляризации падающего γ -кванта, а через K' и E' - рассеянного. Через P и P' будем обозначать 4-импульс протона соответственно до и после рассеяния. Будем использовать систему п.и., в которой $K = (\omega, \vec{k})$, $K' = (\omega, \vec{k}')$, $P = (\sqrt{m^2 + k^2}, -\vec{k})$, $P' = (\sqrt{m^2 + k'^2}, -\vec{k}')$ и такую калибровку электромагнитных потенциалов, в которой нет скалярных фотонов, то есть $E = (0, \vec{E})$. В этом случае условие поперечности фотонов записывается в виде $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{k}' \cdot \vec{E}' = 0$.

В полной амплитуде $A_{S'S}(\omega, \vartheta; \vec{E}, \vec{E}')$, где ϑ - угол рассеяния, а S и S' спиновые индексы протонов, выделим часть $A^{(1)}$, соответствующую вкладу полюсных графиков а/ и б/ рис. I:

$$A_{S'S}(\omega, \vartheta; \vec{E}, \vec{E}') = A_{S'S}^{(1)}(\omega, \vartheta, \vec{E}, \vec{E}') + A_{S'S}^{(2)}(\omega, \vartheta, \vec{E}, \vec{E}')(I)$$

и прежде всего выясним, как ведут себя $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ при $\omega \rightarrow 0$.

Полюсную часть $A^{(1)}$ можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned}
 A_{\xi' S}(\omega, \theta; \vec{E}; \vec{E}') &= E_\mu E'_\nu \bar{U}_{S'}(p') \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{2\rho k} (e \gamma_\nu + \frac{\mu_p'}{2m} \sigma_{\nu p} K_p') (\vec{p} + \vec{k}' + m) (e \gamma_\mu + \frac{\mu_p'}{2m} \sigma_{\mu \sigma} K_\sigma) - \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2\rho k} (e \gamma_\mu + \frac{\mu_p'}{2m} \sigma_{\mu \sigma} K_\sigma) (\vec{p} - \vec{k}' + m) (e \gamma_\nu + \frac{\mu_p'}{2m} \sigma_{\nu p} K_p') \right\} U_S(p)
 \end{aligned} \tag{2}$$

где e - заряд, а μ_p' - аномальный магнитный момент протона. На первый взгляд кажется, что $A^{(1)}$ имеет полюс при $\omega \rightarrow 0$. Однако нетрудно убедиться, что числители при выражениях $\frac{1}{2\rho k}$ и $\frac{1}{2\rho k'}$ также обращаются в нуль при $\omega \rightarrow 0$. Например, выражение

$$E_\mu E_\nu \bar{U}(p') \gamma_\nu (\vec{p} + m) \gamma_\mu U(p) = E_\mu E_\nu \bar{U}(p') \gamma_\nu 2\rho \gamma_\mu U(p)$$

обращается в нуль, т.к. $p \cdot e = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$. Таким образом, полюсную амплитуду можно символически представить в виде ряда

$$A^{(1)} = C_1 + C_2 \omega + C_3 \omega^2 + \dots \tag{3}$$

Перейдем к анализу неполюсной части. В силу градиентной инвариантности амплитуды $A^{(2)}$ должна содержать тензор электромагнитного поля для каждого фотона, то есть должна быть пропорциональна $F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}'$ где $F_{\alpha\beta} = K_\alpha E_\beta - K_\beta E_\alpha$, $F_{\gamma\delta}' = K'_\gamma E_\delta - K'_\delta E_\gamma$. С другой стороны полюсов по ω она не имеет. Следовательно, при $\omega \rightarrow 0$

$$A^{(2)} = C_4 \omega^2 + \dots \tag{4}$$

То есть, члены соответствующие излучению "изнутри" квадратичны по ω при малых ω .

Учитывая разложения (3) и (4), получаем

$$A = C_1 + C_2 \omega + (C_3 + C_4) \omega^2 + \dots \tag{5}$$

Константы c_1 и c_2 определяются полюсными диаграммами и зависят от заряда, магнитного момента и массы протона. Таким образом, два первых члена разложения по ω амплитуды Комптоновского рассеяния вычисляются точно, если известны масса, заряд и магнитный момент и не зависят от внутренней структуры частицы.

Переходя к двухкомпонентным спинорам получаем следующее выражение для амплитуды A в пределе мягких γ -квантов

$$A_{S'S}(\omega; \theta, \vec{\epsilon}, \vec{\epsilon}') = \varphi_S^* \left\{ \frac{e^2}{m} \vec{\epsilon} \vec{\epsilon}' - i \frac{e}{m} \omega (\vec{\sigma}[\vec{\epsilon}; \vec{\epsilon}']) \left(2\mu - \frac{e}{2m} \right) - 2i \frac{\mu^2}{\omega} (\vec{\sigma}[[\vec{\epsilon} \cdot \vec{\kappa}] \cdot [\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\kappa}']]) - \frac{ie\mu}{m\omega} (\vec{\epsilon} \cdot \vec{\kappa}') \cdot (\vec{\epsilon}' \cdot [\vec{\sigma} \vec{\kappa}']) + \vec{\epsilon}' \cdot \vec{\kappa} (\vec{\epsilon} \cdot [\vec{\sigma} \vec{\kappa}']) \frac{ie\mu}{m\omega} \right\} \varphi_S + O(\omega^2)$$

где μ — полный магнитный момент, $\mu = \frac{e}{2m} + \mu_p'$.

Старший член разложения A определяется вкладом заряда, а магнитный момент дает вклад во второй член разложения. В случае эффекта Комптона на нейтроне заряд равен нулю, и поэтому разложение амплитуды начинается с линейных по ω членов

$$A_{S'S}^{(n)}(\omega, \theta, \vec{\epsilon}, \vec{\epsilon}') = \varphi_S^* \left\{ -2i \frac{\mu_n^2}{\omega} (\vec{\sigma} \cdot [[\vec{\epsilon} \cdot \vec{\kappa}] \cdot [\vec{\epsilon}' \cdot \vec{\kappa}']]) \right\} \varphi_S + O(\omega^2)$$

Пайс³ рассмотрел рассеяние мягких γ -квантов на частицах с произвольным спином S и показал, что в случае $S_o \geq 1$ можно сделать некоторые утверждения относительно членов пропорциональных ω , а также членов более высокого порядка по ω . Сущность этих утверждений Пайса состоит в том, что вклад мультипольных моментов частицы (квадрупольного, магнитного октупольного и т.д.), от которых зависит полюсная диаграмма, может быть выделен на фоне неизвестных структурных членов. Возможность этого выделения основывается на различии угловой и спиновой структуры фоновых и мультипольных

вкладов.

Рассеяние мягких γ -квантов на нуклонах и бессpinовых частицах рассматривалось также в работах Сингха⁴ и Шехтера⁵. В этих работах, в частности, было показано, что знание амплитуды комптоновского рассеяния при малых θ может быть с успехом использовано для вычислений различных интегральных величин с помощью правил сумм.

§ 3. Теорема Лоу для тормозного излучения.

Для случая тормозного излучения в процессах рассеяния частиц низкоэнергетическая теорема была доказана в работе Лоу⁶. Лоу доказал эту теорему для двух случаев: для рассеяния двух бессpinовых частиц и для рассеяния частицы со спином нуль на частице со спином $1/2$. Однако из самого процесса доказательства видно, что теорема применима к любому радиационному процессу.

В случае тормозного излучения при рассеянии двух частиц низкоэнергетическую теорему можно сформулировать следующим образом:

Два первых члена разложения амплитуды рассеяния с излучением фотона по степеням ω полностью определяются амплитудой рассеяния без излучения и ее первыми производными по энергии и переданному импульсу, а также зарядами и магнитными моментами частиц.

Докажем эту теорему на примере рассеяния частицы со спином $1/2$ на частице со спином 0 (πN -рассеяние, $N\alpha$ - рассеяние и т.д.). Обозначим через q_1 и q_2 начальный и конечный 4-импульсы частицы со спином 0, а через p_1 и p_2 - начальный и конечный 4-импульсы частицы со спином $1/2$; через

κ и ϵ , как обычно, будем обозначать 4-импульс и 4-вектор поляризации γ^* -кванта. Амплитуда упругого рассеяния зависит от энергии, переданного импульса и масс частиц и в рассматриваемом случае ее можно записать в таком виде

$$\bar{U}_{(p_2)} T U_{(p_1)} = \bar{U}_{(p_2)} (A + B \hat{q}_\nu) U_{(p_1)} = \\ \equiv \bar{U}_2 [A(s, t, p_1^2, p_2^2, q_1^2, q_2^2) + \hat{q}_\nu B(s, t, p_1^2, p_2^2, q_1^2, q_2^2)] u_1, \quad (8)$$

где $S = (p_1 + q_1)^2$; $t = (q_2 - q_1)^2$; $\hat{q}_\nu = \frac{1}{2} (\hat{q}_2 + \hat{q}_1)$

Запишем теперь амплитуду тормозного излучения, соответствующую полюсным диаграммам I/-4/ рис.2

$$M_\mu^{(1)} = Z e \frac{q_1 \mu}{q_2 \kappa} \bar{U}_2 \left\{ A(S - 2(p_1 + q_1)\kappa, t + 2(q_2 - q_1)\kappa, p_1^2, p_2^2, q_1^2 - 2q_1\kappa, q_2^2) + \frac{\hat{q}_2 + \hat{q}_1 - \hat{k}}{2} B(S - 2(p_1 + q_1)\kappa, t + 2(q_2 - q_1)\kappa, p_1^2, p_2^2, q_1^2 - 2q_1\kappa, q_2^2) \right\} u_1, \quad (9)$$

$$M_\mu^{(2)} = -Z e \frac{q_2 \mu}{q_2 \kappa} \bar{U}_2 \left\{ A(S, t + 2(q_2 - q_1)\kappa, p_1^2, p_2^2, q_1^2, q_2^2 + 2q_2\kappa) + \frac{\hat{q}_2 + \hat{q}_1 + \hat{k}}{2} B(S, t + 2(q_2 - q_1)\kappa, p_1^2, p_2^2, q_1^2 + 2q_2\kappa) \right\} u_1 \quad (10)$$

$$M_\mu^{(3)} = e \bar{U}_2 \left\{ A(S - 2(p_1 + q_1)\kappa, t, p_1^2 - 2p_1\kappa, p_2^2, q_1^2, q_2^2) + \frac{\hat{q}_2 + \hat{q}_1}{2} B(S - 2(p_1 + q_1)\kappa, t, p_1^2 - 2p_1\kappa, p_2^2, q_1^2, q_2^2) \right\} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{-2p_1\kappa} \left(\gamma_\mu + \frac{m_p}{2me} \sigma_{\mu\nu} k_\nu \right) u_1 \quad (II)$$

$$M_\mu^{(4)} = e \bar{U}_2 \left(\gamma_\mu + \frac{m_p}{2me} \sigma_{\mu\nu} k_\nu \right) \frac{\hat{p}_2 + \hat{k} + m}{2p_2\kappa} \left\{ A(S, t, p_1^2, p_2^2 + 2p_2\kappa, q_1^2, q_2^2) + \frac{\hat{q}_2 + \hat{q}_1}{2} B(S, t, p_1^2, p_2^2 + 2p_2\kappa, q_1^2, q_2^2) \right\} u_1 \quad (I2)$$

где e , m_p' и m - заряд, аномальный магнитный момент и масса частицы со спином $I/2$ (которую мы для определенности считаем протоном) $Z e$ - заряд частицы со спином 0.

В отличие от комптон-эффекта в данном случае полюсные члены при $\omega \rightarrow 0$ пропорциональны $1/\omega$, а неполюсные члены, соответствующие излучению "изнутри", не имеют особенности по ω и в силу градиентной инвариантности пропорциональны ω . В соответствии с этим в полюсных членах разумно удерживать только два первых члена разложения. Учитывая это, разложим матричные элементы $M_{\mu}^{(1)} - M_{\mu}^{(4)}$ по степеням κ :

$$M_{\mu}^{(1)} = Z e \frac{q_{1\mu}}{q_1 \kappa} \bar{U}_2 \left[T - \frac{\hat{q}_1}{2} B - 2(p_1 + q_1) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial S} + \right. \\ \left. + 2(q_2 - q_1) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial S} - 2q_1 \cdot \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial q_2} \right] U_1 + O(\kappa) \quad (13)$$

$$M_{\mu}^{(2)} = -Z e \frac{q_{2\mu}}{q_2 \kappa} \bar{U}_2 \left[T + \frac{\hat{q}_2}{2} B + 2(q_2 - q_1) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \right. \\ \left. + 2q_2 \kappa \frac{\partial T}{\partial q_2} \right] U_1 + O(\kappa) \quad (14)$$

$$M_{\mu}^{(3)} = -e \frac{p_{1\mu}}{p_1 \kappa} \bar{U}_2 \left[T - 2(p_1 + q_1) \kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial S} - 2p_1 \kappa \frac{\partial T}{\partial p_1^2} \right] U_1 - \\ - \frac{e}{2p_1 \kappa} \bar{U}_2 T \left(1 + M_p^1 \frac{\hat{p}_1 + m}{2me} \right) \sigma_{\mu\nu} K_\nu U_1 + O(\kappa) \quad (15)$$

$$M_{\mu}^{(4)} = e \frac{p_{2\mu}}{p_2 \kappa} \cdot \bar{U}_2 \left(T + 2p_2 \kappa \frac{\partial T}{\partial p_2^2} \right) U_1 + \\ + \frac{e}{2p_2 \kappa} \bar{U}_2 \sigma_{\mu\nu} K_\nu \left(1 + M_p^1 \frac{\hat{p}_2 + m}{2me} \right) T U_1 + O(\kappa) \quad (16)$$

где производные от T означают следующее: $\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial A}{\partial S} + \hat{q} \frac{\partial B}{\partial S}$

С помощью закона сохранения тока найдем добавку, которая обеспечивает градиентную инвариантность матричного элемента в принятом приближении:

$$\begin{aligned} \kappa_M M_M^{(5)} &= -\kappa_M (M_M^{(1)} + M_M^{(2)} + M_M^{(3)} + M_M^{(4)}) = \\ &= e \bar{U}_2 \left[Z \cdot 2q_1 \kappa \frac{\partial T}{\partial q_1^2} + Z \cdot 2q_2 \kappa \frac{\partial T}{\partial q_2^2} - 2p_1 \kappa \frac{\partial T}{\partial p_1^2} - 2p_2 \kappa \frac{\partial T}{\partial p_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + (Z-1) 2(p_1 + q_1) \kappa \frac{\partial T}{\partial S} + O(\kappa^2) \right] U_1 \end{aligned} \quad (I7)$$

откуда

$$\begin{aligned} M_M^{(5)} &= e \bar{U}_2 \left[2Zq_1 \mu \frac{\partial T}{\partial q_1^2} + 2Zq_2 \mu \frac{\partial T}{\partial q_2^2} - 2p_1 \mu \frac{\partial T}{\partial p_1^2} - 2p_2 \mu \frac{\partial T}{\partial p_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + (Z-1) 2(p_1 + q_1) \mu \frac{\partial T}{\partial S} + O(\mu) \right] U_1 \end{aligned} \quad (I8)$$

Теперь можем записать окончательное выражение для амплитуды тормозного излучения:

$$\begin{aligned} M_M &= M_M^{(1)} + M_M^{(2)} + M_M^{(3)} + M_M^{(4)} + M_M^{(5)} = \\ &= e \bar{U}_2 \left\{ \left(Z \frac{q_{1M}}{q_1 \cdot \kappa} - Z \frac{q_{2M}}{q_2 \cdot \kappa} - \frac{p_{1M}}{p_1 \cdot \kappa} + \frac{p_{2M}}{p_2 \cdot \kappa} \right) T + Z \chi_M B - \right. \\ &\quad - Z \left(\frac{q_{1M}}{q_1 \cdot \kappa} + \frac{q_{2M}}{q_2 \cdot \kappa} \right) \frac{k}{2} B - \left(Z \frac{q_{1M}}{q_1 \cdot \kappa} - \frac{p_{1M}}{p_1 \cdot \kappa} \right) 2(p_1 + q_1) \kappa \frac{\partial T}{\partial S} + \\ &\quad + (Z-1) 2(p_1 + q_1) \mu \frac{\partial T}{\partial S} + Z \left(\frac{q_{1M}}{q_1 \cdot \kappa} - \frac{q_{2M}}{q_2 \cdot \kappa} \right) 2(q_2 - q_1) \cdot \kappa \frac{\partial T}{\partial t} - \\ &\quad - \frac{i}{2p_1 \kappa} T \left(1 + \mu_p' \frac{\hat{P} + m}{2me} \right) \sigma_{Mv} k_v + \frac{i}{2p_2 \kappa} \sigma_{Mv} k_v \left(1 + \mu_p' \frac{\hat{P} + m}{2me} \right) T \right\} U_1 + O(\kappa). \end{aligned} \quad (I9)$$

Из окончательного выражения (I9) для M_M видно, что производные по массам частиц сократились. При выводе (I9) использовались только аналитические свойства амплитуд и закон сохранения тока.

Старший член разложения M_M , как и в случае комpton-эффекта, возникает от излучения зарядов. Магнитные моменты дают вклад во второй член разложения, который имеет нулевой порядок по ω .

Условие малости неизвестных структурных членов есть малость ω по сравнению с масштабными энергетическими величинами, характеризующими данный процесс. Так например, в случае тормозного излучения при πN - рассеянии и комптон-эффекте на нуклоне таким характерным энергетическим масштабом может служить масса π -мезона M . В этих случаях масса π -мезона, во-первых, характеризует радиус взаимодействия, то есть область размазанности зарядов частиц, и во-вторых, характеризует по порядку величины расстояние до первого возбужденного уровня нуклона. В случае же тормозного излучения при рассеянии нуклонов и π -мезонов на ядрах, характерный энергетический масштаб, вообще говоря, должен определяться энергией связи ядра. В § I гл.2 условие мягкости γ -кванта при тормозном излучении в ядерных реакциях будет рассмотрено более подробно.

§ 4. Характерные особенности зарядового и магнитно-тормозного излучения.

Из формулы (19) следует, что вклад магнитных моментов внешних частиц в амплитуду тормозного излучения больше вклада неизвестных структурных членов. Поэтому метод тормозного излучения может, в принципе, применяться для измерения магнитных моментов частиц и ядер. В особенности этот метод может быть полезен в том случае, когда исследуемая частица или ядро обладает очень коротким временем жизни. Однако магнитные моменты нельзя определить по измерению полного сечения или спектра тормозного излучения. Причина заключается в том, что члены пропорциональные аномальным магнитным моментам, не интерферируют в низшем порядке по ω со старшим членом

разложения амплитуды $7 - 8$. Для того, чтобы показать это, рассмотрим, например, интерференцию члена, соответствующего вкладу аномального магнитного момента протона в формуле (12)

$$M(m_p') = M_p' \cdot \frac{1}{2p \cdot K} \bar{u}_2 \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{K} \frac{\hat{P}_2 + m}{2m} u_1 \quad (20)$$

где ϵ - 4-вектор поляризации γ -кванта, с членом, соответствующим зарядовому излучению частицы со спином 0 в формуле (9):

$$M(Ze) = Ze \cdot \frac{q_i \epsilon}{q_i \cdot K} \cdot \bar{u}_2 \cdot T \cdot u_1 \quad (21)$$

Вклад в квадрат матричного элемента от интерференции между этими двумя членами имеет вид

$$\begin{aligned} & M^*(m_p') M(Ze) + M(m_p') M^*(Ze) = \\ & = Ze M_p' \cdot \frac{1}{2p \cdot K} \cdot \frac{q_i \epsilon}{q_i \cdot K} \cdot Sp \left\{ T^* \frac{\hat{P}_2 + m}{2m} \hat{K} \hat{\epsilon} \frac{\hat{P}_2 + m}{2m} T \right\} (22) \\ & \times \frac{\hat{P}_1 + m}{2m} + T^* \frac{\hat{P} + m}{2m} \cdot \hat{\epsilon} \cdot \hat{K} \cdot \frac{\hat{P} + m}{2m} \cdot T \cdot \frac{\hat{P} + m}{2m} \} = Ze m_p' \times \\ & \times \frac{K \cdot \epsilon}{p \cdot K} \cdot \frac{q_i \epsilon}{q_i \cdot K} \cdot Sp \left\{ T^* \frac{\hat{P}_2 + m}{2m} \cdot T \cdot \frac{\hat{P}_2 + m}{2m} \right\} = 0 \end{aligned}$$

то есть зануляется из-за того, что $K \cdot \epsilon = 0$.

Поэтому для того, чтобы определить магнитный момент из сечения тормозного излучения необходимо выбрать такую кинематику, в которой зарядовое излучение подавлено до такой степени, чтобы интерференцией зарядового излучения с неизвестными структурными членами можно было пренебречь. Выбор кинематики может основываться, например, на различии угловых распределений γ -квантов, излучаемых зарядами и аномальными магнитными моментами.

Рассмотрим, например, угловое распределение фотонов.

возникающих за счет зарядового излучения частицы со спином в формуле (9)

$$|M(z_e)|^2 = Z e^2 \frac{v^2 \sin^2 \theta_1}{\omega^2 (1 - v \sin \theta_1)^2} |\bar{u}_2 T u_1|^2 \quad (23)$$

где v - скорость частицы, а θ_1 - угол между импульсом частицы и направлением вылета γ -кванта. Из выражения (23) видно, что в ультрарелятивистском случае ($v \sim 1$), угловое распределение резко усилено для малых углов θ_1 . При углах близких к 180° квадрат матричного элемента $|M(z_e)|^2$ мал. В нерелятивистском случае ($v \ll 1$) угловое распределение пропорционально $v^2 \sin^2 \theta_1$.

Угловое распределение в случае излучения аномального магнитного момента имеет такой вид

$$|M(\mu_p')|^2 = e^2 \frac{\mu_p'^2}{2 m_p^2} |\bar{u}_2 T u_1|^2 \quad (24)$$

то есть совсем не зависит от угла между импульсом излучающей частицы и направлением вылета γ -кванта.

Таким образом, различие в угловом распределении для излучений зарядов и аномальных магнитных моментов может быть использовано для выделения вкладов магнитных моментов в сечениях процессов тормозного излучения. Укажем также, что вклады магнитных моментов можно выделить, если измеряются поляризации частиц, так как в корреляционных членах, связанных с поляризациями, интерференция зарядов и аномальных магнитных моментов, вообще говоря, не зануляется.

Примеры, иллюстрирующие возможность использования процессов тормозного излучения для определения электромагнитных характеристик элементарных частиц, рассмотрены в работах 8-14.

§ 5. Дальнейшие обобщения низкоэнергетической теоремы
для тормозного излучения.

а) Вклады квадрупольных моментов.

Так же, как и в случае эффекта Комптона, низкоэнергетическая теорема для тормозного излучения может быть обобщена на процессы с участием частиц с произвольными спинами. При этом новые явления возникают при спине $S > 1/2$, когда частицы обладают квадрупольными моментами. Члены, соответствующие квадрупольному тормозному излучению, линейны по ω , то есть имеют такой же порядок малости, что и структурные члены. Однако, как показано в работе⁸ вклады квадрупольных моментов, а также вклады магнитных моментов, можно отделить от вкладов структурных членов при анализе углового распределения тормозных γ -квантов.

б) Вклады электрических радиусов частиц.

Интересную низкоэнергетическую теорему можно сформулировать, если рассмотреть тормозное излучение мягкого виртуального γ -кванта, то есть электрон-позитронной пары (см. работу II). Разобьем матричный элемент, соответствующий излучению виртуального фотона на полюсную и неполюсную части. При этом для полюсной части можно написать разложение

$$\begin{aligned} A^{(4)}(\kappa^2) &= b_1(\kappa^2) \frac{1}{\omega} + b_2(\kappa^2) + b_3(\kappa^2)\omega + O(\omega^2) = \\ &= (b_1(0) + b_1'(0)\kappa^2) \frac{1}{\omega} + b_2(0) + b_3(0)\omega + O(\omega^2) \end{aligned} \quad (27)$$

а неполюсную часть можно символически выразить в виде

$$A^{(2)} = b_4(\kappa^2)\omega + O(\omega^2) = b_4(0)\omega + O(\omega^2) \quad (28)$$

В линейном по K приближении матричные элементы для неполюсных диаграмм совпадают для случаев испускания виртуального и реального γ -кванта. Это объясняется тем, что дополнительные амплитуды, специфические для виртуального γ -кванта, обязательно содержат характерный множитель K^2 (так как они должны зануляться при $K^2 = 0$) и поэтому квадратичны по импульсу фотона. С другой стороны полюсные члены в случае излучения виртуального фотона отличаются от полюсных членов в случае реального фотона уже в линейном по K приближении. Это различие связано с вкладом электрических радиусов частиц, который пропорционален $\beta_1'(0)K^2/\omega$ (см. формулу (27)) и действительно линеен по импульсу фотона.

Следовательно, если матричный элемент для испускания реального фотона известен из независимых опытов, то изучение процесса рождения мягкой электрон-позитронной пары может быть использовано для определения электрических радиусов частиц.

II. Тормозное излучение в прямых ядерных реакциях.

§ I. Амплитуды радиационных распадов для мягких γ -квантов в нерелятивистском случае.

Как было впервые показано в работе¹⁵, спектр тормозного излучения, сопровождающего прямую ядерную реакцию, может служить полезным источником информации о механизме этой реакции. Эта возможность основывается на появлении отклонений спектра тормозного излучения от $d\omega/\omega$, которые становятся существенными, если амплитуда реакции имеет особенности, близкие к физической области. В частности, в работе¹⁵ было отмечено, что в спектре тормозного излучения бинарной реакции, описан-

ваемой треугольной диаграммой, должен наблюдаться "каси", соответствующий корневой особенности, и максимум, соответствующий логарифмической особенности треугольной диаграммы. Подобная ситуация, а именно отклонение спектра γ -квантов от $d\omega/\omega$, связанное с особенностью, наблюдается и в случае полюсного механизма I⁵. Спектры тормозного излучения при полюсном и треугольном механизмах реакции рассматривались в работах I⁶⁻¹⁷, 4I-43.

Амплитуду тормозного излучения для реакции, описываемой полюсной или треугольной диаграммой, можно построить, учитывая совокупность диаграмм, в которых γ -кант излучается всеми внешними и всеми внутренними частицами, добавив при этом к полученному выражению члены, соответствующие так называемому "контактному" излучению в вершинах. Члены же соответствующие "внутреннему" излучению из вершин, то есть структурные члены, вообще говоря, не могут быть вычислены точно, и чем меньше энергия γ -кванта, тем меньшая погрешность вносится в матричный элемент при отбрасывании этих членов. То есть, как это указывалось в § 3, энергия γ -кванта должна быть малой по сравнению с характерным энергетическим масштабом вершинных частей.

Но, с другой стороны, чтобы отклонения спектра от $d\omega/\omega$ были заметными, энергия γ -квантов не должна быть очень малой. Действительно, нерегулярности в спектре фотонов, связанные с особенностями полюсной или треугольной диаграмм, проявляются в полной мере лишь тогда когда энергия γ -кванта будет равна по порядку величины расстоянию до особенности данной диаграммы. Чтобы при этом можно было пренебречь внутренним излучением из вершин, энергия фотона должна быть в те же

время малой по сравнению с расстояниями до особенностей соответствующих вершинных частей. Поскольку, как правило, особенность, соответствующая более сложной диаграмме, находится на большем расстоянии от физической области I^8 , то можно думать, что существует область кинематических переменных, где требуемая ситуация осуществляется.

Прежде, чем перейти к анализу спектров тормозного излучения в прямых ядерных реакциях, найдем общий вид амплитуды радиационного процесса $A \rightarrow b + c + \gamma$ и обсудим критерии на "мягкость" γ -кванта. Как мы уже отмечали в предыдущих параграфах, в приближении мягких γ -квантов амплитуда радиационного процесса выражается через амплитуду основного процесса. Поэтому остановимся сначала на выборе формы записи амплитуды перехода $A \rightarrow b + c$. Однако, прежде чем перейти к общему случаю произвольных спинов, рассмотрим для простоты конкретный пример, когда ядро со спином и четностью 2^+ распадается на ядра b и c , имеющие спин и четность соответственно 1^- и 0^+ , причем распад идет по каналу с орбитальным моментом $\ell = I$.

В рамках теории поля амплитуда перехода $2^+ \rightarrow 1^- + 0^+$ при $\ell = I$ записывается следующим образом:

$$M = G(p_a^2, p_b^2, p_c^2) q_{\alpha}^{(a)} \varphi_{\alpha \beta}^{(a)} \varphi_{\beta}^{(b)} \varphi^{(c)} \quad (29)$$

где P_i есть 4-импульс i -й частицы; $q^{(a)} = m_{bc} \left[\frac{p_b}{m_b} - \frac{p_c}{m_c} \right]$ — относительный импульс частиц b и c ; $m_{bc} = m_b m_c / (m_b + m_c)$; $\varphi_{\alpha \beta}^{(a)}$ — симметризованная по индексам α , β волновая функция и частицы ее спином 2; $\varphi_{\beta}^{(b)}$ и $\varphi^{(c)}$ — волновые функции частиц b и c соответственно. Множитель $q_{\alpha}^{(a)}$ отражает тот факт, что в рассматриваемом примере относительный орби-

тальный момент частиц β и c равен единице.

Формула (29) может служить также определением амплитуды перехода $a \rightarrow b + c$, когда одна или несколько частиц находятся вне массовой поверхности.

Нас интересует нерелятивистский случай, который характерен для прямых ядерных реакций при сравнительно невысоких энергиях. В этом случае волновые функции $\psi_{\beta}^{(a)}$ и $\psi_{\gamma}^{(c)}$ малы, если один из индексов равен нулю в силу условий $P_a^{(a)} \psi_{\beta}^{(a)} = 0$, $P_{\beta}^{(c)} \psi_{\gamma}^{(c)} = 0$ и амплитуду (29) можно представить в виде

$$M = g(P_a^2, P_b^2, P_c^2) F(\vec{q}_a) \quad (30a)$$

причем

$$\begin{aligned} & \langle 1, K_b; 0, K_c | F(\vec{q}_a) | 2, K_a \rangle = \\ & = \sqrt{4\pi} q_a R_a \sum_{\mu m} C_{1K_b, 0K_c}^{S_M} C_{S_M, 1m}^{2K_a} Y_{1m}(\vec{q}_a/q_a) \end{aligned} \quad (30b)$$

где K_i - проекция спина i -й частицы на ось квантования;

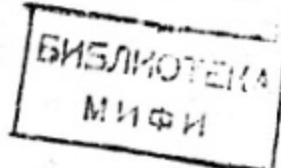
R_a - радиус канала, а константы g и G отличаются на постоянный множитель.

Формулу (30) легко обобщить на случай произвольных спинов:

$$M = \sum_{\ell_a, S_a} g_{\ell_a, S_a}(P_a^2, P_b^2, P_c^2) F_{\ell_a, S_a}(\vec{q}_a) \quad (31a)$$

причем

$$\langle J_b K_b; J_c K_c | F_{\ell_a, S_a} | J_a K_a \rangle =$$



$$= \sqrt{4\pi} (q_a R_a)^{\ell_a} \sum_{M_a m_a} C_{J_b K_b, J_c K_c}^{S_a M_a} C_{S_a M_a, \ell_a, R_a}^{J_a K_a} Y_{\ell_a m_a}(\vec{q}_a/q_a) \quad (31b)$$

Такое разбиение амплитуды перехода $a \rightarrow b + c$ в каждом

канале с определенным орбитальным моментом ℓ и полным спином S на произведение двух функций, одна из которых зависит от квадратов 4-импульсов частиц, а вторая от вектора относительного импульса продуктов распада, удобно при рассмотрении радиационных процессов, так как в приближении мягких γ -квантов радиационные амплитуды не зависят от производных g по массам частиц (см. § 3 (для сравнения)).

Укажем связь g с константой δ , которая часто используется при анализе прямых ядерных реакций¹⁸:

$$g_{\ell_a S_a} = \frac{1}{m_b m_c} \delta_{\ell_a S_a} \sqrt{\frac{\chi_a \pi}{2}} (q_a R_a)^{-\ell_a} f_{\ell_a S_a}(q_a) \quad (32)$$

где $\chi_a = \sqrt{2 m_b E_a}$; $E_a = m_b + m_c - m_a$; $f_{\ell_a S_a}$ — формфактор, который в батлеровском приближении¹⁹ имеет вид

$$f(q_a) = -i y \left[y j_{\ell_a}(x) h_{\ell_a-1}^{(1)}(y) - x j_{\ell_a-1}(x) h_{\ell_a}^{(1)}(y) \right]$$

$x = q_a R_a$; $y = i \chi_a R_a$
(напомним, что мы используем систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$).

Амплитуду реакции $A \rightarrow b + c + \gamma$ будем находить в полной аналогии с процедурой описанной в § 3 (пренебрегая однако вкладами магнитных моментов, которые малы в нерелятивистском случае). Запишем матричный элемент, соответствующий полюсным диаграммам I-3 рис.3:

$$\begin{aligned} E_\mu M_\mu^{(1)} &= e \left\{ -Z_a \frac{P_a \epsilon}{P_a K} g(P_a^2 - 2 P_a K, P_b^2, P_c^2) F(\vec{q}_a) + \right. \\ &+ Z_b \frac{P_b \epsilon}{P_b K} g(P_a^2, P_b^2 + 2 P_b K, P_c^2) F(\vec{q}_a + \frac{m_b e}{m_b} \vec{K}) + \\ &\left. + Z_c \frac{P_c \epsilon}{P_c K} g(P_a^2, P_c^2 + 2 P_c K, P_b^2) F(\vec{q}_a - \frac{m_b e}{m_c} \vec{K}) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

где $Z_i e$ есть заряд i -й частицы; а через ϵ и K обозначены, как обычно, 4-векторы поляризации и импульса γ -кванта

Поскольку это не может привести к недоразумениям, мы опустили для упрощения написания формул все индексы у g и F .

Раскладывая выражение (33) по степеням K и удерживая два первых члена разложения, получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu} M_{\mu}^{(1)} = & e \left\{ g F(\vec{q}_a) \left(-Z_a \frac{P_a E}{P_a K} + Z_b \frac{P_b E}{P_b K} + Z_c \frac{P_c E}{P_c K} \right) + \right. \\ & + F(\vec{q}_a) \left(2Z_a P_a \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_a} + 2Z_b P_b \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_b} + \right. \\ & \left. \left. + 2Z_c P_c \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_c} \right) + g \left(\frac{Z_b}{m_b} \frac{P_b E}{P_b K} - \frac{Z_c}{m_c} \frac{P_c E}{P_c K} \right) m_{bc} \frac{\partial F(\vec{q}_a)}{\partial \vec{q}_a} \vec{K} \right\} + O(K) \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $g \equiv g(P_a^2, P_b^2, P_c^2)$.

С помощью закона сохранения тока найдем градиентно-инвариантную добавку к членам нулевого порядка по K матричного элемента $M_{\mu}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} K_{\mu} M_{\mu}^{(2)} = -K_{\mu} M_{\mu}^{(1)} = & -F(\vec{q}_a) \left(2Z_a P_a K \frac{\partial g}{\partial P_a} + 2Z_b P_b K \frac{\partial g}{\partial P_b} + \right. \\ & \left. + 2Z_c P_c K \frac{\partial g}{\partial P_c} \right) - g \left(\frac{Z_b}{m_b} - \frac{Z_c}{m_c} \right) m_{bc} \frac{\partial F(\vec{q}_a)}{\partial \vec{q}_a} \vec{K}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu} M_{\mu}^{(2)} = & -F(\vec{q}_a) \left(2Z_a P_a \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_a} + 2Z_b P_b \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_b} + \right. \\ & \left. + 2Z_c P_c \cdot E \frac{\partial g}{\partial P_c} \right) - g \frac{m_{bc}}{m_b} \left(Z_b - Z_c \frac{m_b}{m_c} \right) \frac{\partial F(\vec{q}_a)}{\partial \vec{q}_a} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (35)$$

При суммировании выражений для $M_{\mu}^{(1)}$ и $M_{\mu}^{(2)}$ производные по массам сокращаются. После простых преобразований получается следующее выражение для полного матричного элемента реакции

$a \rightarrow b + c + \gamma$:

$$M_{\gamma} = \epsilon_{\mu} (M_{\mu}^{(1)} + M_{\mu}^{(2)}) = \frac{eq}{\omega} \frac{Z_c m_b - Z_b m_c}{m_b m_c} \vec{E} \left[\vec{q}_a F(\vec{q}_a) + m_{bc} \omega \frac{\partial F(\vec{q}_a)}{\partial \vec{q}_a} \right] \quad (36)$$

где учтено также, что в рассматриваемом нерелятивистском случае $\omega \sim q_a^2/m \ll q_a$, и импульсом \vec{p}' -кванта поэтому можно пренебречь по сравнению с импульсами заряженных частиц.

Член с производной $\partial F(\vec{q}_a)/\partial \vec{q}_a$ в матричном элементе (36) соответствует контактному излучению. Отношение вклада контактного члена к вкладу старшего члена разложения равно по порядку величины $m\omega/q_a^2$, то есть вклад контактного члена весьма существен при $\omega \sim q_a^2/m$. В этом своеобразие нерелятивистского случая. В релятивистском случае, когда скорости всех частиц не малы по сравнению со скоростью света, вклад контактного члена мал по сравнению с вкладом зарядового излучения. Если относительный орбитальный момент ядер ℓ и c равен нулю, то контактный член обращается в нуль. Это легко увидеть из следующего представления для производной $\partial F(\vec{q}_a)/\partial \vec{q}_a$

$$\langle J_b K_b, J_c K_c | \partial F_{\text{contact}}(\vec{q}_a) / \partial \vec{q}_a | J_a K_a \rangle =$$

$$= \sqrt{4\pi} \sum_{\mu_a, \mu_a} (q_a R_a)^{\ell_a} C_{J_b K_b, J_c K_c}^{S_a M_a} C_{S_a M_a, \ell_a m_a}^{J_a K_a} \times \quad (37)$$

$$\times \frac{1}{q_a^2} \left\{ \ell_a \vec{q}_a Y_{\ell_a m_a} \left(\frac{\vec{q}_a}{q_a} \right) - i \sqrt{\ell_a(\ell_a+1)} \sum_{\lambda} C_{\ell_a m_a, 12}^{\ell_a m_a} Y_{\ell_a m_a} \left(\frac{\vec{q}_a}{q_a} \right) [\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2] \right\}$$

где \vec{e}_1 - единичный базисный вектор с компонентами

$$\vec{e}_0 = \vec{e}_z; \vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y)$$

Так как рассматриваемый нами случай соответствует дипольному излучению, то в соответствии с общими правилами для дипольного излучения матричный элемент (36) обращается в нуль, если $Z_e e/m_e = Z_c e/m_c$.

Таким образом, выражение (36) определяет амплитуду ра-

диационного процесса $a \rightarrow b + c + \gamma$ с точностью до двух первых членов разложения по степеням ω . Вклад членов, линейных по ω (а также членов более высокого порядка по ω), может быть найден только после решения соответствующей динамической проблемы, в которой сильное взаимодействие учитывается точно, а электромагнитное – в первом порядке по константе связи.

Рассмотрим критерий малости линейных по ω членов. Для этого оценим по порядку величины линейные по ω вклады от трех возможных источников:

I. Вклад от квадрупольных моментов внешних частиц. Этот вклад мал, если $\omega R \ll 1$.

2. Вклад от возбужденных уровней ядер (диаграмма 4 рис. 3) по порядку величины равен $(\omega R)^{\ell}/(\varepsilon - \omega + i\Gamma/2)$, где ℓ – мультипольность перехода, $\varepsilon = m_a - m_a^*$, Γ – ширина уровня. Если уровень не может реально возбуждаться, то при $\ell > 1$ этот вклад также мал при условии $\omega R \ll 1$. Чтобы был мал вклад дипольных переходов, требуется, однако, другое условие, а именно

$$\gamma \omega R \ll V_a \quad (38)$$

где V_a – относительная скорость частиц b и c , γ – коэффициент подавленности дипольного перехода по сравнению с его естественной величиной ZeR .

При возможности реального возбуждения уровней (реакции $\gamma + a \rightarrow b + c$, $b + c \rightarrow \gamma + a$ или, когда ядро a распадается из возбужденного состояния, $a^* \rightarrow b + c + \gamma$ (и при достаточно хорошем разрешении по ω в спектре γ -квантов будут наблюдаться узкие пики, соответствующие этим уровням. Вклады реально возбуждаемых уровней следует, естественно, учитывать

дополнительно.

3. Члены, соответствующие внутреннему излучению из вершины. Сюда могут давать вклад производные \dot{g} по массам частиц. Например, могут быть члены типа

$$M_g^{(3)} = \frac{\partial g}{\partial m_{\text{вс}}} Z_{\text{вс}} e (P_{\text{вс}} \cdot \mathbf{k} \cdot \Psi^{(6)} \cdot \epsilon - P_{\text{вс}} \cdot \epsilon \cdot \Psi^{(6)} \cdot \mathbf{k}) \quad (39)$$

Чтобы можно было пренебречь членами такого типа, должны выполняться условие $\omega g^{-1} (\partial g / \partial m) \ll 1$. Если считать, что самая быстрая зависимость g от масс связана с зависимостью от масс величины $\mathcal{X}_a = \sqrt{2m_{\text{вс}} E_a}$, где E_a - энергия связи в вершине, то $g \equiv g(\mathcal{X}_a R_c)$ и после дифференцирования $\partial g / \partial m = R_a \sqrt{E_a / 2m_{\text{вс}}} g'$, получаем следующее неравенство

$$\omega R_a \sqrt{\frac{E_a}{2m_{\text{вс}}}} \cdot \frac{g'}{g} \ll 1$$

которое заведомо выполняется при $\omega R_a \ll 1$.

Если энергия испускаемого γ -кванта равна по порядку величине энергии связи в вершине $\omega \sim E_a$, то условия "мягкости" принимают вид

$$\eta_1 = \gamma \sqrt{\frac{m_{\text{вс}} E_a}{2}} R \ll 1; \quad \eta_2 = E_a R \ll 1 \quad (40)$$

После подстановки в выражение (40) значений $R \approx \frac{1}{m_{\text{вс}}} A^{\frac{1}{3}}$, $m_{\text{вс}} \approx 1 \text{ Гэв}$, $E_a \approx 5 \text{ Мэв}$ получаем следующую оценку для параметров η_i :

$$\eta_1 \approx \frac{\gamma}{3} A^{\frac{1}{3}}; \quad \eta_2 \approx \frac{1}{30} A^{\frac{1}{3}} \quad (41)$$

Поскольку коэффициент подавленности дипольных переходов γ как правило $\leq 10^{-1}$, условия (41) показывают, что в области легких ядер приближение мягких γ -квантов для радиационных амплитуд, описывающих тормозное излучение, может считаться разумным приближением, если энергия γ -кванта не превышает

по порядку величины энергию связи на один нуклон. Следует отметить, что при анализе параметра η , в работе /16/ не была учтена подавленность ядерных переходов и поэтому полученный в этой работе параметр является завышенным.

§ 2. Спектр тормозного излучения в случае полносного механизма прямой ядерной реакции.

Вычислим спектр тормозного излучения в реакции $A+x \rightarrow B+y$, описываемой полносной диаграммой. Матричный элемент реакции $A+x \rightarrow B+y + \gamma$ (рис.4), в котором учтено зарядовое излучение внешних частиц A, x, B, y и промежуточной частицы p, а также контактное излучение в вершинах $x+p \rightarrow y$ и $A \rightarrow p+B$, легко построить, используя формулу (36). Для этого нужно заметить, что вклад диаграммы 3 рис.4, который пропорционален

$$g_1 F_1(\vec{q}_1) \frac{2m_p}{(p_y - p_x)^2 - m_p^2} \lambda(p_y - p_x) \cdot \epsilon \frac{2m_p}{(p_y - p_x + k)^2 - m_p^2} g_2 F_2(\vec{q}_2)$$

где $g_1 F_1(\vec{q}_1)$ и $g_2 F_2(\vec{q}_2)$ амплитуды переходов $x+p \rightarrow y$ и $A \rightarrow B+p$ соответственно, можно представить в виде

$$g_1 F_1(\vec{q}_1) g_2 F_2(\vec{q}_2) \frac{(p_y - p_x) \cdot \epsilon}{(p_y - p_x) \cdot k} \left\{ \frac{2m_p}{(p_y - p_x)^2 - m_p^2} - \frac{2m_p}{(p_y - p_x + k)^2 - m_p^2} \right\}$$

Вклад первого члена в фигурных скобках в сумме с членами, соответствующими излучению частиц A, B и контактному излучению в нижней вершине, описывает тормозное излучение при распаде $A \rightarrow B+p+\gamma$. В то же время вклад второго члена в сумме с членами, соответствующими излучению частиц x, y и контактному излучению в верхней вершине, описывает тормозное излучение при слиянии $x+p \rightarrow y+\gamma$.

Учитывая сказанное, нетрудно получить следующее выражение для матричного элемента в рассматриваемом случае:

$$M_{\gamma}^P = e g_1 g_2 \frac{2 \vec{\epsilon}}{\omega} \left\{ \delta_1(t, \omega) F_2(\vec{q}_2) [\vec{q}_1 F_1(\vec{q}_1) - m_{px} \omega \frac{\partial F_1(\vec{q}_1)}{\partial \vec{q}_1}] - \delta_2(t) F_1(\vec{q}_1) [\vec{q}_2 F_2(\vec{q}_2) + m_{py} \omega \frac{\partial F_2(\vec{q}_2)}{\partial \vec{q}_2}] \right\}. \quad (42)$$

где

$$\delta_1(t, \omega) = \frac{Z_y m_x - Z_x m_y}{m_x [t - 2m_p \varepsilon_1 + 2(m_y - m_x)\omega]}, \quad \delta_2(t) = \frac{Z_A m_B - Z_B m_A}{m_B (t - 2m_p \varepsilon_1)}$$

причем члены, пропорциональные $\delta_1(t, \omega)$ и $\delta_2(t)$, описывают, соответственно, тормозное излучение при $A + p \rightarrow B + \gamma$ и распаде $A \rightarrow B + p$; m_p - масса промежуточной частицы; t - квадрат переданного импульса от частицы x к частице y :

$$t = (p_y - p_x)^2 - (m_y - m_x)^2; \quad \varepsilon_1 = m_x + m_p - m_y$$

$$\vec{q}_1 = m_x \left(\frac{\vec{p}_y}{m_y} - \frac{\vec{p}_x}{m_x} \right); \quad \vec{q}_2 = m_B \left(\frac{\vec{p}_A}{m_A} - \frac{\vec{p}_B}{m_B} \right)$$

Нормировка такая, что дифференциальное сечение реакции $A + x \rightarrow B + \gamma$ дается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_x m_y}{4\pi^2} \cdot \frac{p_y}{p_x} \cdot |g_1 F_1(\vec{q}_1) g_2 F_2(\vec{q}_2)| \left(\frac{2m_p}{t - 2m_p \varepsilon_1} \right)^2 \quad (43)$$

Возведя матричный элемент (42) в квадрат, выполним суммирование по поляризациям γ -кванта и проинтегрируем по направлениям его вылета с помощью выражения

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_j \sum_i \epsilon_i^{(2)} \epsilon_i^{(2)*} = \frac{2}{3} \delta_{ik}$$

Интегрирование по $d\Omega_j$ можно выполнить так просто потому, что в рассматриваемом приближении матричный элемент (42) фактически не зависит от направления вылета γ -кванта, так как импульс фотона пренебрежимо мал по сравнению с импульсами заряженных частиц.

Кроме того, мы в качестве примера рассмотрим случай, когда квадрат матричного элемента, соответствующего реакции $A + x \rightarrow B + y$ факторизуется. Условия факторизации выполняются, если ²⁰: а) спин промежуточной частицы равен 0 или $1/2$; б) относительный орбитальный момент частиц x и p или p и B равен нулю; в) суммарный спин частиц x и p или B и p равен 0 или $1/2$.

Если условия факторизации выполнены, то дважды дифференциальное сечение реакции $A + x \rightarrow B + y + \gamma$, просуммированное по спинам конечных частиц и усредненное по спинам начальных частиц, имеет в с.д.и. следующий вид:

$$\frac{d\sigma_d^P}{d\Omega d\omega} = \alpha \frac{m_A m_B}{6\pi^3} \cdot \frac{P_x \omega}{P_x} \overline{|M_j^P|^2} \quad (44)$$

где $d\Omega = d\cos\theta d\varphi$ элемент телесного угла в направлении \vec{P}_y ($P_y = [2m_B(E+Q-\omega)]^{1/2}$, $Q = m_A + m_x - m_B - m_y$); E — суммарная кинетическая энергия начальных частиц в с.д.и.

Квадрат матричного элемента $\overline{|M_j^P|^2}$ дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \overline{|M_j^P|^2} &= \frac{2Y_y + 1}{(2Y_x + 1)(2Y_p + 1)} \cdot \sum_{\ell_1 S_1, \ell_2 S_2} |g_{\ell_1 S_1}^{(1)}|^2 |g_{\ell_2 S_2}^{(2)}|^2 (q_1 R_1)^{2\ell_1} \\ &\times (q_2 R_2)^{2\ell_2} \frac{4}{\omega^2} \left\{ \gamma_1^2(t, \omega) [q_1^2 - m_{px} \omega^2 \ell_1 + \right. \\ &+ \ell_1(2\ell_1 + 1) \frac{m_{px}^2 \omega^2}{q_1^2}] + \gamma_2^2(t) [q_2^2 + 2\ell_2 m_{yB} \omega + \right. \\ &+ \ell_2(2\ell_2 + 1) \frac{m_{yB}^2 \omega^2}{q_2^2}] - 2\gamma_1(t, \omega) \gamma_2(t) [\vec{q}_1 \vec{q}_2 + \ell_2 m_{yB} \omega - \\ &- \ell_1 m_{xp} \omega + q_2^2 m_{xp} m_{yB} \omega^2 \ell_1 \ell_2 \cdot \frac{\vec{q}_1 \vec{q}_2}{q_1^2 q_2^2}] \} \end{aligned} \quad (45)$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к вершинам $p + x \rightarrow y$ и $A \rightarrow B + p$; ℓ_1 и ℓ_2 — относительные орбитальные моменты и суммарные спины пар частиц соответственно px и Bp :

$$g^{(1)} = g^{(1)}(P_y^2, P_x^2, P_p^2); g^{(2)} = g^{(2)}(P_A^2, P_B^2, P_p^2)$$

Выразим через квадрат передаваемого импульса t и полную кинетическую энергию в с.д.и. E величины q_1^2 , q_2^2 и $\vec{q}_1 \vec{q}_2$, входящие в формулы (44) и (45)

$$q_1^2 = -\frac{m_x}{m_y} t, \quad q_2^2 = \frac{m_B}{m_A} [2m_p(Q-\omega) - t]$$

$$\vec{q}_1 \vec{q}_2 = \frac{1}{2} \left\{ t \left(1 + \frac{m_x m_B}{m_y m_A} \right) + \frac{2m_p}{m_y m_A} [m_p(m_x + m_A)E - m_x m_B(Q-\omega)] \right\}$$

квадрат передаваемого импульса t связан с углом рассеяния следующим образом

$$t = -\frac{2m_x m_y}{m_x + m_A} \left[\frac{m_B}{m_y} (Q + E - \omega) + \frac{m_A}{m_x} E - 2 \left[\frac{m_B m_A}{m_x m_y} (Q + E - \omega) E \right]^{\frac{1}{2}} \cos \vartheta \right]$$

Рассмотрим теперь, какой вид имеет спектр γ -квантов, представленный выражениями (44), (45) при фиксированном значении t . Из выражения (42) для матричного элемента M_γ^P видно, что член пропорциональный $\gamma_1(t, \omega)$ и рассматриваемый как функция ω имеет при фиксированном значении t полюс по ω в точке

$$\omega_0 = (-t + 2m_p \varepsilon_1) / (m_y - m_x)$$

Для реакций подхвата $m_y > m_x$ $\omega_0 > 0$, а для реакций срыва $\omega_0 < 0$. Поэтому в реакциях срыва максимум спектра, связанный с полюсной особенностью по ω , не может проявиться, поскольку при малых ω доминирует зарядовое излучение. (Заметим, что если бы мы фиксировали значение квадрата передаваемого импульса от частицы A к частице B, то наоборот полюс по ω оказывал бы большее влияние на спектр γ -квантов)

в реакциях срыва).

Для реакций подхвата с ростом ω мы приближаемся к особенности $\omega_0 = -\frac{t}{2m_p} + \varepsilon_1$, которая всегда лежит вне физической области. Так, если в физической области возможные значения ω лежат в пределах $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$, где ω_{max} при фиксированных значениях E и t дается выражением

$$\omega_{max} = Q + E - \frac{m_y}{m_B} \left(\sqrt{\frac{m_A}{m_x} E} - \sqrt{-\frac{m_x + m_A}{2m_x m_A} t} \right)^2 \quad (46)$$

то ω_0 всегда больше, чем ω_{max} . При возрастании t от t_{min} разность $\omega_0 - \omega_{max}$ сначала несколько уменьшается, а затем после некоторого значения t начинает быстро подрастать.

Примерный вид спектра тормозного излучения для реакции подхвата при небольших переданных импульсах $t \sim -2m_p\varepsilon_1$ приведен на рис.5. При очень малых ω спектр имеет обычный падающий вид $d\omega/\omega$, затем при $\omega \sim \varepsilon_1$ начинает отклоняться от $d\omega/\omega$ и это отклонение все время возрастает по мере приближения ω к ω_{max} . Возрастание отклонения частично объясняется влиянием особенности знаменателя в $\delta_1(t, \omega)$, а частично вкладом контактных членов. На самой границе фазового объема из-за множителя P_y произойдет резкий обрыв спектра и может образоваться максимум при ω , близком к ω_{max} . В отличие от реакции подхвата в реакциях срыва при ω , близкой к ω_{max} может быть лишь плавный подъем, связанный с влиянием контактных членов.

С ростом t картина спектра меняется в двух отношениях.

Во-первых, возрастает максимальное значение ω_{\max} , и поэтому расширяется область допустимых значений ω и возрастает роль контактных членов. Во-вторых, меняется минимальное расстояние до особенности $\omega_0 - \omega_{\max}$. Поэтому максимум, который все время находится на границе спектра, удаляется в сторону больших ω . По своей абсолютной величине он может сначала при небольшом увеличении t даже несколько подрасти однако при дальнейшем росте t максимум будет становиться все более пологим.

§ 3. Спектр тормозного излучения при треугольном механизме.

Перейдем теперь к анализу спектра тормозного излучения в случае треугольного механизма реакции $A + x - B + y + \gamma$ /рис.6/.

В используемом приближении, в соответствии с результатами § 1 и § 2 этой главы, мы должны учесть в амплитуде реакции $A + x \rightarrow B + Y + \gamma$ вклады диаграмм, описывающих зарядовое излучение четырех реальных частиц A, x, B, y и трех виртуальных частиц I, 2, 3, а также члены нулевого порядка по ω , описывающие контактное излучение из вершин



Построение членов нулевого порядка по ω в случае четырех-хвостки $3 + x - 2 + y$ можно провести аналогично тому, как это было проведено в § 3 главы I. Мы здесь, однако, будем считать, что в реакции $3 + x \rightarrow 2 + y$ доминирует σ -волна. (В качестве примера можно привести K^p -рассеяние, где угловое распределение изотропно вплоть до энергий ~ 50 Мэв²¹). В этом случае члены порядка ω^0 в амплитуде $3 + x - 2 + y + \gamma$ выражаются только через производную амплитуды рассеяния $3 + X - 2 + y$ по энергии, и если зависимость от энергии в амплитуде рассеяния слабая (нет близи резонансов в σ -канале),

то членами $\sim \omega$ в радиационной амплитуде $3^+ x \rightarrow 2^+ y + \delta$ можно пренебречь. Все расчеты в этом параграфе будут проводиться именно в таком предположении. Обобщение на произвольный случай принципиальных трудностей не содержит.

Трехлучевые вершины $A \rightarrow 1+3$ и $1+2 \rightarrow B$ будем записывать в самом общем виде.

Используя методику, изложенную в § I этой главы, амплитуду тормозного излучения в реакции, описываемой треугольной диаграммой (см. рис.6), можно записать следующим образом:

$$M_{j^*} = -i \frac{m_1 m_2 m_3}{2\pi^4} (M_1 + M_2) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \int d^4 p_1 g_B^* F_B(\vec{q}_B) g_A F_A(\vec{q}_A) M_{xy} \times \\ &\times \left\{ \frac{\left[Z_y \frac{p_y \cdot \epsilon}{p_y \cdot \kappa} - Z_x \frac{p_x \cdot \epsilon}{p_x \cdot \kappa} + Z_2 \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot \kappa} - Z_3 \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot \kappa} \right]}{(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p_3^2 - m_3^2 + i\epsilon)} + \right. \\ &+ \frac{Z_B \frac{p_B \cdot \epsilon}{p_B \cdot \kappa} - Z_2 \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot \kappa} - Z_1 \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot \kappa}}{(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)((p_2 + \kappa)^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p_3^2 - m_3^2 + i\epsilon)} + \\ &+ \left. \frac{Z_A \frac{p_A \cdot \epsilon}{p_A \cdot \kappa} - Z_1 \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot \kappa} - Z_3 \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot \kappa}}{(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m_2^2 + i\epsilon)((p_3 - \kappa)^2 - m_3^2 + i\epsilon)} \right\} \end{aligned}$$

$$M_2 = \int d^4 p_1 g_B^* g_A \left\{ \frac{Z_1 m_2 - Z_2 m_1}{m_B} \times \right. \quad (48)$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{F_A(\vec{q}_A) \cdot \frac{\partial F_B(\vec{q}_B)}{\partial \vec{q}_B} \cdot \vec{\epsilon} \cdot M_{xy}}{(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)((p_2 + \kappa)^2 - m_2^2 + i\epsilon)(p_3^2 - m_3^2 + i\epsilon)} + \\ &+ \frac{Z_1 m_3 - Z_3 m_1}{m_A} \cdot \frac{F_B^*(\vec{q}_B) \cdot \frac{\partial F_A(\vec{q}_A)}{\partial \vec{q}_A} \cdot \vec{\epsilon} \cdot M_{xy}}{(p_1^2 - m_1^2 + i\epsilon)(p_2^2 - m_2^2 + i\epsilon)((p_3 - \kappa)^2 - m_3^2 + i\epsilon)} \end{aligned}$$

$$P_2 = P_B - P_1, \quad P_3 = P_A - P_1 \quad (49)$$

$$g_B^* \equiv g_B^*(P_B^2, P_1^2, P_2^2); \quad g_A \equiv g_A(P_A^2, P_1^2, P_3^2)$$

Здесь M_1 соответствует зарядовому излучению реальных и виртуальных частиц, причем первый, второй и третий члены в фигурных скобках описывают тормозное излучение соответственно при рассеянии $3 + x - 2 + y$, слиянии $I + 2 - B$ и распаде $A - I + 3$. Матричный элемент M_2 описывает вклад контактного излучения из вершин $I + 2 - B$ и $A - I + 3$. Остальные обозначения в формулах /48/-/49/ следующие:

$$\vec{q}_A = m_1 \left(\frac{\vec{P}_A}{m_A} - \frac{\vec{P}_1}{m_1} \right) \quad \text{и} \quad \vec{q}_B = m_1 \left(\frac{\vec{P}_B}{m_B} - \frac{\vec{P}_1}{m_1} \right)$$

есть относительные импульсы пар частиц $I, 3$ и $I, 2$ соответственно. Амплитуды $g_A F_A(\vec{q}_A)$ и $g_B^* F_B(\vec{q}_B)$ описывают переходы $A - I + 3$ и $I + 2 - B$ и определяются в соответствии с формулой (30) § I этой главы. В формулах /47/-/49/ для упрощения записи опущены также спиновые индексы и индексы орбитальных моментов. Например, запись выражения /48/

$$M_1 = \int d^4 p_1 g_B^* F_B^*(\vec{q}_B) g_A F_A(\vec{q}_A) M_{xy} \{ \dots \}$$

с учетом всех индексов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle J_y K_y, J_B K_B | M_1 | J_x K_x, J_A K_A \rangle = \sum_{K_1 K_2 K_3} \int d^4 p_1 \times \\ & \times \sum_{e_1 s_1 e_2 s_2} g_{e_1 s_1}^{(B)*} g_{e_2 s_2}^{(A)} \langle J_B K_B | F_{e_1 s_1}^{(B)*}(\vec{q}_B) | J_1 K_1, J_2 K_2 \rangle \times \\ & \times \langle J_1 K_1, J_3 K_3 | F_{e_2 s_2}^{(A)}(\vec{q}_A) | J_A K_A \rangle \langle J_y K_y, J_2 K_2 | M_{xy} | J_1 K_1, J_x K_x \rangle \\ & \times \{ \dots \} \end{aligned}$$

Матричные элементы от M_{xy} определим так:

$$\begin{aligned} & \langle J_y K_y, J_2 K_2 | M_{xy} | J_1 K_1, J_x K_x \rangle = \\ & = \sum_{S_3 M_3} g_{S_3}^{(xy)} \frac{1}{\sqrt{2J_2+1}} C_{S_x M_x, S_y M_y}^{S_3 M_3} C_{S_3 M_3, J_3 K_3}^{J_2 K_2} \end{aligned} \quad (50)$$

Остановимся теперь на вычислении интегралов в формулах /48/-/49/. В качестве примера рассмотрим интеграл:

$$I = M_{xy} \int \frac{d^4 p_1 g_B^* F_B^*(\vec{q}_B) g_A F_A(\vec{q}_A)}{(p_1^2 - m_1^2 + i\varepsilon)(p_2^2 - m_2^2 + i\varepsilon)(p_3^2 - m_3^2 + i\varepsilon)} \quad (51)$$

где $P_2 = P_B - P_1$, $P_3 = P_A - P_1$

Интегрируя по dP_{10} и учитывая, что в нерелятивистском случае основной вклад дает полюс по P_{10} , соответствующий положительной энергии $P_{10} = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} = m_1 + \vec{p}_1^2/2m_1$ получаем

$$I_0 = \frac{i\pi m_1}{m_A m_B} M_{xy} \int \frac{g_B^*(\vec{q}_B^2) F_B^*(\vec{q}_B) g_A(\vec{q}_A^2) F_A(\vec{q}_A)}{(\vec{q}_B^2 + \mathcal{E}_B^2 - i\varepsilon)(\vec{q}_A^2 + \mathcal{E}_A^2 - i\varepsilon)} d^3 p_1 \quad (52)$$

где $\mathcal{E}_B^2 = 2m_{12}\mathcal{E}_B$, $\mathcal{E}_A^2 = 2m_{13}\mathcal{E}_A$. Переходя в координатное пространство, имеем

$$I_0 = \frac{i\pi m_1}{m_A m_B} M_{xy} \int \Psi_B^*(\vec{z}) \Psi_A(\vec{z}) e^{-i\vec{q}_{BA}\vec{z}} d^3 z \quad (53)$$

где $\Psi_B^*(\vec{z})$ и $\Psi_A(\vec{z})$ - волновые функции пар частиц I-2 и I-3 соответственно. Обозначения такие, что

$$\langle J_1 K_1, J_3 K_3 | \Psi_A(\vec{z}) | J_A K_A \rangle =$$

$$= \sqrt{4\pi} \sum_{\ell_2 S_2 M_2 m_2} i^{\ell_2} R_{\ell_2}^{(A)}(z) C_{J_1 K_1, J_3 K_3}^{S_2 M_2} C_{S_2 M_2, J_2 m_2}^{J_A K_A} Y_{\ell_2 m_2}(\vec{n}) \quad (54)$$

где $R_{\ell_2}^{(A)}(z)$ - радиальная часть волновой функции частиц I-3.

После интегрирования по угловым переменным выражение (53) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 & \langle J_y K_y, J_B K_B | I_0 | J_x K_x, J_A K_A \rangle = \sum_{\ell_1, \ell_2} \sum_{L} \sum_{K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, m_1, m_2} \\
 & \times \langle J_y K_y, J_2 K_2 | M_{xy} | J_1 K_1, J_x K_x \rangle C_{J_1, K_1, J_2, K_2}^{S_1, M_1} C_{S_1, M_1, \ell_1, m_1}^{J_B K_B} \\
 & \times C_{S_2, M_2, \ell_2, m_2}^{J_A K_A} \left\{ \frac{(2\ell_2+1)(2L+1)}{4\pi(2\ell_1+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} C_{\ell_2, 0, L, 0}^{\ell_1, 0} C_{\ell_2, m_2, L, m}^{\ell_1, m_1} \times (55) \\
 & \times Y_{Lm}^*(\vec{n}_{BA}) \cdot i^{\ell_1 + \ell_2 + L} (-1)^{\ell_1} \int R_{\ell_2}^{(A)}(z) R_{\ell_2}^{(B)}(z) j_L(q_{BA} z) \times \\
 & \times z^2 dz; \quad \vec{n}_{BA} = \frac{\vec{q}_{BA}}{q_{BA}}
 \end{aligned}$$

Вычисление интеграла от радиальных функций затруднено тем обстоятельством, что мы не знаем волновых функций частиц внутри ядра. При рассмотрении реакции срыва и подхвата предполагается, что радиальная волновая функция внутри ядра обращается в нуль ¹⁹.

Остановимся на анализе особенностей интеграла I_0 по q_{BA} . Очевидно, что особенность интеграла I_0 по q_{BA} возникает тогда, когда интеграл расходится на верхнем пределе (в области малых z интеграл I_0 сходится при любом фиксированном значении q_{BA}). При этом

$$R_{\ell_2}^{(A)}(z) R_{\ell_2}^{(B)}(z) j_L(q_{BA} z) \sim \frac{e^{-(\chi_A - \chi_B \pm iq_{BA})z}}{z^3}$$

и при $q_{BA} = \pm i(\chi_A + \chi_B)$ интеграл расходится логарифмически. Для того, чтобы оценить особую часть интеграла, вычислим главный асимптотический член в радиальной волновой функции

$$\begin{aligned}
 R_{\ell_i}^{(i)}(z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty q_i^2 dq_i j_{\ell_i}(q_i z) \cdot \frac{(q_i R_i)^{\ell_i}}{q_i^2 + \chi_i^2} g(q_i^2) = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty q_i^2 dq_i [h_{\ell_i}^{(1)}(q_i z) + h_{\ell_i}^{(2)}(q_i z)] \cdot \frac{(q_i R_i)^{\ell_i}}{q_i^2 + \chi_i^2} g(q_i^2)
 \end{aligned} \quad (56)$$

Главный асимптотический член в $R_{\ell_i}^{(i)}(\zeta)$ соответствует полюсам по q_i , лежащим в точках $q_i = \pm i \chi_i$, т.е.

$$R_{\ell_i}^{(i)} \underset{\zeta \rightarrow \infty}{\longrightarrow} (i \chi_i R_i)^{\ell_i+1} [h_{\ell_i}^{(1)}(i \chi_i \zeta) - (-1)^{\ell_i} h_{\ell_i}^{(2)}(-i \chi_i \zeta)] \\ (g(-\chi_i^2) = 1)$$

Используя асимптотические выражения для радиальных волновых функций, можно получить такое представление для I_0 .

$$I_0 \sim \sum_{n=0}^{\ell_1 + \ell_2 + L} (\chi_A R_A)^{\ell_2} (\chi_B R_B)^{\ell_1} [l_n^{(1)}(\chi_A, \chi_B) (-i q_{VA} - \chi_A - \chi_B)^n \\ \times l_n(-i q_{VA} - \chi_A - \chi_B) + l_n^{(2)}(\chi_A, \chi_B) (i q_{VA} - \chi_A - \chi_B)^n \\ \times l_n(i q_{VA} - \chi_A - \chi_B)]. \quad (57)$$

Если в сумме (57) оставить только член с $n = 0$, который не зануляется в точке особенности, то для I_0 получается такое представление

$$I_0 = \frac{\pi^3}{m_A m_B} F_B^*(i \chi_B \vec{n}_{VA}) F(i \chi_A, -\vec{n}_{VA}) M_{kj} \sqrt{\frac{m_1 m_A}{2 m_3 E_A}} \times (58) \\ \times f(1, \xi, \lambda)$$

где f амплитуда, соответствующая треугольной диаграмме с постоянными вершинами 18,22

$$f(1+\beta, \xi, \lambda) = \frac{i}{\sqrt{-\lambda}} \ell_n \frac{\sqrt{1+\beta} + \sqrt{-\xi} + \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{1+\beta} + \sqrt{-\xi} - \sqrt{-\lambda}} \quad (59)$$

$$\xi = -m_{12} \epsilon_B / (m_{13} \epsilon_A); \quad \lambda = m_A q_{VA}^2 / (2 m_3 m_1 \epsilon_A)$$

причем ветви корней под логарифмом выбраны таким образом, что при $\xi > 0$ и $\lambda > 0$; $\sqrt{-\xi} = -i \sqrt{\xi}$; $\sqrt{-\lambda} = -i \sqrt{\lambda}$

Выражение (58) для особой части I_0 было получено в работе 16 другим, более формальным путем. Действительно, если вкладом особенностей формфакторов пренебречь (как это сде-

лано при переходе от (52) к (53), то детальные характеристики формфакторов становятся несущественными и они нужны только для сходимости интеграла. При этом в интеграле I_0 можно ввести формальное экспоненциальное образование по p_1^2 и затем провести выкладки, которые приведены в работе¹⁶ (формулы II.2 - II.4).

Следует отметить, что ограничиваться лишь главной особой частью интеграла I_0 при $\ell_1, \ell_2 \neq 0$ в задаче рассеяния без излучения γ -кванта, вообще говоря, нехорошо, так как быстрая зависимость интеграла по q_{VA} определяется не только влиянием особенности интеграла, но и его пороговым поведением по q_{VA} так как при $q_{VA} \rightarrow 0, I_0 \rightarrow q_{VA}^{|\ell_1 - \ell_2|}$. Поэтому в этом случае разумнее учитывать все члены в сумме типа (57). Кроме того, при необходимости учета особенностей формакторов, формфакторы $g(q_i)$ можно, например, параметризовать таким образом

$$g_i(\gamma_i^2) = \left(\frac{C_i^2 - \omega_i^2}{C_i^2 + q_i^2} \right)^{\ell_i} \quad (60)$$

Такой вид формфактора имеет правильную асимптотику по q , которая связана с поведением координатной волновой функции при малых q .

В нашем случае рассеяния с излучением γ -кванта, когда особенности, как мы увидим в дальнейшем попадают в физическую область, мы для грубой качественной оценки тем не менее воспользуемся описанной процедурой вычисления интегралов и оставим во всех интегралах только главные особые части. При этом для матричного элемента M_γ^Δ получим следующее выражение (в с.д.и.):

$$\langle J_y K_y, J_B K_B | M_{\tilde{y}}^\Delta | J_A K_A, J_x K_x \rangle = \frac{i}{\omega} C_\Delta \cdot 4\pi \cdot$$

$$\begin{aligned} & \sum_{S_1, \ell_1, S_2, \ell_2, S_3} (i\varepsilon_A R_A)^{\ell_2} (i\varepsilon_B R_B)^{\ell_1} \sum_{M_1, m_1} C_{J_1, K_1, J_2, K_2}^{S_1, M_1} C_{S_1, M_1, \ell_1, m_1}^{J_B K_B} \times \\ & \times \sum_{M_2, m_2} C_{J_B K_B, J_1, K_1}^{S_2, M_2} C_{S_2, M_2, \ell_2, m_2}^{J_A K_A} \sum_{M_3} \frac{1}{\sqrt{2J_3+1}} C_{S_3, M_3, S_3, M_3}^{S_3, M_3} \times \\ & \times C_{S_3, M_3, J_3, K_3}^{J_2, K_2} \{(a \vec{n}_A \cdot \vec{E} + C_{e_1 e_2} \vec{n}_{BA} \cdot \vec{E}) Y_{\ell_2 m_2}^* (\vec{n}_{BA}) Y_{\ell_2 m_2} (-\vec{n}_{BA}) \\ & - i b_{\ell_2} \sum_{\lambda_2 n_2} C_{e_1 n_1, \lambda_2}^{\ell_1 m_1} Y_{e_1 n_1}^* (\vec{n}_{BA}) Y_{e_2 m_2} (-\vec{n}_{BA}) [\vec{n}_{BA} \cdot \vec{e}_{\lambda_2}^*] \cdot \vec{E} + \\ & + i b_{\ell_2} \sum_{\lambda_2 n_2} C_{\ell_2 n_2, \lambda_2}^{\ell_2 m_2} Y_{\ell_2 n_2}^* (-\vec{n}_{BA}) Y_{\ell_2 m_2}^* (\vec{n}_{BA}) \times \\ & \times [\vec{n}_{BA} \vec{e}_{\lambda_2}] \vec{E}\}, \end{aligned} \quad (6I)$$

где $C_\Delta = i \frac{m_1 m_2 m_3}{2\pi m_A m_B}$, $\vec{n}_A = \vec{P}_A / P_A$; $\vec{n}_B = \vec{P}_B / P_B$.

Функции a , $C_{e_1 e_2}$, b_{ℓ_1} и b_{ℓ_2} , входящие в формулу (6I) даются такими выражениями

$$a = (Z_x - Z_y \cdot \frac{m_x}{m_y}) \left(\frac{m_1^2 E}{m_{xA} m_{x3} \epsilon_A} \right)^{1/2} f(1, \xi, \lambda) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} C_{e_1 e_2} &= (Z_B - Z_y \cdot \frac{m_B}{m_y}) \sqrt{2} \cdot f(1, \xi, \lambda) + (Z_1 - Z_2 \frac{m_1}{m_2}) \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{\xi \gamma}{\xi} \right)^{\ell_1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\xi \gamma + \frac{\ell_1 m_{12} \omega}{2 m_{13} \epsilon_A} \right) f(1, \xi \gamma, \lambda) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\xi} f(1, \xi, \lambda) \right\} - i (Z_1 - Z_2 \frac{m_1}{m_3}) \left\{ \left(1 + \frac{\omega}{\epsilon_A} \right)^{(\ell_2-1)/2} \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + \frac{\omega}{\epsilon_A} - \frac{\ell_2 \omega}{2 \epsilon_A} \right) f(1 + \frac{\omega}{\epsilon_A}, \xi, \lambda) - f(1, \xi, \lambda) \right\} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} b_{\ell_1} = & - \left(Z_1 - Z_2 \frac{m_1}{m_2} \right) \cdot \frac{m_{12}\omega}{2m_{13}\varepsilon_A} \cdot \sqrt{\ell_1(\ell_1+1)} \xi_y^{(\ell_1-1)/2} \xi^{-\ell_1/2} \times \\ & \times f(1, \xi_y, \lambda); \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} b_{\ell_2} = & i \left(Z_1 - Z_3 \frac{m_1}{m_3} \right) \frac{\omega}{2\varepsilon_A} \cdot \sqrt{\ell_2(\ell_2+1)} \left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon_A} \right)^{(\ell_2-1)/2} \times \\ & \times f\left(1 + \frac{\omega}{\varepsilon_A}, \xi, \lambda\right). \end{aligned} \quad (65)$$

где $\xi_y = \frac{m_{12}}{m_{13}} \cdot \frac{\omega - \varepsilon_B}{\varepsilon_A}$, а базразмерная величина λ так выражается через квадрат переданного импульса и энергию γ -кванта

$$\lambda = - \frac{t + 2(m_x - m_y)(Q - \omega)}{2m_2 m_3 \varepsilon_A} - m_{12} = - \frac{m_1}{2m_3 m_B \varepsilon_A} t_{BA};$$

$$t_{BA} = (P_B - P_A)^2 - (m_B - m_A)^2$$

Запишем также выражение для скалярного произведения единичных векторов \vec{n}_{BA} и \vec{n}_B , которое может войти при возведении матричного элемента M_j^Δ в квадрат

$$\vec{n}_{BA} \cdot \vec{n}_A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{m_x m_y}{(m_x + m_A)m_3}} \left(\sqrt{\frac{m_A}{m_y} \cdot \frac{Q + E - \omega}{\varepsilon_A}} \cos \theta - \frac{m_x E}{m_y \varepsilon_A} \right);$$

$$Q = m_A + m_x - m_B - m_y$$

Остальные кинематические связи выписаны в § 2 этой главы.

Возводя матричный элемент (61) в квадрат, усредняя по поляризациям начальных и суммируя по поляризациям конечных частиц, получаем после интегрирования по направлениям вылета γ -кванта следующее выражение для дважды дифференциального сечения в с.д.и.

$$\frac{d\sigma_j^\Delta}{d\Omega d\omega} = \alpha \frac{m_{xA} m_{yB}}{6\pi^3} \cdot \frac{P_y}{P_x} \cdot \omega \cdot \overline{|M_j^\Delta|^2} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
 \overline{|M_J^\Delta|^2} = & \frac{1}{\omega^2} |C_\Delta|^2 \sum_{j, l_1, l'_1, l_2, l'_2} \sum_{S_1, S'_1, S_2, S'_2, S_3} (-1)^{j + J_A + J_B - S_1 - S'_1} \times \\
 & \times W(S_3, S_1, J_1; J_2, S_2) W(S_3, S'_3, S'_1, J_1; J_2, S'_2) \times \\
 & \times W(S_2, l_2, S'_2, l'_2; J_A, j) W(S_1, l_1, S'_1, l'_1; J_B, j) W(j, S_2, S'_3, S'_2, S'_1) \times \\
 & \times A(l_1, l'_1, j) A(l_2, l'_2, j) (\alpha_B R_B)^{l_1 + l'_1} (\alpha_A R_A)^{l_2 + l'_2} \quad (67) \\
 & \times |g_{S_3}^{(xy)}|^2 \left\{ |a|^2 + C_{l_1, l_2} C_{l'_1, l'_2}^* + (a^* C_{l_1, l_2} + a C_{l'_1, l'_2}^*) \times \right. \\
 & \times \vec{n}_{BA} \cdot \vec{n}_A + [l_1(l_1+1) l'_1(l'_1+1)(2l_1+1)(2l'_1+1)]^{1/2} (-1)^{l_1 + l'_1 - j} \times \\
 & \times W(l_1, l'_1, l'_1, l'_1; 1j) b_{l_1} b_{l'_1}^* + [l_2(l_2+1) l'_2(l'_2+1)(2l_2+1)(2l'_2+1)]^{1/2} \times \\
 & \left. \times (-1)^{l_2 + l'_2 - j} W(l_2, l'_2, l'_2, l'_2; 1j) b_{l_2} b_{l'_2}^* \right\}
 \end{aligned}$$

где символом W обозначены коэффициенты Рака,

$$A(l, l', j) = [(2l+1)(2l'+1)]^{1/2} C_{l, l'}^{j, 0}$$

Рассмотрим характерные особенности спектра J -квантов при фиксированном значении λ , которые следуют из выражений (66) и (67). Части матричного элемента (61), описывающие тормозное излучение при распаде $A \rightarrow I \pm 3$, слиянии $I + 2 \rightarrow B$ и рассеянии $3 + x \rightarrow 2 + y$ пропорциональны соответственно функциям $f(1 + \frac{\omega}{E_A}, \xi, \lambda)$, $f(1, \xi_J, \lambda)$ и $f(1, \xi, \lambda)$. При фиксированном λ (что соответствует фиксированному значению t_{BA} , т.е. квадрата переданного импульса от частицы A к частице B) функция $f(1, \xi, \lambda)$ не зависит от ω , а функции $f(1 + \frac{\omega}{E_A}, \xi, \lambda)$ и $f(1, \xi_J, \lambda)$ имеют по ω каждая две особенности — логарифмическую и корневую. Особенности $f(1 + \frac{\omega}{E_A}, \xi, \lambda)$ лежат в полуплоскости $Re\omega < 0$ и поэтому

слабо проявляются в физической области при $\omega > 0$.

Наоборот, особенности $f(1, \xi_j, \lambda)$ могут существенным образом проявиться в спектре γ -квантов¹⁵. Положение логарифмической особенности при фиксированном λ определяется равенством

$$\omega_\Delta = \epsilon_A \frac{m_{13}}{m_{12}} (\lambda - \xi_j + 2i\sqrt{\lambda}) \quad (68)$$

При этом $\omega = \operatorname{Re} \omega_\Delta$ попадает в физическую область и, следовательно, в спектре γ -квантов при $\omega = \operatorname{Re} \omega_\Delta$ должен наблюдаться экстремум. Однако, поскольку минимая часть ω_Δ все же относительно велика, то этот экстремум размазывается практически по всей области спектра. Тем не менее, в области $\omega \neq \epsilon_B$ вклад этого экстремума становится существенным и, в зависимости от разностей фаз функций $f(1, \xi_j, \lambda), f(1, \xi, \lambda)$, $f(1 + \frac{\omega}{\epsilon_A}, \xi, \lambda)$, а также фазы неучтенного здесь фона, в спектре γ -квантов образуется либо максимум либо минимум.

При $\omega = \epsilon_B$ в спектре γ -квантов будет наблюдаться "касп" соответствующий корневой особенности амплитуды $\sqrt{\xi_j} = \sqrt{\omega - \epsilon_B}$, которая описывает тормозное излучение при слиянии I + 2 \rightarrow B. Положение "каспа" определяется массами частиц I, 2 и B и не зависит от λ . "Касп" проявляется как нерегулярность в спектре, имеющая вид пика, заостренного вверх или вниз, или скачка интенсивности.

На рис.7 приведен примерный вид спектра γ -квантов в случае треугольного механизма для упругих реакций A/x, x/A. При $\omega = \epsilon_B$ наблюдается отчетливый пик, соответствующий корневой особенности радиационной амплитуды. При $\omega > \epsilon_B$ за счет деструктивной интерференции вклада членов, пропорциональных $f(1; \xi_j; \lambda)$ с остальной частью матричного элемента наблюдается резкое падение интенсивности. Если бы "касп" осуществля-

лялся либо в форме пика, заостренного вниз, либо в форме точки перегиба, то в этой области наблюдался бы максимум спектра, соответствующий логарифмической особенности.

Из выражений (63) - (64) следует, что минимальная степень $\sqrt{\xi_j} \sim \sqrt{\omega - \varepsilon_B}$ в матричном элементе (61) равна 2, если относительный орбитальный момент частиц 1 и 2 равен нулю, и ℓ_1 , если $\ell_1 \geq 1$. Такое переговое амплитуды по $\sqrt{\omega - \varepsilon_B}$ при $\ell_1 \geq 1$ связано исключительно с наличием контактных членов. Отсюда следует, что наилучшие условия для наблюдения "каспа" осуществляются при $\ell_1 = 1$. Только в этом случае производная $\partial |M_j^\Delta|^2 / \partial \omega$ может обратиться при $\omega = \varepsilon_B$ в бесконечность. При $\ell_1 = 0$ и $\ell_1 \geq 2$ в бесконечность могут обратиться лишь производные более высокого порядка, и поэтому нерегулярность в спектре будет более слабая. Отметим в этой связи, что сдержавшиеся в работах /16-17/ утверждения о возможности обращения в бесконечность $\partial |M_j^\Delta|^2 / \partial \omega$ при $\ell_1 = 0$ и 2 являются неправильными (см. /42/).

Отмеченные здесь качественные особенности спектра -квантов имеют общий характер и не зависят от предположений, сделанных при вычислении интегралов. Однако при детальном сравнении с экспериментом нужны, разумеется, более аккуратные вычисления, как это уже отмечалось выше. Фоновые члены, связанные с теми диаграммами, которые наряду с треугольной диаграммой дают вклад в амплитуду основного процесса, также не могут существенным образом изменить характер особенностей спектра фотонов, так как такие члены медленно меняются в рассмотренной кинематической области.

Таким образом, рассмотрение проведенное в этой главе, показывает, что спектр тормозного излучения в прямых ядерных

реакциях может служить важным источником информации о механизме реакции, поскольку форма спектра фотонов существенным образом зависит от динамики процесса.

III. Радиационные поправки к β -распаду.

§ I. Проблема расходимостей.

Радиационные поправки к β -распаду нейтрона и ядер интересны с трех точек зрения. Во-первых, знание их необходимо для проверки принципа универсальности слабых взаимодействий, который проявляется в равенстве векторных констант β -распада и M -распада. Во-вторых, эти поправки интересны с экспериментальной точки зрения, так как они изменяют форму электронного спектра. И, наконец, в-третьих, эти поправки интересны еще тем, что при вычислении их для β -распада точечного нуклона в четырехфермионной $V-A$ теории соответствующие интегралы логарифмически расходятся на верхнем пределе, в то время как радиационные поправки к M -распаду конечны (см. работы 23-26).

Проблема ультрафиолетовых расходимостей в радиационных поправках к β -распаду интенсивно обсуждалась в литературе. В работах 26, 28 и 29 было предположено, что учет сильных взаимодействий сделает радиационные поправки конечными, так как при этом в вершинах, где f -квант взаимодействует с адронами появляются образующие формфакторы. Некоторые сомнения в таких надеждах вызвали работы Биркена³⁰ и Аберса, Нортонса и Дикуса³¹. В этих работах с помощью алгебры токов было показано, что часть электромагнитных поправок к векторной константе, которая возникает от вклада векторного тока, содержит расходящуюся (логарифмически) часть, не зависящую от сильных

взаимодействий. То есть в этом случае полный учет сильных взаимодействий не приводит к появлению обрезающих формфакторов в вершинах. Однако, в работах ³²⁻³³ было показано, что вклад аксиального тока может компенсировать расходящуюся часть в векторной константе, если $G_V = G_A$.

Следует подчеркнуть, что все эти проблемы с расходимостью имеют место только в четырехфермионной локальной теории. Если слабые взаимодействия осуществляются путем обмена промежуточным векторным мезоном ³⁴, то выражения для радиационных поправок становятся конечными. При этом численно ответ ³⁵ получается близким к результату, который получается в четырехфермионной теории, если параметр обрезания положить равным массе нуклона (как это и делалось в работах ²³⁻²⁷).

Более подробно мы проблему расходимостей обсуждать не будем, оставаясь на той точке зрения, что обрезание соответствующих интегралов тем или иным способом осуществляется (иначе вероятность наблюдаемых распадов была бы бесконечной) и сконцентрируем свое внимание на вычислении радиационных поправок и анализе из предполагаемой точности. При этом вычисления мы будем проводить в четырехфермионной локальной теории и будем предполагать, как это обычно делается, что расходящиеся интегралы обрезаются на импульсах равным по порядку величины массе нуклона.

На рис.8 изображены диаграммы Фейнмана, соответствующие радиационным поправкам к β -распаду нейтрона. В работах ²³⁻²⁷ вычислялись только вклады диаграмм I-5. Вклад диаграмм 6-8 разумеется не может быть вычислен точно, из-за необходимости точного учета сильных взаимодействий. Тем не менее существует мнение среди многих физиков-теоретиков, что вклад диаграмм

I-5 не только дает оценку по порядку величины для радиационных поправок, но имеет численную точность равную примерно 20%. Это мнение опирается на тот факт, что вклад полосных диаграмм I-3 содержит большой численный коэффициент $\ell_n \frac{m_p}{m} \sim 7$, в то время как вклад диаграмм 6-8 такого множителя не содержит. Появление логарифмического множителя в матричных элементах диаграмм I-3 связано с инфракрасной расходимостью этих диаграмм. Матричные элементы для диаграмм 6-8 не содержат инфракрасной расходимости, так как соответствующие подинтегральные выражения конечны при малых импульсах виртуального фотона в силу градиентной инвариантности (матричный элемент для испускания мягкого γ -кванта изнутри пропорционален импульсу фотона, см. главу I).

Интересный результат получен в работе Сирлина³⁶. Оказывается, что форма спектра электронов в β -распаде с учетом радиационных поправок определяется полосными диаграммами I-5 и диаграммой основного распада и, следовательно, не зависит от деталей сильных взаимодействий. Точность этого утверждения $\sim \alpha^2/m_p, \alpha^E \ell_n \frac{m_p}{E}, \alpha^U/c$, где q - суммарный импульс лептонов, E - энергия электрона. Этот результат опять же непосредственно связан с различным поведением диаграмм I-5 и 6-8 в области малых импульсов виртуального γ -кванта. Прежде чем перейти к вычислению радиационных поправок мы, следуя результатам работы 36 докажем, что вклад диаграмм 6-8 рис.8 с точностью до членов порядка $\alpha^2/m_p, \alpha^E \ell_n \frac{m_p}{E}, \alpha^U/c$ не изменяет форму электронного спектра.

§ 2. Общие свойства радиационных поправок, не зависящие от модели.

Матричный элемент, соответствующий β -распаду нейтрона

без учета радиационных поправок запишем в виде

$$M_0 = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{U}_P \gamma_\lambda (1 + \rho \gamma_5) U_n \bar{U}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_V , \quad (69)$$

где $\rho = G_A/G_V$ и проанализируем свойства диаграмм I-3 и 6-8. Матричный элемент, описывающий вклад совокупности диаграмм I и 7, можно записать в таком виде

$$M_1 = -i \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k D_{\mu\nu}(k) \bar{U}_e \gamma_V \frac{\hat{\ell} - \hat{k} - m}{-2\ell \cdot k + k^2 + i\varepsilon} \gamma_\lambda \times \\ \times (1 + \gamma_5) U_V \bar{U}_P \left[\frac{2P_{2\mu} + \kappa_\mu}{2P_2 \cdot k + \kappa^2 + i\varepsilon} \gamma_\lambda (1 + \rho \gamma_5) + \right. \\ \left. + T_{\mu\lambda}(P_2, P_1, k) \right] U_n . \quad (70)$$

Здесь мы явно выделили старший член разложения по k , соответствующий зарядовому излучению протона, а члены соответствующие магнитному излучению протона и излучению изнутри включили в $T_{\mu\lambda}(P_2, P_1, k)$. Обозначения следующие: P_P , P_a и ℓ - 4-импульсы нейтрона, протона и электрона соответственно, m - масса электрона, $D_{\mu\nu}(k) = \frac{\delta_{\mu\nu} - \kappa_\mu \kappa_\nu / k^2}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}$. Тензор $T_{\mu\lambda}$ является градиентно-инвариантной величиной $\kappa_\mu T_{\mu\lambda} = 0$ и его можно представить в таком виде

$$T_{\mu\lambda}(P_2, P_1, k) = \frac{R_{\mu\lambda}^{(P)}(P_2, P_1, k)}{2P_2 \cdot k + k^2 + i\varepsilon} + \frac{R_{\mu\lambda}^{(n)}(P_2, P_1, k)}{-2P_1 \cdot k + k^2 + i\varepsilon} + G_{\mu\lambda}(P_2, P_1, k) \quad (71)$$

где $R_{\mu\lambda}^{(P)}$ и $R_{\mu\lambda}^{(n)}$ описывают вклады магнитных моментов протона и нейтрона и являются линейными по k . Член $G_{\mu\lambda}$ описывает излучение изнутри адронной вершины и также линеен по k . Учитывая сказанное эти величины можно представить таким образом

$$R_{\mu\lambda}^{(P)} = \kappa_\alpha S_{\alpha\mu\lambda}^{(a)}(P_2, P_1) + \kappa_\alpha \kappa_\beta S_{\alpha\beta\mu\lambda}^{(b)}(P_2, P_1, k)$$

$$G_{\mu\lambda} = \kappa_\alpha G_{\alpha\mu\lambda}(P_2, P_1, k)$$

где $S_{\mu\nu\lambda}^{(8)}$ и $\delta_{\mu\nu\lambda}$ конечны при $k=0$.

Рассмотрим теперь, к чему приводит вычисление интеграла от $T_{\mu\lambda}$:

$$I = i \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\bar{u}_e (2\ell_\mu - \gamma_\mu \hat{k}) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu \bar{u}_p T_{\mu\lambda}(p_2, p_1, k) u_n}{(k^2 + i\varepsilon) (k^2 - 2\ell \cdot k + i\varepsilon)}$$

Сначала проанализируем вклад члена $\gamma_\mu \hat{k}$ в лептонной скобке.

Если использовать тождество

$$\frac{1}{k^2 - 2\ell \cdot k + i\varepsilon} = \frac{1}{(k^2 + i\varepsilon)^2} + 2\ell \cdot k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \cdot \frac{1}{(k^2 - 2\ell \cdot k + i\varepsilon)}$$

этую часть интеграла можно представить таким образом

$$I_1 = I_1^{(a)} + I_1^{(b)}$$

$$I_1^{(a)} = -i \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \bar{u}_e \gamma_\mu \gamma_p \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu \int \frac{d^4 k K_p \bar{u}_p T_{\mu\lambda}(p_2, p_1, k) u_n}{(k^2 + i\varepsilon)^2}$$

$$I_1^{(b)} = -i \frac{e}{\sqrt{2}} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \ell_\sigma \bar{u}_e \gamma_\mu \gamma_p \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu \int \frac{d^4 k K_p \bar{u}_p T_{\mu\lambda}(p_2, p_1, k) u_n}{(k^2 + i\varepsilon)^2 (k^2 - 2\ell \cdot k + i\varepsilon)}$$

Оба интеграла сходятся при малых k , так как $T_{\mu\lambda}$ конечно при $k \rightarrow 0$. Для вычисления интеграла $I_1^{(a)}$ выразим γ -матрицы в лептонной скобке таким образом

$$\gamma_\mu \gamma_p \gamma_\lambda = \delta_{\mu p} \gamma_\lambda - \delta_{\mu\lambda} \gamma_p + \delta_{p\lambda} \gamma_\mu - i\varepsilon_{\mu\rho\lambda\sigma} \gamma_\rho \gamma_\sigma$$

и рассмотрим в качестве примера член с $\delta_{p\lambda} \gamma_\mu$

$$\bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu \int \frac{d^4 k K_\lambda \bar{u}_p T_{\mu\lambda}(p_2, p_1, k) u_n}{(k^2 + i\varepsilon)^2}$$

Если пренебречь импульсом лептонов $T_{\mu\lambda}(p_2, p_1, k) = T_{\mu\lambda}(p_4, p_1, k)$ то очевидно, что интеграл от $\bar{u}_p K_\lambda T_{\mu\lambda}(p_1, p_1, k) u_n$ может свестися только к комбинации вектора и аксиала, так как в рассматриваемом приближении h_λ и δ_λ сводятся друг к другу. Подобные

рассуждения можно провести и для всех остальных членов и в результате для $I_1^{(a)}$ получаем

$$I_1^{(a)} = -i \frac{e^2}{\sqrt{2}} \frac{e^2}{(2\pi)^4} \bar{U}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_\nu \bar{U}_p (a \gamma_\lambda + b \gamma_\lambda \gamma_5) U_n.$$

Таким образом, интеграл $I_1^{(a)}$ только изменяет величины векторной и аксиальной констант, что не может повлиять на форму спектра электронов.

И, наконец, остается оценить интеграл $I_1^{(6)}$ и вторую часть в интеграле I , которая пропорциональна импульсу лептона ℓ . Решающим пунктом в этой оценке является тот факт, что эти интегралы сходятся в области малых K . Поэтому в результате вычисления этих интегралов ℓ не может появиться в знаменателе. Максимальное усиление, которое может возникнуть при вычислении этих интегралов, это члены порядка $\ln M/E$. Поэтому члены, связанные с этими интегралами малы и по порядку величины не превосходят $\alpha E/M \ln M/E$ или E/M , где M это масса нуклона, либо масса, характерная для сильных формфакторов.

Вклад диаграмм 6 и 8 описывает электромагнитную перенормировку векторной и аксиальной адронной вершин.

$$V_\lambda = \bar{U}_p [f_1(q^2) \gamma_\lambda + i f_2(q^2) \sigma_{\lambda\nu} q_\nu + f_3(q^2) q_\lambda] U_n,$$

$$A_\lambda = \bar{U}_p [g_1(q^2) \gamma_\lambda + i g_2(q^2) \sigma_{\lambda\nu} q_\nu + g_3(q^2) q_\lambda] \gamma_5 U_n,$$

где q — суммарный импульс лептонов, и в нулевом приближении по q также сводится к изменению векторной и аксиальной констант $f_i(0)$ и $g_i(0)$.

Таким образом, вклад членов, которые зависят от деталей сильного взаимодействия, можно представить в виде

$$M_4 = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \bar{U}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_\nu \bar{U}_p (c \gamma_\lambda + g d \gamma_\lambda \gamma_5) U_n, \quad (72)$$

где $\rho = G_A / G_V$. Мы в дальнейшем будем подразумевать, что в матричный элемент M_4 помимо вкладов диаграмм 6-8, включены также матричные элементы, соответствующие диаграммам I и 3, за вычетом тех членов, которые соответствуют вкладу заряда протона, рассматриваемого как точечная частица.

§ 3. Спектр электронов.

а) Вычисление интегралов в матричном элементе.

Диаграммы 2 и 3 описывают перенормировку волновых функций электрона и протона. Хотя они не изменяют форму спектра, но их учет необходим для того, чтобы выполнялись требования градиентной инвариантности и правильно учитывались ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости. При выборе фотонного пропагатора в калибровке Ландау $D_{M_V}(k) = \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}$ эти диаграммы после перенормировки массы становятся конечными.

Перенормировка волновой функции электрона дается выражением

$$M_2 = i \frac{e^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e^2}{2(2\pi)^4} \bar{U}_p \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_n \times \\ \times \int d^4 k D_{M_V}(k) \frac{\bar{U}_e \gamma_\mu (\hat{k} - \vec{k} + m) \hat{\ell} (\hat{\ell} - \vec{k} + m) \gamma_\nu (\hat{\ell} + m) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_V}{(k^2 - 2e \cdot k + i\varepsilon)^2 2m^2} \quad (73)$$

Преобразуя подинтегральное выражение, получаем

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2m^2} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \bar{U}_e \left[\frac{4m^2(m - \vec{k}) + 2k^2m - 4\ell \cdot k \vec{k}^2}{(k^2 - 2e \cdot k + i\varepsilon)^2} - \frac{m}{k^2} \right] (\hat{\ell} + m) \times \\ \times \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_V = \frac{1}{2m^2} \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \bar{U}_e \left[\frac{4k^2 - m^2 - 8(\ell \cdot k)^2}{(k^2 - 2e \cdot k + i\varepsilon)^2} - \frac{2m^2}{k^2} \right] \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) U_V$$

Вычислив интегралы (формулы для соответствующих интегралов приведены, например, в книге ³⁷), имеем

$$J_2 = -4\pi^2 i \left(\frac{3}{2} \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{9}{8} \right) \bar{u}_e \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_\nu$$

и окончательно

$$M_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{9}{8} \right) M_0 \quad (74)$$

При перенормировке волновой функции протона, как это указывалось в конце § 2, будем учитывать только вклад заряда

$$M_3^{(P)} = i \frac{e^2}{2(2\pi)^4} M_0 \int \frac{d^4 k D_{M\nu}(k) (2p_2 - k)_\mu (2p_2 - k)_\nu}{(k^2 - 2p_2 k + i\varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{m_P}{\lambda} - \frac{3}{4} \right) M_0 \quad (75)$$

И, наконец, вычислим матричный элемент M'_1 , который равен матричному элементу M_1 , определяемому формулой (70), минус член содержащий $T_{M\lambda}$

$$M'_1 = i \frac{G}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\pi^3} \bar{u}_p \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_n \left\{ \int \frac{d^4 k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \left[\frac{1}{k^2} \bar{u}_e \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_\nu + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\bar{u}_e (4p_2 \cdot k + 2k \cdot k - k^2 - 2\hat{p}_2 \cdot \hat{k}) \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_\nu}{(k^2 - 2k \cdot k + i\varepsilon)(k^2 + 2p_2 k + i\varepsilon)} \right] \right\} = \frac{G}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{2\pi} \bar{u}_p \gamma_\lambda x \quad (76)$$

$$x (1+\gamma_5) u_n \left\{ [4p_2 \cdot k J_1 + J_0 + J_0'] \bar{u}_e \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_\nu - J_{2\sigma} \bar{u}_e 2\hat{p}_2 \gamma_5 \gamma_\lambda (1+\gamma_5) u_\nu \right\}$$

Имеющиеся здесь интегралы даются такими выражениями

$$J_0 = \frac{i}{2\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 + 2p_2 k + i\varepsilon)} = - \ln \frac{1}{m_p} + \frac{1}{2}, \quad (77)$$

$$J_0' = - \frac{i}{2\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon) k^2} = \ln \frac{1}{\lambda}, \quad (78)$$

$$J_1 = \frac{i}{2\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - 2k \cdot k + i\varepsilon)(k^2 + 2p_2 k + i\varepsilon)} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{dy}{p_y^2} \ln \frac{p_y^2}{\lambda^2}, \quad (79)$$

$$J_{2\sigma} = \frac{i}{2\pi^2} \int \frac{K_0 d^4 k}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - 2e \cdot k + i\varepsilon)(k^2 + 2p_2 k + i\varepsilon)} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \frac{dy}{p_2^2} P_{y\sigma}, \quad (80)$$

где Λ - верхний предел образования, а $P_{y\sigma} = (1-y)P_{2\sigma} - y e_\sigma$.

Интегралы J_1 и $J_{2\sigma}$ берутся в смысле главного значения, так как мнимая часть диаграммы I рис.8 не дает вклада в вероятность распада в рассматриваемом порядке по α (она не интерферирует с M_0).

При вычислении интегралов J_1 и $J_{2\sigma}$ удобно сделать подстановку $\chi = \theta \operatorname{ctg} \theta + a$, где $a = q P_2 / q^2$, $q^2 b^2 = q^2 a^2 - p_2^2$, $q = p_2 + \ell$. При этом $P_y^2 = (p_2 - q y)^2 = q^2 b^2 / \sin^2 \theta$ и интеграл J_1 с учетом того, что $dy = -\frac{\theta d\theta}{\sin^2 \theta}$, сводится к такому виду ($E \ll m_p$)

$$J_1 = -\frac{1}{4pm_p} \int \theta d\theta \left[-2 \ln |\sin \theta| + \ln \frac{P^2}{\lambda^2} \right],$$

где

$$\int \frac{1}{\Gamma} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\int_{-\rho/2m_p}^{-1} + \int_{-1+i\pi/2}^{1+i\pi/2} + \int_{1+i\pi/2}^{1/2 \ln \frac{E+p}{E-p}} \right], \quad P = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Далее

$$\int \ln |\sin \theta| d\theta = \int \left[-\ln 2 + \theta + \ln(1 - e^{-2\theta}) \right] d\theta =$$

где $f(x) = -\int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1-t)$ так называемая функция Спенса (или дилогарифм Эйлера), которая при малых значениях аргумента x представляется в виде ряда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n / n^2$, причем $f(1) = \pi^2 / 6$, $f(-1) = -\pi^2 / 12$. Эта функция протабулирована в работе Митчела⁸⁸. Если использовать тождество

$$f\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \ln \frac{2\beta}{1+\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) + f(1)$$

то выражение для J_1 можно представить таким образом

$$J_1 = -\frac{1}{4pm_p} \left(\theta^2 + \theta \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) - \frac{\pi^2}{2} \right) \quad (81)$$

где $\Theta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$; $\beta = \frac{P}{E}$.

Вычисляя с помощью аналогичных преобразований интеграл $J_{2\sigma}$ получаем

$$J_{2\sigma} = -\frac{1}{2m_p^2} \left(1 + \ln \frac{m_p}{m}\right) P_{2\sigma} - \frac{1}{2\rho m_p} \Theta e$$
 (82)

Подставляя приведенные значения для интегралов

в формулу (76) получим следующее выражение для M'_1

$$M'_1 = \frac{e}{2\pi} M_0 \left[-\frac{1}{\beta} f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) - \frac{1}{\beta} \Theta^2 + 2\Theta/\beta + \frac{\Theta}{\beta} \ln \frac{m^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{\beta} + \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{2} \right] - \frac{e}{2\pi} \frac{G}{V_2} \frac{\Theta}{\beta} \bar{U}_e \bar{U}_0 \bar{U}_1 (1+\delta_5) U_V \bar{U}_p (1+\rho\delta_5) U_n$$
 (83)

Вероятность распада с учетом радиационных поправок будет определяться выражением

$$dW = \overline{|M_0 + M'_1 + M_2 + M_3^{(P)} + M_4|^2 d\tilde{v}_1} + \overline{|M^{(B)}|^2 d\tilde{v}_2} \quad (84)$$

где $M^{(B)}$ - матричный элемент для тормозного излучения, соответствующий вкладу диаграмм 4-5 рис.8, $d\tilde{v}$ - фазовый объем, черта сверху означает усреднение по спиновым переменным.

Спектр электронов без радиационных поправок, определяющийся матричным элементом M_0 , имеет такой вид (см., например, книгу³⁹):

$$P_0 d\rho = \frac{G^2}{2\pi^3} (1+3\rho^2) (E_m - E)^2 \rho^2 d\rho \quad (85)$$

где E_m - максимальная энергия электрона.

Поскольку матричные элементы M_2 и M_3 пропорциональны M_0 , то их вклад в спектр электронов вычисляется тривиально и сводится к появлению дополнительного множителя перед $P_0 d\rho$.

равного удвоенному значению коэффициента пропорциональности. Часть матричного элемента M_1' (см. формулу (83)), которая пропорциональна M_0 , дает аналогичный вклад в спектр, с той только разницей, что дополнительный множитель перед $P_0 dp$ уже будет функцией энергии электрона. Результативно вторая часть матричного элемента M_1' , которая в лептонной скобке имеет дополнительную матрицу γ_0 , приводит к такому спектру, как если бы с самого начала матрица γ_0 была заменена единичной матрицей, умноженной на m^2/E^2 . И, наконец, интерференция M_4 и M_0 также дает такой же спектр, что и $|M_0|^2$, только при этом множитель $1+3\beta^2$ нужно заменить на $\frac{1}{\pi}(ReC + 3\beta^2 ReM)$.

Учитывая сказанное, выражение для спектра электронов с учетом радиационных поправок можно записать так

$$Pdp = P_0 dp \left[1 + \frac{\frac{1}{\pi} \cdot ReC + 3\beta^2 ReM}{1 + 3\beta^2} + \frac{\alpha}{2\pi} (a + b) \right] \quad (86)$$

где a соответствует вкладу от интерференции матричных элементов M_1 , M_2 и M_3 с M_0

$$\begin{aligned} a = & 3 \ln \frac{m_p}{m} - \frac{11}{4} + 4 \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{2}{\beta} f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) - \\ & - 2 \frac{\theta^2}{\beta} - 4 \frac{\theta}{\beta} \ln \frac{m}{\lambda} + 2\beta\theta + 2 \frac{\pi^2}{\beta} \end{aligned} \quad (87)$$

а b соответствует вкладу тормозного излучения. Ясно, что пренебрегая членами порядка α^2 в выражении (86) множитель $\frac{1}{\pi}(1+3\beta^2)^{-1}(ReC + 3\beta^2 ReM)$ можно вынести за квадратные скобки. Заметим, что a содержит инфракрасную расходимость, и только сумма $a+b$ конечна при $\lambda \rightarrow 0$. Переходим теперь к вычислению величины b .

б) Тормозное излучение.

Матричный элемент для тормозного излучения при β -распаде нейтрона, соответствующий диаграммам 4-5 рис.8, имеет такой вид

$$M^6 = \frac{e}{\sqrt{2}} e^2 \left[-\bar{u}_e \frac{\hat{e}(\hat{e} + \hat{k} + m)}{2e_0 k} \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu + \right. \\ \left. + \frac{P_2 \cdot e}{P_2 \cdot k} \bar{u}_e \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u_\nu \right] \bar{u}_p \gamma_\lambda (1 + \rho \gamma_5) u_n \quad (88)$$

Заметим, что для правильного вычисления вклада тормозного излучения в рассматриваемом случае, мы должны, как это впервые заметил Берман ²⁴, рассматривать фотон как векторный мезон с массой, хотя и бесконечно малой, но отличной от нуля. Причина заключается в том, что предельного перехода от массы неравной нулю к массе равной нулю не существует, а так как виртуальный фотон мы рассматривали как векторный мезон с массой λ , то для самосогласованности и реальный фотон следует рассматривать подобным образом и при вычислении вероятности суммирования проводить по трем состояниям поляризации фотона с массой. И хотя инфракрасная расходимость исчезает и при суммировании по двум поперечным состояниям поляризации, вклад третьей поляризации дает заметный вклад в конечные при $\lambda \rightarrow 0$ члены.

В силу сохранения электромагнитного тока можно выбрать такую колибрюку, в которой скалярные фотоны отсутствуют. При этом формула для суммирования по поляризациям фотона выводится следующим образом

$$\sum_{s=1}^3 \epsilon_\mu^{(s)} \epsilon_\nu^{(s)*} M_{\mu\nu} = (\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / \lambda^2) M_{\mu\nu} = \\ = \delta_{\mu\nu} M_{\mu\nu} = M_{00} - M_{ii} = -(\delta_{ie} - k_i k_e / \omega_e) M_{ie} \quad (89)$$

В такой калибровке вкладом протонного тока можно пренебречь, так как член $\vec{P}_2 \cdot \vec{E}/m_p \omega$ мал по сравнению с вкладом электронного тока, который пропорционален $\vec{e} \cdot \vec{E}/e \cdot \kappa$.

Квадрат матричного элемента $M^{(6)}$, усредненный по поляризациям нейтрона и просуммированный по поляризациям конечных фермионов равен

$$\overline{|M^{(6)}|^2} = \frac{e^2}{2} e^{\mu} L_{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad (90)$$

где $B_{\mu\nu} = 2 \left[(1 + p^2) (P_{\mu} P_{2\nu} + P_{2\mu} P_{2\nu}) - 2 m_p^2 \delta_{\mu\nu} p^2 \right]$,

$$L_{\mu\nu} = \frac{2}{(\kappa \cdot \kappa)^2} \left[4 \ell \cdot \epsilon \cdot \ell \cdot \epsilon^* (\ell_{\nu} \ell_{\mu}' + \ell_{\nu}' \ell_{\mu} - \delta_{\mu\nu} \ell \cdot \ell') - 4 \epsilon \epsilon^* \kappa \cdot \kappa (\ell_{\nu}' \epsilon_{\mu} + \ell_{\mu}' \epsilon_{\nu} - \delta_{\mu\nu} \ell' \epsilon) + (4 \epsilon \cdot \epsilon \cdot \ell \cdot \epsilon^* - 2 \epsilon \cdot \kappa \cdot \epsilon \cdot \epsilon^*) (\ell_{\nu}' \kappa_{\mu} + \ell_{\mu}' \kappa_{\nu} - \delta_{\mu\nu} \ell' \kappa) \right],$$

ℓ' — 4-импульс нейтрона.

Вероятность тормозного излучения

$$\Delta P_f = \overline{|M^{(6)}|^2} \frac{1}{(2\pi)^8 2 m_p} \frac{d^3 \ell}{2E} \frac{d^3 \ell'}{2E_0} \frac{d^3 p_2}{2m_p} \frac{d^3 \kappa}{2\omega} \delta(p_1 - p_2 - \kappa - \ell - \ell')$$

удобно сначала с помощью δ -функции проинтегрировать по импульсу протона, а затем по энергии нейтрона. При этом

$E_{\nu} = E_m - E - \omega$, $E_m = m_n - m_p$, так как кинетической энергией протона можно пренебречь. Интегрируя затем по направлениям вылета нейтрона, вероятность тормозного излучения можно привести к такому виду

$$\Delta P_f = P_0 dP \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3 \kappa}{\omega(E_m - E)^2 E} \sum_{s=1}^3 \left\{ \frac{\ell \cdot \epsilon^{(s)} \cdot \ell \cdot \epsilon^{(s)*}}{(\kappa \cdot \kappa)^2} \times \right. \\ \left. \times (E_m - E - \omega)^2 (E + \omega) - \frac{\epsilon^{(s)} \cdot \epsilon^{(s)*}}{2 \ell \cdot \kappa} (E_m - E - \omega)^2 \omega \right\}. \quad (91)$$

Таким образом для величины β получается следующее выражение

$$\begin{aligned} \beta &= I + \int_{-1}^1 dx \int_0^{\omega_m} \frac{\omega d\omega}{\omega^2} \left\{ \beta^2 \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^2} \left[-\frac{2\omega}{E_m-E} + \frac{\omega^2}{(E_m-E)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega(E_m-E-\omega)^2}{(E_m-E)^2 E} \right] + \frac{\omega}{E(1-\beta x)} \cdot \frac{(E_m-E-\omega)^2 \omega}{(E_m-E)^2 E} \right\} = \quad (92) \\ &= I + 2 \left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2 \right) \left(-\frac{3}{2} + \frac{E_m-E}{3E} \right) + \frac{1}{\beta} \cdot \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{(E_m-E)^2}{12E^2} \end{aligned}$$

При этом интеграл I , содержащий инфракрасную особенность равен

$$I = \beta^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{K_m} \frac{k^2 dk}{\omega} \frac{1-x^2 k^2 / \omega^2}{(\omega - \beta x k)^2} \quad (93)$$

$$\text{где } K_m = \sqrt{\omega_m^2 - \lambda^2}, \quad \omega_m = E_m - E$$

Вычисляя интеграл по x имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{K_m} \frac{k^2 dk}{\omega} \left[-\frac{1-\beta^2}{\omega^2 - \beta^2 k^2} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{i}{\omega k \beta} \ln \frac{\omega + \beta k}{\omega - \beta k} \right] = \\ &= 2 \int_0^{V_m} \frac{v^2 dv}{1-v^2} \left[-\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 v^2} - 1 + \frac{1}{\beta v} \ln \frac{1+\beta v}{1-\beta v} \right] \end{aligned}$$

$$\text{где } V = k/\omega; \quad V_m = K_m/\omega_m$$

Входящие сюда интегралы даются такими выражениями

$$\begin{aligned} \int_0^{V_m} \frac{v^2 dv}{(1-v^2)(1-\beta^2 v^2)} &= \frac{1}{1-\beta^2} \left(\ln \frac{2\omega_m}{\lambda} - \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right); \quad \int_0^{V_m} \frac{v^2 dv}{1-v^2} = \\ &= \ln \frac{2\omega_m}{\lambda} - 1; \quad \int_0^{V_m} \frac{v dv}{1-v^2} \ln \frac{1+\beta v}{1-\beta v} = \frac{1}{2} \int_{-V_m}^{V_m} \frac{v dv}{1-v^2} \ln \frac{1+\beta v}{1-\beta v} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-V_m}^{V_m} dv \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} \right) \ln(1-\beta v) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ln \frac{1+V_m}{1-V_m} - \\ &- \frac{1}{2} f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) + \frac{1}{2} f\left(-\frac{2\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ln \frac{1+V_m}{1-V_m} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} - f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы использовали тождество

$$f\left(-\frac{2\beta}{1-\beta}\right) = -\ln^2 \frac{1+\beta}{1-\beta} + f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right)$$

Используя приведенные формулы для интегралов, получаем

$$\begin{aligned} I &= 2\left(\frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right) \ln \frac{2\omega_m}{\lambda} - \frac{2}{\beta} f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) - \\ &- \frac{1}{\beta} \ln^2 \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + 2. \end{aligned} \quad (94)$$

в) Спектр электронов.

На основе формул (86), (87), (92) и (94) получается следующее выражение для спектра электронов в β -распаде свободного нейтрона с учетом радиационных поправок ³⁶

$$P dP = \xi_n (E_m - E) \cdot \frac{4P^2 dP}{(2\pi)^3} \cdot \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} g \right] \quad (95)$$

где $g = 3 \ln \frac{m_P}{\lambda} - \frac{3}{4} + 4 \left(\frac{\theta}{\beta} - 1 \right) \left[\frac{E_m - E}{3E} - \frac{3}{2} + \ln \frac{2(E_m - E)}{m} \right] -$
 $- \frac{4}{\beta} f\left(\frac{2\beta}{1+\beta}\right) + \frac{\theta}{\beta} \left[2(1+\beta^2) + \frac{(E_m - E)^2}{6E^2} - 4\theta \right]; \theta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta};$
 $\xi_n = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} R_e c \right) |G_V|^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} R_{e\bar{d}} \right) 3 |G_A|^2$

Выражение (95) можно применить к разрешенному β -распаду произвольного ядра, если воспользоваться моделью независимых частиц. При этом множитель ξ_n следует заменить на ξ_N

$$\xi_N = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} R_e c \right) |G_V|^2 |M_F|^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} R_{e\bar{d}} \right) |G_A|^2 |M_{GT}|^2$$

При получении выражения (95) мы вынесли за квадратные скобки член $1 + \frac{\alpha}{\pi} \frac{R_e c}{\beta}$, включив его в квадрат матричного элемента, описывающий распад без поправок. Этот член описывает вклад

статического кулоновского взаимодействия между электроном и протоном в первом порядке теории возмущений. Такое статическое взаимодействие обычно учитывается отдельно с помощью функции Ферми $F(z, E)$, которая в рассматриваемом приближении имеет вид $1 + \frac{z}{2\pi} \frac{z-f}{\beta}$.

§ 4. Численные оценки радиационных поправок и неопределенности.

Форма спектра электронов, как это следует из формулы (95) не зависит от структурных членов в электромагнитных вершинах адронов. Однако на время жизни структурные эффекты оказывают влияние. Запишем выражение для времени жизни при β -распаде с учетом радиационных поправок

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(3 \ln \frac{m_p}{m} + \Delta + \Delta_1 \right) \right] \quad (96)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\int p'_0 dp} \int_0^{E_m} (E_m - E)^2 P(E) dE \left(g(E) - 3 \ln \frac{m_p}{m} \right);$$

$$P'_0 = (E_m - E)^2 P^2; \quad \Delta_1 = 2 \frac{R_e c |M_F|^2 + p^2 R_{ed} |M_{GT}|^2}{|M_F|^2 + p^2 |M_{GT}|^2}$$

Величина Δ описывает вклад, вычисленный в предыдущем параграфе, на основе учета полюсных диаграмм I-5 рис.8 в пренебрежении вкладами магнитных моментов протона и нейтрона. Величина Δ_1 описывает все остальные вклады, в том числе и вклад структурных эффектов. При $m \rightarrow 0$ выражение для Δ после вычисления интеграла по E можно представить в таком виде

$$\Delta = 3 \ln \frac{m}{2E_m} - 5,1 \quad (97)$$

Множитель $3\ln \frac{m_p}{m}$ = 22,5 дает поправку к времени жизни, равную 2,6%. Член $\frac{\Delta}{2\pi} \Delta$ уменьшает это значение примерно на одну треть в зависимости от энерговыделения при β -распаде. В большинстве работ, посвященных радиационным поправкам (за исключением работы /40/), принято считать, что вклад структурных членов не может превысить величины нескольких единиц, умноженных на $\Delta/2\pi = 0,12\%$. Челлен²⁹ проанализировал вклад структурных членов, которые связаны с учетом формфакторов в вершинах полюсных диаграмм и показал, что результат не зависит от вариации формфакторов в широких пределах.

Заметим, что величина Δ конечна и все возможные расходимости включены в константы C и d . Расходимость, например, появилась бы, если бы мы учли вклад магнитных моментов протона или нейтрона, считая при этом протон и нейtron точечными частицами. Так вклад нормального магнитного момента протона имеет такой вид

$$\Delta_1^{(p)} = 6 \ln \frac{\Lambda}{m_p} + \frac{9}{4}$$

и если $\Lambda = m_p$, то $\Delta_1^{(p)} = 2,25$ и эта величина приводит к поправке, примерно равной 0,25%. Если протон и нейтрон не считать, точечными, а учитывать формфакторы, то это приведет к тому, что вместо Λ в выражении для $\Delta_1^{(p)}$ появится некоторая эффективная масса связанная с быстрой убыванием формфактора. Как это следует из экспериментов по ер- рассеянию эта масса примерно равна массе β -мезона. При таком значении Λ величина поправки от $\Delta_1^{(p)}$ еще уменьшается. Вклад от аномальных магнитных моментов протона и нейтрона, как показал Берман²⁴, не превышает 1/8%.

Кратко резюмируя содержание этого параграфа можно сказать, что ситуация с радиационными поправками к β -распаду такова, что хотя гипотеза о том, что полюсные диаграммы I-5 рис.8 определяют их с точностью 0,2 - 0,5% представляется разумной, вопрос о строгих количественных оценках вклада структурных членов остается открытым.

В таблице I приведены численные значения радиационных поправок времени жизни некоторых ядер, обладающих разрешенным β -переходом фермиевского типа. Таблица взята нами из работы Челлена²⁹. Там же для сравнения приведена радиационная поправка к времени жизни M -мезона.

Таблица I

Радиационные поправки к β -распаду некоторых ядер и к M -распаду.

Распад	: $\frac{\tau - \tau_0}{\tau} , \%$
$M \rightarrow e \nu \bar{\nu}$	0,44
$^{10}C(\beta^+) \rightarrow ^{10}B^{**}$	-2,1
$^{14}O(\beta^+) \rightarrow ^{14}N^*$	-2,0
$^{26}Al(\beta^+) \rightarrow ^{26}Mg$	-1,8
$^{34}Cl(\beta^+) \rightarrow ^{34}S$	-1,7
$^{42}Sc(\beta^+) \rightarrow ^{42}Ca$	-1,6
$^{46}V(\beta^+) \rightarrow ^{46}Ti$	-1,6
$^{50}Mn(\beta^+) \rightarrow ^{50}Cr$	-1,5
$^{54}Co(\beta^+) \rightarrow ^{54}Fe$	-1,5

Литература.

1. F.E. Low. Phys. Rev. , 96, I428, 1954.
2. M. Gell-Mann, M.L. Goldberger. P.R. 96, I433, 1954.
3. A. Pais. Phys. Rev. Lett. 19, 544, 1967; Nuovo Cim. 53A, 433, 1967
4. V. Singh. Phys. Rev. Lett. 19, 730, 1967.
5. В.М.Шехтер. ЯФ, 7, 849, 1968.
6. F.E. Low. Phys. Rev. 110, 974, 1958.
7. Т.Н. Burnett, N.H. Kroell. Phys. Rev. Lett. 20, 86, 1968.
8. В.И.Захаров, Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. ЯФ, 8, 783, 1968.
9. Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. ЯФ, 7, III, 1968.
10. Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев, В.И.Захаров. N.P. 5, 483, 1968
11. Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев; В.И.Захаров. Р.Джет 27В, 655, 1968.
В.И.Захаров, Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. ЯФ, 8, 983, 1968.
12. В.И.Захаров, Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. ЯФ, 8, 106, 1968.
13. Л.А.Кондратюк, Л.А.Пономарев. ЯФ, 9, 832, 1969.
14. Л.А.Пономарев. ЯФ, 9, II35 , 1969.
15. Э.И.Дубовой, И.С.Шапиро. ЖЭТФ, Письма, 8, 216, 1968.
16. Л.А.Кондратюк, ЯФ, II, 151, 1970.
17. Э.И.Дубовой. ЯФ, 10, № 3, 1969.
18. И.С.Шапиро. Теория прямых ядерных реакций. Атомиздат, 1963,
стр.60.
19. S.T. Butler. Proc. Roy. Soc. 208, 559, 1951.
20. Г.С.Шапиро, В.И.Колубасов, Т.Р.Ангст. Nucl. Phys. 61, 353, 1967.
21. Р.Вильсон. Нуклон-нуклонные взаимодействия, "Мир", 1965.
22. И.С.Шапиро. УФН, 92, 549, 1967.
23. R.Behrends, R.Finkelstein, A.Sirlin. Phys. Rev. 101, 866, 1956.
24. S.M. Berman. Phys. Rev. II2, 267, 1958.
25. T.Kinoshita, A.Sirlin. Phys. Rev. II3, 1652, 1959.

26. S.M.Berman A.Sirlin Ann.Phys. 20, 20, 1962.
27. J.Durand, J.F.Lindowitz, R.B.Marr Phys.Rev. 130, II 88, 1963.
28. R.Feynman Proc. 1960 Int. Conf. on High-Energy Physics, Rochester, 1960, New York 1960, p.50I.
29. J.Källen Null.Phys. B1, 225, 1967.
30. J.D.Bjorken Phys. Rev. 148, I 467, 1966.
31. E.S.Abers, R.E.Norton, D.A.Dicus Phys.Rev.Lett. 18, 676, 1967.
32. N.Cabibbo, L.Maiani, G.Preparata Phys.Lett. 25B, 31, 1967.
33. K.Johnson, F.E.Low, H.Suura Phys.Rev.Lett. 18, I 924, 1967.
34. T.D.Lee Phys.Rev. 128, 899, 1962.
35. Б.Л.Иоффе, ЖЭТФ, 47, 975, 1964; Письма ЖЭТФ 9 4, 376, 1966.
36. A.Sizlin, Phys.Rev. 164, I 767, 1967.
37. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, изд. Наука, 1969, стр.496.
38. L.Mitchell Proc.Roy.Soc.(London) A63, 514, 1949.
39. Л.Б.Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц, Физматгиз, 1963, стр.II9.
40. Б.В.Гешkenbein, В.С.Попов. ЖЭТФ, 41, I 99, 1961.
41. F.Janouch, R.Mach Phys.Lett. 29B, 2, 1969; Czech. Journ. Phys. B12, I 510, 1969.
42. F.Janouch, R.Mach Czech.Nucl.Res.Inst.Preprint UJF 2407-F, Řež, 1970.
43. F.Janouch, R.Mach. Czech.Nucl.Res.Inst.Prepr.UJV 2439-F Řež, 1970.

Подписи к рисункам.

Рис.1. Рассеяние мягкого γ -кванта на протоне.

Рис.2. Тормозное излучение при рассеянии двух заряженных частиц.

Рис.3. Диаграммы Фейнмана для радиационного распада $a \rightarrow b + e + \gamma$.

Рис.4. Три типа диаграмм для процесса тормозного излучения при полюсном механизме реакции $A + x \rightarrow B + y$.

Рис.5. Примерный вид спектра тормозного излучения для реакции подхвата при полюсном механизме. Две кривые соответствуют двум разным значениям квадрата переданного импульса $t_2 > t_1$.

Рис.6. Три типа диаграмм для процесса тормозного излучения при треугольном механизме реакции $A + x \rightarrow B + \gamma$.

Рис.7. Примерный вид спектра тормозного излучения при треугольном механизме реакции.

Рис.8. Диаграммы для радиационных поправок к β^- -распаду нейтрона.

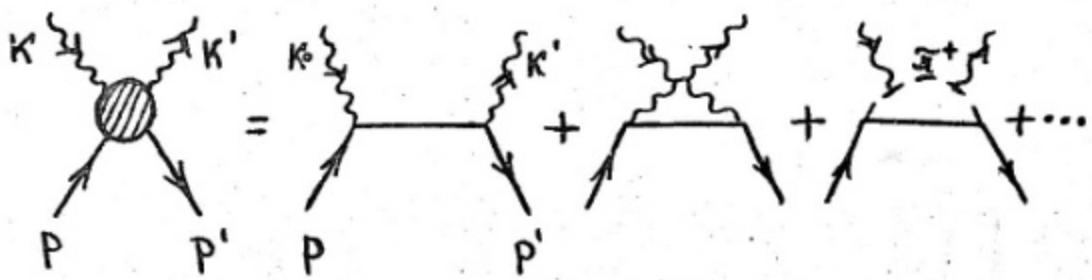


Рис. 1

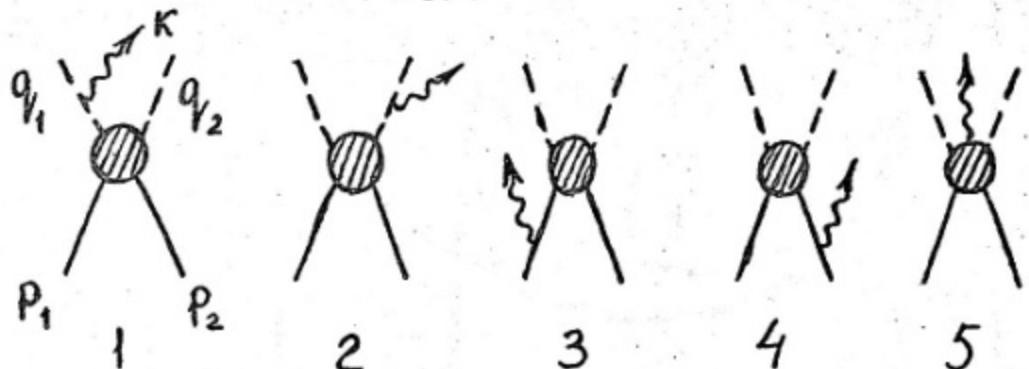


Рис. 2

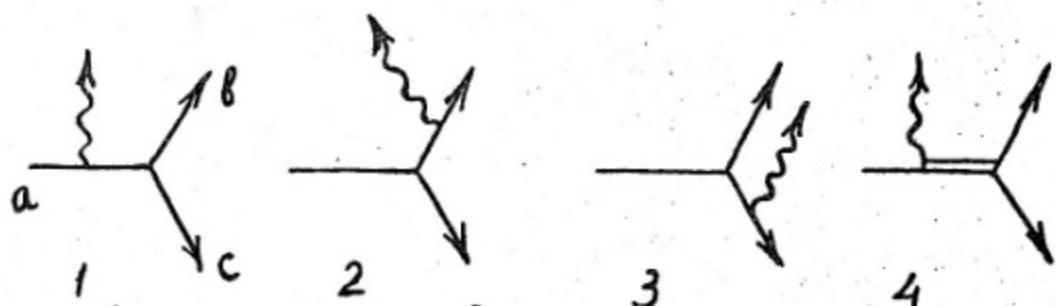


Рис. 3

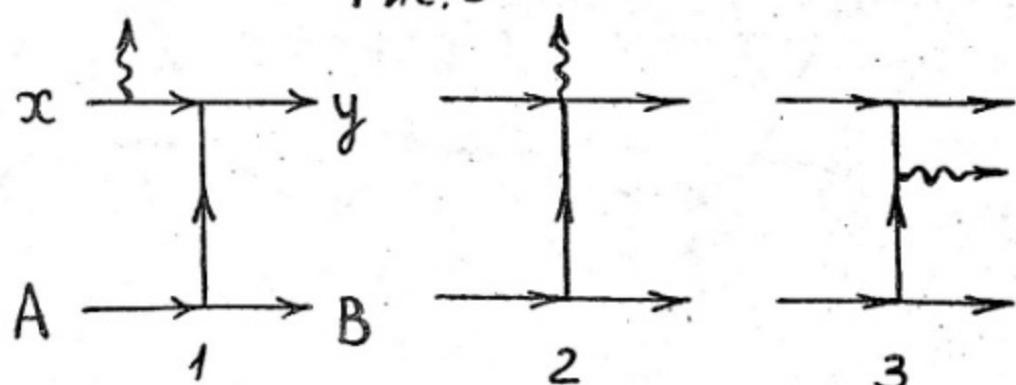


Рис. 4

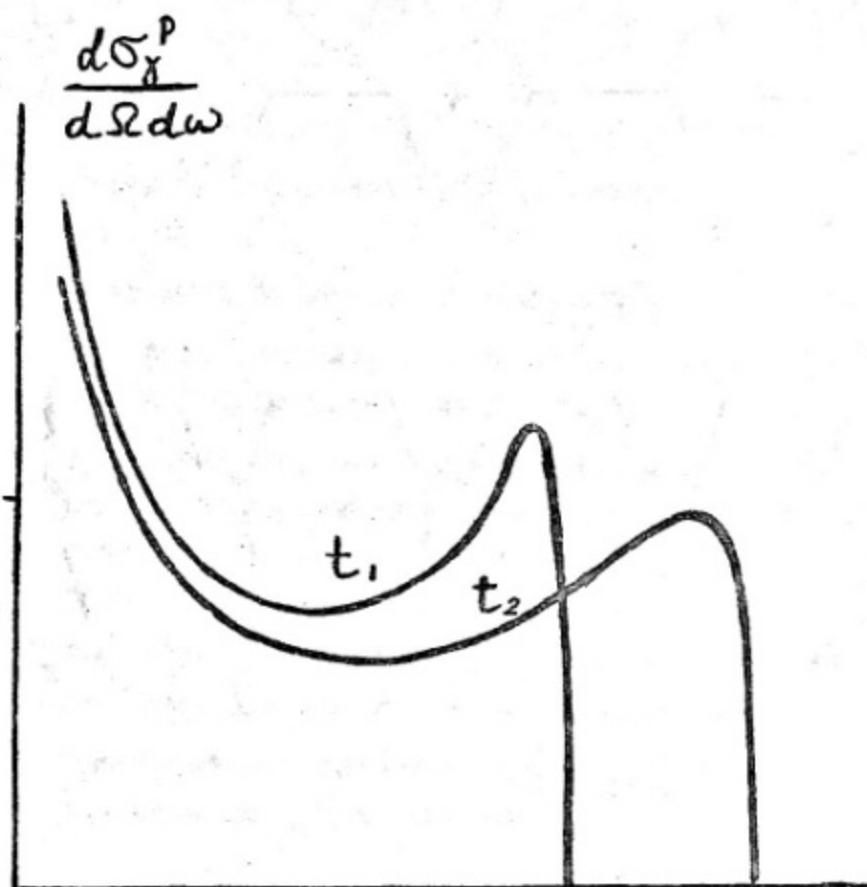


Рис. 5

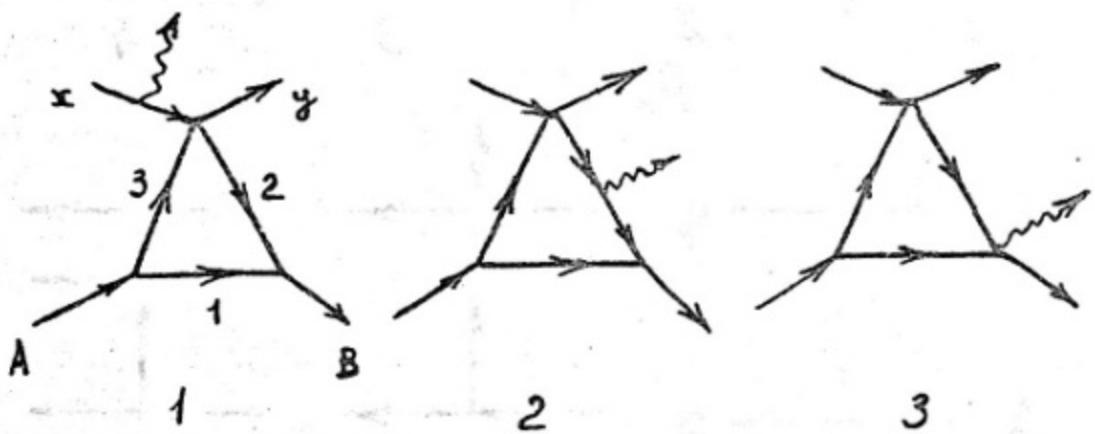


Рис. 6

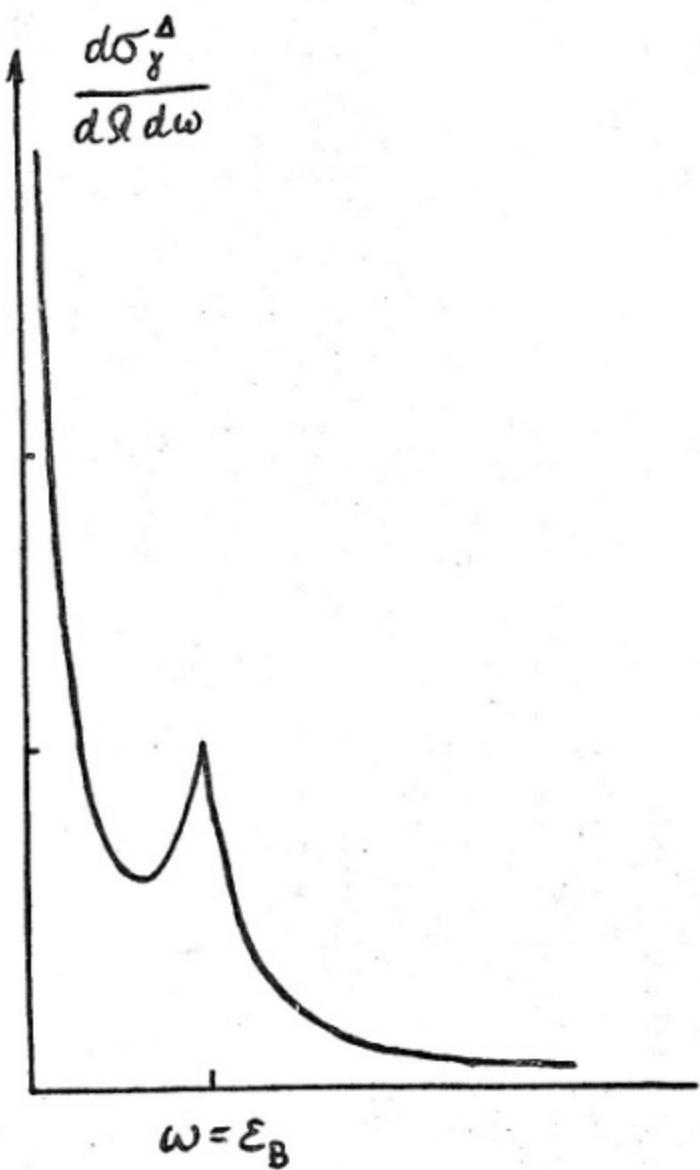


Fig. 7

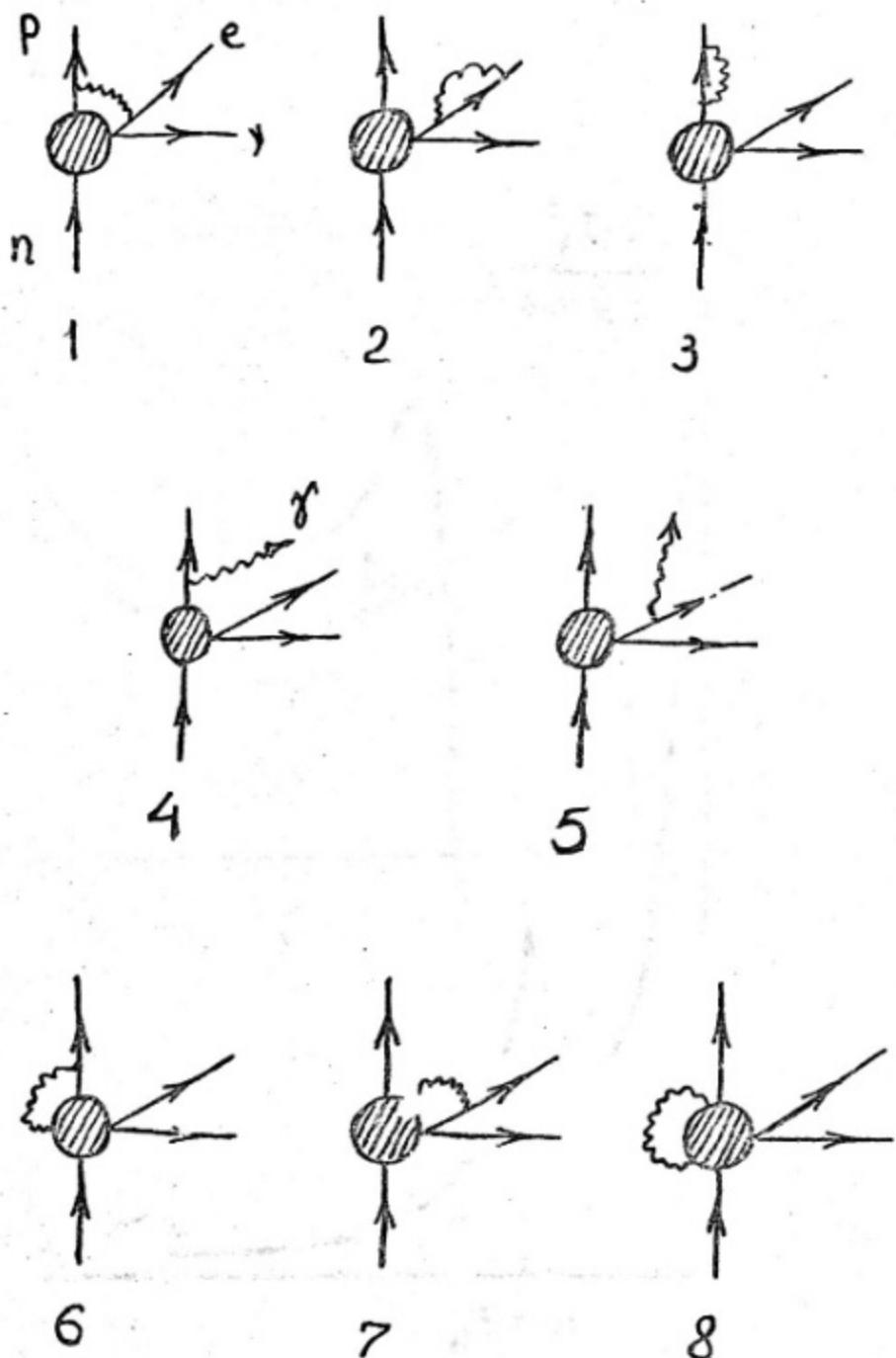


Рис. 8

Л-61345 Полписано к печати 25/III.1971 г. Зак. 444. Тир. 200

Типография МИФИ. М.Пионерская, 12