

539.1

B·85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике. I сессия  
**ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА**  
(конспекты лекций)

А. И. БАЗЬ

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА  
К-ГАРМОНИК  
ДЛЯ РАСЧЕТА СВОЙСТВ ЯДЕР**

МОСКВА — 1971

Базь. А.И.

B.85

## Применение метода К-гармоник . . . .

В настоящем курсе лекций будут рассмотрены теоретические схемы, возникающие при применении метода К-гармоник к расчету основных свойств ядер (энергий связи, размеров, форм поверхности, спектров низколежащих уровней). Излагаемый в этих лекциях материал базируется на работах Ю.А.Симонова, А.М.Бадалян, А.И.Базя, М.В.Дукова и Ю.Т.Грина.

562264

## § I. ВВЕДЕНИЕ

При построении теории ядра наиболее привлекательной является точка зрения, согласно которой все без исключения свойства ядра, состоящего из  $A$  нуклонов, содержатся в нерелятивистском уравнении Шредингера:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \frac{\partial^2}{\partial \vec{z}_i^2} + \sum_{i>j}^A \hat{V}(i,j) - E \right\} \Psi(i_1, i_2, \dots, A) = 0 \quad (I)$$

где  $m$  - масса нуклона (разницей масс нейтрона и протона пренебрегаем),  $\vec{z}_i$  - его координата,  $\hat{V}(i,j)$  - оператор взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го нуклонов,  $E$  - полная энергия системы  $A$  нуклонов за вычетом энергии покоя самих нуклонов. Каждый нуклон описывается пятью переменными - тремя пространственными координатами вектора  $\vec{z}_i$  и дискретными координатами  $M_i$  и  $T_i$ , обозначающими проекции спина и изоспина. Итого, волновая функция  $\Psi(i_1, i_2, \dots, A)$  зависит от  $3A$  пространственных и  $2A$  спин-изоспиновых координат.

Фактически, когда для описания свойств ядер пишется уравнение Шредингера (I), делается важное предположение, очень правдоподобное, но не самоочевидное: предполагается, что применительно к задачам ядерной физики нуклоны можно рассматривать как бесструктурные нерелятивистские частицы. Средняя кинетическая энергия нуклонов в ядре не превышает 30–50 Мэв, и это является обоснованием применения нерелятивистской кинематики к нуклонам. Предположение о бесструктурности нуклона требует более подробных комментариев. Радиус мезонной щубы нуклона порядка  $0,7 - 0,9 \text{ fm}$ , как это следует из данных об электрических и магнитных формфакторах нуклонов.

Отсюда заключаем, что нуклоны можно рассматривать в ядерно-физических задачах как точечные бесструктурные частицы, если в ядре они не перекрываются своими внутренними волновыми функциями, т.е. если основную роль в волновой функции ядра играют состояния, в которых нуклоны отдалены от своих соседей на расстояния порядка  $1,5 \div 2,0$ . Имеются два обстоятельства, способствующие этому. Во-первых, принцип Паули и, во-вторых, экспериментально установлено отталкивание, действующее между нуклонами на малых расстояниях. Насколько этих двух факторов хватает, чтобы обеспечить достаточно большие расстояния между соседними нуклонами в ядре, пока до конца не ясно. Очень многое здесь зависит от конкретного вида взаимодействия между нуклонами. Является очевидным, во всяком случае, что построение всей ядерной физики на базе уравнения (I) будет внутренне непротиворечивым, только если взаимодействия  $\hat{V}(i,j)$  между нуклонами таковы, что они "держат" нуклоны внутри ядра на почтительном расстоянии ( $\sim 1,5 \div 2,0$ ) друг от друга. В противном случае, когда нуклоны в ядре часто и интенсивно перекрываются своими внутренними волновыми функциями, необходимо учитывать возникающую при этом деформацию внутренних волновых функций нуклонов. Для этого надо вводить в рассмотрение самую структуру нуклона, которая является предметом исследования в нерелятивистском уравнении (I).

Таким образом, содержащееся в (I) предложение о бесструктурности нуклона можно перефразировать так: мы кладем уравнение Шредингера (I) в основу ядерной физики; этим самым мы выражаем надежду, что вся физика ядра может быть количественно описана без существенного использования аппарата релятивистской квантовой теории адронов.

Имеется еще одно важное предположение, заложенное в уравнении (I). Именно, взаимодействие  $\hat{V}(i,j)$  между нуклонами предположено парным и зависящим только от координат двух взаимодействующих нуклонов. Другими словами, предполагается, что наличие других нуклонов в ядре не меняет вида взаимодействия между  $i$ -м и  $j$ -м нуклонами, и оно оказывается таким же, как если бы эти два нуклона находились в пустоте (пустотное взаимодействие).

Это предположение довольно сильно связано с предположением о возможности считать нуклон бесструктурным в ядернофизических задачах, но не совпадает с ним. Справедливость этого предположения о характере взаимодействия нуклонов должна проверяться на опыте. В настоящее время мы примем это предположение как удобную и довольно правоподобную работу гипотезу.

## § 2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ МЕТОДА К-ГАРМОНИК

Пусть рассматривается какое-то ядро, состоящее из  $A$  нуклонов. Исходным для метода К-гармоник является нерелятивистское уравнение Шредингера этой системы:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \frac{\partial^2}{\partial \vec{z}_i^2} + \sum_{i>j}^A \hat{V}(i,j) - E \right\} \Psi(1,2,\dots,A) = 0 \quad (I)$$

где  $\hat{V}(i,j)$  - оператор взаимодействия между  $i$ -м и  $j$ -м нуклонами. Это взаимодействие предполагается совпадающим с взаимодействием двух свободных нерелятивистских нуклонов. В уравнение (I) входит полная энергия  $E$  всей системы, за исключением, конечно, масс покоя нуклонов.

Удобно с самого же начала отделить движение общего центра масс. Для этого переходим от координат  $\vec{z}_i$  отдельных

нуклонов к новым переменным:

$$\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{z}_i ; \quad \vec{\xi}_e = \frac{1}{\sqrt{e(e+1)}} \left[ \sum_{j=1}^{e-1} \vec{z}_j - e \vec{z}_{e+1} \right]; \quad (2)$$

$$e = 1, 2, \dots, (A-1)$$

Здесь  $\vec{R}$  - координата центра тяжести ядра, а  $(A-1)$  координат Якоби  $\vec{\xi}_e$  трансляционно инвариантны и зависят от относительного расположения наших  $A$  нуклонов. При этом имеем тождественное

$$d\mathcal{T}_{3A} \equiv \prod_{i=1}^A d\vec{z}_i = A^{\frac{3}{2}} d\vec{R} \prod_{j=1}^{A-1} \vec{\xi}_j \equiv A^{\frac{3}{2}} d\vec{R} d\mathcal{T}_{3A-3}, \quad (3)$$

$$\Delta_{3A} \equiv \sum_{i=1}^A \frac{\partial^2}{\partial \vec{z}_i^2} = \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \vec{R}^2} + \sum_{j=1}^{A-1} \frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}_j^2} \equiv \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \vec{R}^2} + \Delta_{3A-3} \quad (3^I)$$

Совокупность  $3(A-1)$  компонент векторов  $\vec{\xi}_j$  можно рассматривать как компоненты одного вектора  $\vec{P}$  в  $3(A-1)$  - мерном пространстве, натянутом на реперы  $\vec{\xi}_j / \xi_j$ . Для квадрата длины  $P^2$  этого вектора получаем с помощью (2):

$$P^2 \equiv \sum_{i=1}^{A-1} \vec{\xi}_i^2 = \sum_{i=1}^A (\vec{z}_i - \vec{R})^2 \equiv \frac{1}{A} \sum_{i>j}^A (\vec{z}_i - \vec{z}_j)^2 \equiv \sum_{i=1}^A \vec{z}_i^2 - A \vec{R}^2 \quad (4)$$

Элемент объема в этом  $3(A-1)$  - мерном пространстве может быть записан как

$$d\mathcal{T}_{3A-3} \equiv \prod_{e=1}^{A-1} d\vec{\xi}_e = P^{3A-4} dP d\Omega_{\vec{P}} \quad (5)$$

Здесь  $\Omega_{\vec{P}}$  обозначает совокупность  $(3A-4)$  углов, определяющих направление вектора  $\vec{P}$  в  $3(A-1)$  - мерном пространстве. Переход к переменным  $P$  и  $\Omega_{\vec{P}}$  в исходном уравнении Шредингера (I) осуществляется с помощью формулы (см.  $(3^I)$ )

$$\Delta_{3A-3} = \frac{1}{P^{3A-4}} \frac{\partial}{\partial P} P^{\frac{3A-4}{2}} + \frac{1}{P^2} \Delta_{\Omega \vec{P}} \quad (6)$$

где  $\Delta_{\Omega}$  - угловая часть многомерного лапласиана.

(3A-4) угла  $\Omega_{\vec{P}}$  можно вводить разными способами, но их конкретный вид нас не интересует не будет. Все дальнейшее построение не зависит от выбора системы многомерных углов, коль скоро справедливы соотношения (5-6).

Волновая функция  $\Psi$ , являющаяся решением уравнения Шредингера (I), в системе Ц.И. зависит от совокупности  $\Omega_{sT}$  2A спин-изоспиновых переменных и от длины  $P$  и направления  $\Omega_{\vec{P}}$  3(A-1)-мерного вектора  $\vec{P}$ . В методе К-гармоник  $\Psi$ -функция записывается в виде разложения

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = \sum_{K, \gamma} P^{-\frac{3A-4}{2}} \chi_{K\gamma}(P) U_{K\gamma}(\Omega_{\vec{P}}, \Omega_{sT}), \quad (7)$$

где  $U_{K\gamma}$  полный набор ортонормированных функций в пространстве (3A-4) угловых и 2A спин-изоспиновых переменных:

$$\int d\Omega_{\vec{P}} U_{K\gamma}^+ U_{K\gamma} = \delta_{KK}, \delta_{\gamma\gamma}, \quad (8)$$

И в этой формуле и везде ниже мы не выписываем явно знака суммирования по спин-изоспиновым переменным; оно всегда подразумевается выполненным при вычислении любых матричных элементов.

В качестве обобщенных угловых функций  $U_{K\gamma}$  (К-гармоник) удобно пользоваться собственными функциями угловой части многомерного лапласиана:

$$\Delta_{\Omega \vec{P}} U_{K\gamma} = -K(K+3A-5) U_{K\gamma} \quad (9)$$

Здесь  $K$ -целые положительные числа  $K \geq K_{\min}$ , в важности которых для метода  $K$ -гармоник мы скоро убедимся, а индекс обозначает набор всех остальных чисел, характеризующих  $K$ -гармонику  $\mathcal{U}_{kr}$ .

Общий вид и метод построения  $K$ -гармоник дан в работах /4-6/. Детальный вид этих функций для  $K = K_{\min}$  будет приведен ниже.

Подставляя разложение (7) в исходное уравнение Шредингера (I) и используя (3<sup>I</sup>), (6), (8) и (9), легко получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для входящих в (7) функций  $X_{kr}(p)$ :

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} - \frac{\mathcal{L}_k(\mathcal{L}_k+1)}{p^2} - \frac{2m}{\hbar^2} [E + W_{kr}^{kr}(p)] \right\} X_{kr}(p) = \frac{2m}{\hbar^2} \sum_{kr' \neq kr} W_{kr'}^{kr}(p) X_{kr'}(p) \quad (IO)$$

Здесь  $\mathcal{L}_k = \frac{3A-6}{2}$ , а матричные элементы  $W(p)$  играющие роль эффективных взаимодействий, равны:

$$W_{kr}^{kr'}(p) = \int d\Omega \vec{g} \mathcal{U}_{kr}^+ \left( \sum_{i>j}^A \hat{V}(i,j) \right) \mathcal{U}_{kr'}(p) \quad (II)$$

Система уравнений (IO) и формулы (7), (II) являются точными и составляют фундамент метода  $K$ -гармоник.

Остановимся несколько подробнее на физическом смысле разложения по  $K$ -гармоникам. Здесь уместно обратить внимание на то, что когда в задаче о движении частицы в поле мы раскладываем волновую функцию частицы  $\Psi$  в ряд по угловым гармоникам:

$$\Psi = \sum_{em} \varphi_e(z) Y_{em}(\theta, \varphi)$$

то фактически разложение ведется по  $K$ -гармоникам в 3-х мерном пространстве. При этом кинетическая энергия, связанная с вра-

щением,  $\frac{\hbar^2}{2m^2} \ell(\ell+1)$ , выделяется в гамильтониане явно.<sup>3</sup> Эта часть энергии имеет кинематический характер и не может быть уменьшена. С угловыми гармониками ( $Y_{em}(\theta, \varphi)$ ) связаны однородные полиномы степени  $\ell$

$$P_{em} \equiv r^\ell Y_{em}(\theta, \varphi)$$

Легко проверить, что они являются решениями свободного уравнения Шредингера при нулевой энергии:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} P_{em} = 0$$

В полном соответствии с этими хорошо известными свойствами угловых гармоник  $Y_{em}$  находится и основные свойства К-гармоник  $U_{Kg}$ :

а) Гармоника с индексом К может быть записана как

$$U_{Kg}(\Omega \vec{p}, \Omega_{sg}) = p^{-K} P_{kg}(\vec{p}) \quad (a)$$

где  $P_{kg}(\vec{p})$  — однородный полином степени К, построенный из 3(A-I) компонент ( $\xi_{ix}, \xi_{iy}, \xi_{iz}$  с  $i = 1, 2, \dots, (A-I)$ ) вектора  $\vec{p}$ .

Теперь можно уже прямо ответить на вопрос о физическом смысле разложения (7) волновой функции многонуклонной системы по К-гармоникам. Фактически, это разложение по функциям с разной кинетической энергией относительно движения нуклонов. К-му члену разложения отвечает (кроме члена с  $\frac{d^2}{dp^2}$ ) вклад в энергию (положительный)

$$E_{kin.}^{(K)} = \frac{\hbar^2 L_K(L_K+1)}{2m p^2} \approx \frac{9}{8} \frac{\hbar^2 A^2}{mp^2} \beta^2; \quad \beta = 1 + \frac{2}{3} \frac{K}{A}$$

Как будет видно из результатов следующего параграфа, множитель  $\beta \approx 1$  для не слишком тяжелых ядер (он меняется от 3/2

для  $O^{16}$  до 2 для  $Ca^{40}$ ). Если считать, что радиус ядра есть  $R_A$  и нуклоны имеют постоянную плотность внутри ядра, то легко оценить величину  $p^2$  и  $E_{кин}$ :

$$p^2 = \sum_{i=1}^A (\vec{r}_i - \vec{R})^2 \approx A \bar{r^2} = \frac{3}{5} A R_A^2 = \frac{3}{5} A \frac{r_0^3}{2}; r_0 = 1.24$$

$$E_{кин}^{(K)} \approx \frac{5}{3} \frac{\hbar^2 \beta^2}{m r_0^2} A^{\frac{5}{3}} = 50 \beta^2 A^{\frac{1}{3}} M_e B$$

Наиболее важной величиной является не сама  $E_{кин}^{(K)}$ , а разность кинетических энергий, отвечающих соседним значениям  $K$  в разложении (7) <sup>x/</sup>:

$$E_{кин}^{(K+2)} - E_{кин}^{(K)} = \frac{\hbar^2 (4\lambda_K + 6)}{2m p^2} \approx \frac{5\hbar^2 \beta}{m r_0^2} A^{-\frac{2}{3}} \approx \frac{150\beta}{A^{\frac{2}{3}}} M_e B$$

Именно эта разность будет определять величину смешивания членов с различными  $K$ .

### § 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Все формулы предыдущего параграфа являются точными и, следовательно, непрактическими. Опыт применения метода  $K$ -гармоник и легчайшим ядрам /2,3/ показывает, что подавляющий вклад в волновую функцию и энергию нижних состояний ядер дают первые члены разложения (7), у которых  $K$  имеет минимальное значение  $K = K_{min}$  допускаемое симметрией волновой функции

x/ Четность гармоники  $\psi_K$  равна  $(-)^K$ ; поэтому суммирование в (7) идет по четным или нечетным  $K$  в зависимости от четности рассматриваемого состояния.

относительно перестановок нуклонов. Физическая причина этого довольно ясна. Наименьшим значением  $K$  отвечает наиболее симметричная и компактная пространственная конфигурация волновой функции ядра, отвечающая минимуму кинетической и потенциальной энергии нуклонов. Именно такая конфигурация и реализуется с наибольшей вероятностью у низколежащих уровней ядер. Формальным проявлением этой физической причины является появление в системе уравнений (10) большого члена

$$\frac{\mathcal{L}_K(\mathcal{L}_K+1)}{P^2} = \frac{(2K+3A-6)(2K+3A-4)}{4P^2} \quad (12)$$

играющего роль многомерно "вращательной энергии", стремящейся разбросать нуклоны в область больших  $P$ , т.е. больших относительных расстояний  $\vec{\zeta}_{ij}$  между нуклонами (см. (4)).

На основании сказанного выше представляется естественным, что при применении метода  $K$ -гармоник к произвольным ядрам следует начать с подробного исследования приближения

$K = K_{\min}$ , тем более что это можно сделать в общем виде.

Приближение  $K = K_{\min}$  мы будем называть основным приближением. Его последовательное проведение в жизнь означает, что в разложении (7) и в системе уравнений (10) надо опустить все члены с  $K, K' > K_{\min}$ . При этом единственным индексом у  $K$ -гармоник остается индекс  $\gamma$  в (7) и (10), т.к. индекс  $K = K_{\min}$  мы будем ниже для кратности опускать:

$$II(1,2,\dots,A) \approx P^{-\frac{(3A-4)}{2}} \sum_{\gamma} X_{\gamma}(P) U_{\gamma}(\Omega_{\vec{P}}, \Omega_{S\Gamma}) \quad (13)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dP^2} - \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{P^2} - \frac{2m}{h^2} [E + W_{\gamma}(P)] \right\} X_{\gamma} = \frac{2m}{h^2} \sum_{\gamma' \neq \gamma} W_{\gamma'}(P) X_{\gamma'}, \quad (14)$$

$$\mathcal{L} = K_{min} + \frac{3}{2}(A-2) \quad (I5)$$

Для того чтобы расчетная схема основного приближения стала полной, необходимо привести формулы для К-гармоник  $U_r$ , отвечающих  $K = K_{min}$ . Эти функции были построены Ю.А. Симоновым /4/ и имеют вид детермината АхА:

$$U_r(\vec{Q}_p, \vec{Q}_{ST}) = \frac{B}{p^k \sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \Phi_{\omega_1}(1), \Phi_{\omega_2}(2), \dots, \Phi_{\omega_A}(A) \\ \Phi_{\omega_1}(1), \Phi_{\omega_2}(2), \dots, \Phi_{\omega_2}(A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{\omega_A}(1), \Phi_{\omega_2}(2), \dots, \Phi_{\omega_A}(A) \end{vmatrix} \quad (I6)$$

где В-нормировочная постоянная, а функции  $\Phi_{\omega_p}(i)$  ( $i = 1, 2, \dots, A$ ) являются функциями координат  $i$ -го нуклона:

$$\Phi_{\omega_p}(i) = C_{n_p e_p} z_i^{2n_p + \ell_p} Y_{e_p m_p}(\vec{z}_i) \chi_{\mu_p \tau_p}(i) \quad (I7)$$

$$C_{ne} = \frac{(-)^n \sqrt{2}}{\left[ \Gamma(n+1) \Gamma(n+\ell + \frac{3}{2}) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (I7^I)$$

Здесь  $Y_{e_m}(\vec{z})$  - обычная шаровая функция,  $\chi_{\mu \tau}(i)$  - спин-изоспиновая функция  $i$ -го нуклона, отвечающая проекциям спина и изоспина  $\mu$  и  $\tau$  соответственно, а  $n$  может принимать целые положительные значения  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Нижний индекс  $\omega_p$  у  $\Phi_{\omega}$  обозначает совокупность всех пяти чисел:

$\omega_p = \{n_p, \ell_p, m_p, \mu_p, \tau_p\}$ . Набор этих чисел будем ниже называть состоянием нуклона.

Для того чтобы выражение в правой части (I6) имело свойство К-гармоники, т.е. чтобы удовлетворялось уравнение (9), полная степень детерминанта должна быть наименьшей, допускаемой его структурой. При этом полная степень детерминанта и определяет величину  $K_{min}$ :

$$K_{min} = \sum_{P=1}^4 (2n_p + \ell_p) \quad (I8)$$

Примем следующий порядок заполнения детерминанта (I6) строки заполняются последовательно сверху вниз, начиная с состояний  $\Phi_\omega$  с минимально возможным значением  $2n + \ell = 0$ . Таких состояний четыре:  $\omega = \{0, 0, 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$ , и они заполняют первые четыре строки. В пятую строку ни одну из этих функций поставить уже нельзя, т.к. тогда у детерминанта окажутся две одинаковые строки и он обратится в нуль. Можно, однако, поставить одну из двенадцати функций  $\Phi_\omega$  с  $2n + \ell = 1$ ;  $\omega = \{0, 1, m, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$ . Этими функциями можно заполнить все строки с пятой по шестнадцатую включительно.

Следующие строки должны заполняться функциями с  $2n + \ell = 2$ . Их 24: четыре функции  $\omega = \{1, 0, 0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$  и двадцать функций с  $\omega = \{0, 2, m, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$  и  $m = 2, -1, 0, 1, 2$ . Ясно, как продолжать эту процедуру дальше.

Полезно заметить, что такой способ заполнения в точности совпадает со способом построения волновой функции ядра в наименее конфигурации модели оболочек. При этом роль радиальных волновых функций нуклонов играют ве. личин  $\zeta_i^{2n+\ell}$ . Это отмечалось Ю.А. Симоновым в работе /4/.

Построенная описанным выше способом К-гармоник  $U_8$  удовлетворяет требованиям принципа Паули и является ортонор-

мированной в смысле формулы (8). Первое утверждение очевидно, а второе будет доказано в следующем параграфе. Как следует из метода построения, индекс  $\gamma$ , характеризующий К-гармоники, представляет собой не что иное, как совокупность номеров состояний  $\gamma = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_A\}$ , из которых построен детерминант в (16).

Формулы (13-18) и (II) составляют замкнутую систему уравнений, описывающих задачу о состояниях А нуклонов в основном приближении. Из этих формул в следующих параграфах получится расчетная схема, похожая на схему оболочечной модели.

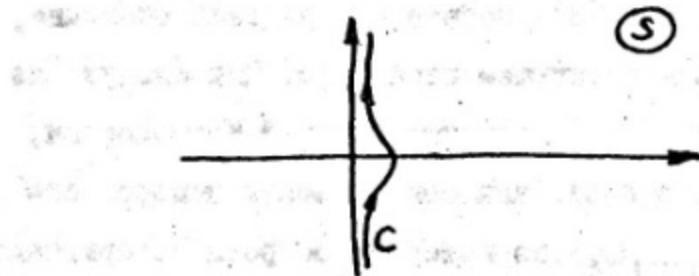
#### § 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этом параграфе будут получены формулы, с помощью которых вычисление матричных элементов между К-гармониками сводится к хорошо известной процедуре.

Отметим прежде всего полученную Е.Л. Сурковым важную формулу, доказательство которой приведено ниже

$$\begin{aligned} Q_{\gamma}^{\alpha'} &= \int dS \vec{P} \cdot U_{\gamma}^{\dagger} \hat{Q}(\vec{P}, \Omega_{\gamma}) U_{\alpha'} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{P^{3A-5}} \int_C ds \left( \frac{s}{\pi} \right)^{3/2} e^{s(P^2 - \sum_i z_i^2)} U_{\gamma}^{\dagger} Q U_{\alpha'} dT_{3A} \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\hat{Q}(\vec{P}, \Omega_{\gamma})$  — произвольная функция, не зависящая от положения  $\vec{R}$  центра тяжести нашей системы А нуклонов, интегрирование по параметру  $s$  производится вдоль контура  $C$ , изображенного на рисунке, а интегрирование по  $dT_{3A}$  производится по всему ЗА-мерному пространству координат нуклонов.



Контур интегрирования С в плоскости комплексного переменного S .

Докажем сначала формулу

$$\begin{aligned} J &= \int d\Omega_{\vec{p}} G(\xi) = \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{p^{3A-5}} \int_C ds \left( \frac{s}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{s(p^2 - \sum_{i=1}^{A-1} \xi_i^2)} G(\xi) dT_{3A} \quad (I.1) \end{aligned}$$

где  $G(\xi)$  не зависит от положения  $\vec{R}$  центра тяжести системы, т.е. является трансляционным инвариантом. Контур интегрирования С по  $ds$  изображен на рисунке, а все остальные величины определены формулами (2-3).

Отметим два тождества:

$$d\Omega_{\vec{p}} = \delta(p^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2) dp^2 d\Omega_{\vec{p}} = \frac{2}{p^{3A-5}} \delta(p^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2) dT_{3A} \quad (I.2)$$

$$\left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int e^{-\Delta R^2} d\vec{R} = 1 \quad \text{при } Re \Delta > 0 \quad (I.2')$$

Комбинируя эти тождества и используя (3), преобразуем  $J$  к виду

$$J = \frac{2}{p^{3A-5}} \int G(\xi) \left( \frac{\Delta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\Delta R^2} \delta(p^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2) d\vec{R} dT_{3A-3} =$$

$$= \frac{2}{\rho^{3A-5}} \int G(\zeta) \left( \frac{\Delta}{A\pi} \right)^{3/2} e^{-\Delta R^2} \delta\left(\rho^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2\right) d\zeta_{3A} \quad (I.3)$$

Введем теперь интегральное представление  $\delta$ -функции:

$$\left( \frac{\Delta}{A\pi} \right)^{3/2} e^{-\Delta R^2} \delta\left(\rho^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left( \frac{\Delta}{A\pi} \right)^{3/2} e^{-\Delta R^2 + s\left(\rho^2 - \sum_{e=1}^{A-1} \xi_e^2\right)} \quad (I.4)$$

Т.к. величина  $\Delta$  в (I.2<sup>I</sup>) произвольна, коль скоро  $\operatorname{Re}\Delta > 0$ , то в последней формуле можем положить  $\Delta = As$ . Подставляя затем (I.4) в (I.3), получаем исходную формулу (I.I).

Преобразуем теперь подинтегральное выражение в (I9), используя следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{s}{2} \sum_{i=1}^A z_i^2} u_s &= \frac{B}{\rho^k \sqrt{A!}} \left( \prod_{i=1}^A e^{-\frac{s}{2} z_i^2} \right) \det |\phi_{\omega_p}(j)| - \\ &= \frac{B}{\rho^k \sqrt{A!}} s^{-\frac{k}{2} - \frac{3}{4} A} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(k)}(j)|, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(k)}(j) = R_{n_p e_p}^{(k)}(z_j) Y_{e_p m_p}(z_j) L_{n_p}^{(k)}(j) \quad (21)$$

$$R_{n_p e_p}^{(k)}(z) = B^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{2 \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{2B^2}} \left( \frac{z}{B} \right)^k L_{n_p}^{k+\frac{1}{2}} \left( \frac{z^2}{B^2} \right) \quad (22)$$

В этих формулах  $B = s^{-\frac{1}{2}}$ ,  $L_n^{k+\frac{1}{2}} \left( \frac{z^2}{B^2} \right)$  - полином Лагерра от  $\left( \frac{z^2}{B^2} \right)$  степени  $n$ .

При выписывании равенств (20) были использованы формулы (I6), (I7), (I7<sup>I</sup>), (I8) и два свойства детерминантов: во-первых, из каждой строки детерминанта можно вынести постоянный для всех членов строки множитель, и, во-вторых, в каждой строке детерминанта можно прибавить, не меняв значения детерминанта, любую другую его строку, умноженную на произвольный коэффициент.

В результате преобразования (20) мы получим в правой части детерминант Слэтера, построенный из функций  $\Phi_{\omega_p}$ , которые ортогональны по всем пяти индексам, входящим в

$$\omega_p = \{n_p, \ell_p, m_p, \mu_p, \tau_p\}.$$

Ортогональность по  $\ell, m, \mu, \tau$  обеспечивается видом угловой и спин-изоспиновой зависимости в формуле (21). Ортогональность по индексу  $n$  обеспечивается видом функций  $R_{ne}$ :

$$\int_0^{\infty} R_{ne}^{(8)}(z) R_{n,e}^{(8)}(z) z^2 dz = \delta_{nn}, \quad (23)$$

Справедливость этой функции для всех  $S$  на контуре  $C$  (см. рисунок) легко доказывается.

Радиальная волновая функция  $R_{ne}^{(8)}(z)$  частицы в поле гармонического осциллятора

$$U(z) = \frac{\hbar^2}{2m\beta^2} \frac{z^2}{\beta^2} \quad (\text{II.1})$$

находящейся в состоянии с орбитальным моментом  $\ell$  и энергией

$$\varepsilon_{ne} = \hbar\nu(2n + \ell + \frac{3}{2}); \quad \hbar\nu = \frac{\hbar^2}{m\beta^2} \quad (\text{II.2})$$

имеет вид

$$R_{ne}^{(B)}(z) = B^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{2B^2}} \left( \frac{z}{B} \right)^{\ell} L_n^{\ell+\frac{1}{2}} \left( \frac{z^2}{B^2} \right) \quad (\text{II.3})$$

где  $L_n^{\ell+\frac{1}{2}}$  — полином Лагерра. Эти функции являются ортого-  
нормированными при всех конечных значениях  $B$ , когда  $B$   
удовлетворяет условию

$$B = |B| e^{i\alpha}; \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4} \quad (\text{II.4})$$

В этом случае нормировочный интеграл можно переписать:

$$\int_0^\infty dz \cdot z^2 R_{ne}^{(B)} R_{n'e}^{(B)} = 2 \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})} \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2iz} dx \cdot x^{\ell+\frac{1}{2}} e^{-x} L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(x) L_{n'}^{\ell+\frac{1}{2}}(x) = \\ = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})} \int_0^\infty dx \cdot x^{\ell+\frac{1}{2}} e^{-x} L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(x) L_{n'}^{\ell+\frac{1}{2}}(x) = \delta_{nn}, \quad (\text{II.5})$$

В этой последовательности равенств мы сначала перешли к пере-  
менной  $X = \frac{z^2}{B^2} = e^{-2iz} \frac{z^2}{|B|^2}$ , а затем повернули контур интег-  
рирования на угол  $2\alpha$  против часовой стрелки, воспользовав-  
шись отсутствием особенностей у подинтегрального выражения в  
правой полуплоскости  $x$  ( $\operatorname{Re} x > 0$ ). В результате путь ин-  
тегрирования сместился на положительную полуось и стало воз-  
можным пользоваться обычным условием ортонормированности по-  
линомов Лагерра /10/.

Отметим во избежание недоразумений, что в условие орто-  
нормированности (II.5) при комплексном  $B$  входит именно

$R_{ne} R_{n'e}$ , не  $R^* R$ .

БИБЛИОТЕКА ФУНКЦИИ  $R_{ne}$ , определенные формулой (22) и полученные  
МИФИ

нами в результате тождественного преобразования (20), хорошо знакомы всем, знавшим оболочечную модель ядра. По форме эти функции в точности совпадают с радиальными волновыми функциями нуклона в поле гармонического осциллятора

$$U_{\text{осц.}} = \frac{\hbar^2}{2m\beta^2} \left(\frac{r}{\beta}\right)^2 \quad (24)$$

с характерным радиусом  $\beta$  и частотой  $\nu$ , равными

$$\beta = \frac{l}{\sqrt{s}} ; \quad \nu = \frac{\hbar s}{m} \quad (24^I)$$

Не следует смущаться тем, что из-за комплексности  $S$  получается комплексными и радиус  $\beta$  и частота  $\nu$ . Мы пока не будем искать глубокого физического смысла в формальном сходстве функций  $R_{ne}^{(8)}$  с собственными функциями комплексного осцилляторного поля (23-24<sup>I</sup>). Для всего дальнейшего нам достаточно выполнения условия ортонормированности (23), т.к. с его учетом мы имеем

$$\int d\vec{z}_j \tilde{\Phi}_{\omega}(j) \tilde{\Phi}_{\omega}(j) = \delta_{nn}, \delta_{ee}, \delta_{mm}, \delta_{\mu\mu}, \delta_{jj} = \delta_{\omega\omega} \quad (25)$$

Собирая вместе все формулы этого параграфа, получаем для матричного элемента от произвольного трансляционно-инвариантного оператора  $\hat{Q}(\vec{p}, \Omega_{sj})$  следующую общую формулу:

$$Q_s'(\rho) = \int u_s^+ \hat{Q} u_s d\Omega_{\vec{p}} = \int ds D(s, \rho^2) \left| \det |\tilde{\Phi}_{\omega}^{(s)}(j)| \right| \cdot \left| \det |\tilde{\Phi}_{\omega}^{(s)}(j)| \right| \quad (26)$$

где

$$D(s, \rho^2) = \frac{1}{\pi i} \frac{\beta^2}{\rho^{2K+3A-5} A!} \left(\frac{s}{\pi}\right)^{3_2} s^{-K-\frac{3}{2}A} e^{s\rho^2} \quad (26^I)$$

В силу условий ортонормированности (25) мы можем при про-

ведении в (26) интегрирования по  $d\vec{\varepsilon}_1, \dots, d\vec{\varepsilon}_A$  и суммирования по спин-изоспиновым переменным пользоваться хорошо известными правилами работы с детерминантами Слэтера [7].

Например, если оператор  $Q$  в (26) положить равным единице, для скалярного произведения двух К-гармоник немедленно получаем

$$\begin{aligned} \int u_s^+ u_{s'} \cdot d\Omega &= \int ds \mathcal{D}(s, \rho^2) A! \prod \int d\vec{\varepsilon}_j \tilde{\Phi}_{\omega_j}^+(j) \tilde{\Phi}_{\omega_j'}(j) = \\ &= \int ds \mathcal{D}(s, \rho^2) A! \delta_{ss'} = \delta_{ss'} \frac{2B^2}{\pi^{3/2} \Gamma(K + \frac{3}{2}(A-1))} \quad (27) \end{aligned}$$

Символ  $\delta_{ss'}$  в этой формуле равен нулю, если совокупности однонуклонных состояний  $\gamma = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  и  $\gamma' = \{\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n\}$  отличаются друг от друга хотя бы одним состоянием, т.к. если в  $\gamma$  есть такое  $\omega_i$ , которого нет в  $\gamma'$  и наоборот. В случае если совокупности  $\gamma$  и  $\gamma'$  совпадают друг с другом с точностью до перестановки  $P$ , то  $\delta_{ss'} = \pm I$  в зависимости от того, четная перестановка или нечетная. Т.к. перестановка однонуклонных состояний  $\omega_i$  внутри совокупности  $\gamma$  эквивалентна перестановке местами строк в детерминанте (16), т.е. просто изменению знака в определении (16), то все такие  $\gamma$  следует считать эквивалентными; они описывают одно и то же многонуклонное состояние.

Из (27) следует, что нормировочная постоянная в формуле (16) для К-гармоники равна

$$B^2 = \frac{\pi^{3/2} \Gamma(K + \frac{3}{2}(A-1))}{2} \simeq \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} e^{-[K + \frac{3}{2}(A-1)]} \cdot [K + \frac{3}{2}(A-1)]^{\frac{3}{2}(A-1)-\frac{3}{2}} \quad (28)$$

### § 5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ $W_{\gamma'}(\rho)$ .

Наибольший интерес для нас представляют формулы для эф-фективных взаимодействий  $W_{\gamma'}$  (см. (II)). Используя (I6) и соотношения предыдущего параграфа, перепишем выражение для э.в. в виде

$$W_{\gamma'}(\rho) = \int dS \sum_{i>j} U_{\gamma'}^+ \left( \sum_{i>j} \hat{U}(i,j) \right) U_{\gamma'}^- = \\ = \int ds D(s, \rho^2) \int dT_{3A} \left\{ \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(\epsilon)}(j)| \right\} \left( \sum_{i>j} \hat{U} \right) \left\{ \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(\epsilon)}(j)| \right\} \quad (29)$$

Это выражение легко упрощается [7]:

если  $\gamma = \gamma'$ , т.е.  $\omega_i = \omega_i'$ ,  $i = 1, 2, \dots, A$ , то

$$W_{\gamma}(\rho) = \sum_{i>j}^A \left\{ ds D(s, \rho^2) A! \left\{ \langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1,2) | \omega_i \omega_j \rangle - \langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1,2) | \omega_j \omega_i \rangle \right\} \right\} \quad (30)$$

если  $\gamma$  отличается от  $\gamma'$  одним однонуклонным состоянием, т.е.  $\omega_i = \omega_i'$  при  $i = 1, 2, \dots, (A-1)$ ;  $\omega_A \neq \omega_A'$ , то

$$W_{\gamma}(\rho) = \sum_{i=1}^{A-1} \left\{ ds D(s, \rho^2) A! \left\{ \langle \omega_i \omega_A | \hat{V}(1,2) | \omega_i \omega_A' \rangle - \langle \omega_i \omega_A | \hat{V}(1,2) | \omega_A' \omega_i \rangle \right\} \right\} \quad (30^I)$$

если  $\gamma$  отличается от  $\gamma''$  двумя однонуклонными состояниями, т.е.  $\omega_i = \omega_i''$  при  $i = 1, 2, \dots, (A-2)$ ;  $\omega_{A-1} \neq \omega_{A-1}'', \omega_A''$ ;  $\omega_r \neq \omega_{A-1}'', \omega_A''$ , то

$$W_{\gamma''}(\rho) = \int ds D(s, \rho^2) A! \left\{ \langle \omega_{A-1} \omega_A | \hat{V}(1,2) | \omega_{A-1}'' \omega_A'' \rangle - \langle \omega_{A-1} \omega_A | \hat{V}(1,2) | \omega_A'' \omega_{A-1}'' \rangle \right\} \quad (30^{II})$$

В этих формулах  $\mathcal{D}(s, p^2)$  определяется формулой (26<sup>I</sup>), а матричные элементы нуклон-нуклонного взаимодействия равны

$$\begin{aligned} & \langle \omega_i \omega_j | \hat{V}(1,2) | \omega_k \omega_\ell \rangle \equiv \\ & \equiv \int d\vec{\varepsilon}_1 d\vec{\varepsilon}_2 \tilde{\Phi}_{\omega_i(1)}^{(6)t} \phi_{\omega_j(2)}^{(6)} \hat{V}(1,2) \tilde{\Phi}_{\omega_k(1)}^{(6)} \tilde{\Phi}_{\omega_\ell(2)}^{(6)} \quad (3I) \end{aligned}$$

Вспоминая определение входящих сюда однонуклонных состояний  $\tilde{\Phi}_\omega$  (см. (2I)), видим, что это не что иное, как несимметризованный матричный элемент от взаимодействия между 1-м и 2-м нуклонами, взятый по собственным функциям осциллятора (24).

Появление как прямых, так и обменных м.э., от  $\hat{V}(1,2)$  в формулах (30–30<sup>II</sup>) связано с антисимметрией К-гармоник  $U_\delta$  и  $U_{\delta'}$ .

М.э. (3I) зависит от параметра  $\delta = s^{-\frac{1}{2}}$ , который входит в определение однонуклонных состояний  $\tilde{\Phi}$  (см. (2I–22)). Поэтому (30–30<sup>II</sup>) нельзя вынести из под знака интеграла. Тем не менее формулы (30–30<sup>II</sup>) для эффективных взаимодействий можно подвергнуть дальнейшему упрощению. Для этого произведем в этих формулах интегрирование по  $\omega_s$ , воспользовавшись методом перевала. При этом получим вместо (30), (30<sup>I</sup>) и (30<sup>II</sup>) соответственно

$$W_\delta^{(P)} \approx \sum_{i>j}^A \left\{ \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j \rangle - \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_j \bar{\omega}_i \rangle \right\} \quad (32)$$

$$W_\delta^{(P)} \approx \sum_{i=1}^{A-1} \left\{ \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_A | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_i \bar{\omega}_A' \rangle - \langle \bar{\omega}_i \bar{\omega}_A | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_A' \bar{\omega}_i \rangle \right\} \quad (32^I)$$

$$\begin{aligned} W_\delta^{(P)} \approx & \left\{ \langle \bar{\omega}_{A-1} \bar{\omega}_A | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_{A-1}'' \bar{\omega}_A'' \rangle - \right. \\ & \left. - \langle \bar{\omega}_{A-1} \bar{\omega}_A | \hat{V}(1,2) | \bar{\omega}_A'' \bar{\omega}_{A-1}'' \rangle \right\} \quad (32^{II}) \end{aligned}$$

Здесь матричные элементы от  $\hat{V}(1,2)$  по-прежнему определяются формулой (3I). Черта над буквой однонуклонного со-

стояния (например,  $\bar{\omega}_i$ ) обозначает, что параметр  $S$  входящий в однонуклонные состояния  $\Phi$ , заменен на

$$S \rightarrow \frac{K + \frac{3}{2}(A-1)}{P^2} \quad (33)$$

Другими словами, в качестве однонуклонных состояний  $\bar{\omega}_i$  в выражениях (32-32<sup>I</sup>) используются функции нуклона в осцилляторной яме:

$$U_{\text{осз}}(z) = \frac{\hbar^2}{2m\rho^4} [K + \frac{3}{2}(A-1)]^2 z^2 \quad (34)$$

Характерный радиус  $\bar{b}$  и частота  $\bar{\nu}$  этого осциллятора равны

$$\bar{b} = \frac{\rho}{\sqrt{K + \frac{3}{2}(A-1)}} ; \bar{\nu} = \frac{\hbar}{m\rho^2} [K + \frac{3}{2}(A-1)] \quad (34^I)$$

Волновые функции нуклона в осцилляторе (34-34<sup>I</sup>) даются общими формулами (21-22), в которых  $S^{-1/2}$  надо заменить на  $\bar{b}$ .

До сих пор мы все время работали в схеме, когда в качестве однонуклонных состояний выбираются состояния с фиксированными  $n, \ell, m, \mu, \tau$ . Эту схему естественно назвать  $(\ell, m, \mu)$  - схемой. С таким же успехом можно было бы выбирать однонуклонные состояния с фиксированными  $n, j, m_j, \ell, \tau$ . Такую схему можно назвать  $(j, m_j, \ell)$  - схемой. Переход от одной схемы к другой тривиален, и мы на этом не останавливаемся.

#### § 6. СВЯЗЬ С ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛЬЮ

Итак, ограничившись минимальным значением  $K$ , волновую функцию ядра можем записать в виде конечной суммы

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = \sum_r \rho^{-\frac{3A-4}{2}} \chi_r(\rho) u_r(r)$$

где  $K_{min}$  - гармоники  $u_r$  имеют следующий вид (см. (20)):

$$u_r = \frac{B}{\rho^{\kappa} \sqrt{A!}} B^{\kappa + \frac{3}{2} A} \cdot e^{\frac{\rho^2 + AR^2}{2B^2}} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(r)}(j)| \quad (20^I)$$

Здесь  $B$  - нормировочная постоянная (см. (28)),  $\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(r)}(j)$  - одиночеклонная волновая функция в осциллятором потенциале

$$U_{osc}(z) = \frac{\hbar^2}{2mB^2} \left(\frac{z}{\delta}\right)^2$$

описывающее состояние  $\omega_p = \{n_p, l_p, m_p, \mu_p, T_p\}$  (см. (21-22)).

Входящий во все эти формулы параметр "в" является произвольным более того, как видно из приведенного в предыдущих параграфах вывода,  $u_r$  - гармоника вообще не зависит от "в". В приведенной чуть выше формуле (20<sup>I</sup>) для  $u_r$  параметр "в" можно менять произвольным образом, не меняя вида  $u_r$ . Другими словами, легко убедиться, что "в" является фиктивным параметром, от коего  $u_r$  фактически не зависит:

$$\frac{du_r}{d\beta} = \frac{d^2u_r}{d\beta^2} = \dots = 0$$

Введем этот параметр исключительно из соображений удобства, т.к. представление  $u_r$  в написанном выше виде с  $\beta = s^{-\frac{1}{2}}$  сильно облегчает задачу вычисления эффективных взаимодействий  $W_r(p)$ . То же самое относится и к входящим в формулу для  $u_r$  величинам  $\rho$  и  $R$ . Фактически,  $u_r$  не зависит от  $\rho$  и  $R$ , но нам удобно писать  $u_r$  именно в таком виде.

В общем случае детерминант из одночастотных функций  $\det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}(j)|$  не обладает определенными значениями полного момента  $J$  и изоспина  $T$ . Методика построения функций с заданными  $J$  и  $T$  из детерминантов хорошо разработана в оболочечной модели (см. например [9]). Используя ее, получаем, что функции  $U_{J, T, \nu}(\Omega)$  с заданным  $J, T$  и  $\nu$  ( $\nu$  - все естественные квантовые числа, необходимые для классификации многонуклонного состояния), строятся в виде линейных суперпозиций с известными коэффициентами  $C_{J, T, \nu}^Y$ :

$$U_{J, T, \nu}(\Omega) = \sum_Y C_{J, T, \nu}^Y U_Y(\Omega) = \\ = \frac{B}{P^K} \delta^{K+\frac{3A}{2}} e^{\frac{P^2 + AR^2}{2\theta^2}} \sum_Y C_{J, T, \nu}^Y \frac{1}{VA!} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(6)}(j)| \quad (35)$$

Здесь через  $Y$  обозначается как и выше, совокупность одинонуклонных квантовых чисел:

$$Y = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_A\}; \quad \omega_p = \{n_p, \ell_p, m_p, M_p, T_p\}$$

Перепишем еще раз выражение для волновой функции в  $K = K_{\min}$  - притяжении:

$$\Psi_{J, T}(1, 2, \dots, A) = \frac{B}{P^{K+\frac{3A-1}{2}}} \delta^{K+\frac{3A}{2}} e^{\frac{P^2 + AR^2}{2\theta^2}} \sum_{\nu} X_{(P)}^{(\nu)} \phi_{J, T, \nu, \text{обол}}^{(6)}(1, 2, \dots, A) \quad (36)$$

Здесь мы ввели функцию

$$\phi_{J, T, \nu, \text{обол}}^{(6)}(1, 2, \dots, A) = \sum_Y C_{J, T, \nu}^Y \frac{1}{VA!} \det |\tilde{\Phi}_{\omega_p}^{(6)}(j)| \quad (37)$$

которая по построению и по смыслу является именно той функцией, которая в оболочечной модели с гармоническим самосог-

ласованным полем  $U_{\text{осн}}(\tau)$ , называется волновой функцией ядра.

Как мы только что видим, эта функция хотя и входит в выражение для волновой функции  $\Psi(1, 2, \dots, A)$ , но не описывает всю зависимость  $\Psi$  от координат  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_A$  нуклонов. Единственное, что можно сказать, это следующее: волновая ф-я  $\Psi(1, \dots, A)$  в  $K_{\min}$ - приближении имеет тот же тип симметрии, что и оболочечная функция  $\Phi_{\mathcal{G}_T, \nu, \text{обол}}^{(6)}(1, 2, \dots, A)$ .

Приведем, наконец еще одно и полезное выражение для волновой функции в  $K_{\min}$ - приближении. При этом используем то, что при вычислении эффективных взаимодействий  $W_g^{\sigma'}$  оказались хорошим приближением формулы (32), в которые в качестве одиночек состояний вошли состояния в осцилляторном потенциале

$$U_{\text{осн}}(\tau) = \frac{\hbar^2}{2m\bar{E}^2} \cdot \left(\frac{\tau}{\bar{E}}\right)^2, \quad \bar{E} = \frac{\rho}{\sqrt{k + \frac{3}{2}(A-1)}} \quad (38)$$

Из эстетических соображений приятно ввести это значение  $\bar{E}$  в волновую функцию. Тогда она запишется так:

$$\Psi_{\mathcal{G}_T}(1, 2, \dots, A) = \frac{\pi}{2^{\nu_4}} e^{\frac{A}{2}\left(\frac{R}{\bar{E}}\right)^2} \sum_v \chi^{(v)}\left(\bar{E}\sqrt{k + \frac{3}{2}(A-1)}\right) \Phi_{\mathcal{G}_T, \nu, \text{обол}}^{(6)}(1, 2, \dots, A) \quad (39)$$

где характерный радиус  $\bar{E}$  и координата  $R$  центра тяжести должны быть выражены через координаты нуклонов:

$$\bar{E}^2 = \frac{1}{A(k + \frac{3}{2}(A-1))} \sum_{i>j}^A (\vec{z}_i - \vec{z}_j)^2; \quad R^2 = \left(\sum_{i=1}^A \vec{z}_i\right)^2 \quad (40)$$

Интерпретировать последнее выражение для  $\Psi(1, 2, \dots, A)$ , если интерпретация вообще нужна, следует так: она представ-

ляет собой суперпозицию оболочечных функций  $\Phi_{J\pi,\text{обол}}^{(\nu)}$  ( $J \dots A$ ), отвечающий радиусом осцилляторного постенциала  $\bar{b}$ , которые сами определяются взаимным расположением нуклонов; функция распределения по радиусам осциллятора  $\bar{b}$  задается множителями

$$e^{\frac{1}{2}(\frac{R}{\bar{b}})^2} (\bar{b})^2 \chi^{(\nu)}(\bar{b} \sqrt{k + \frac{3}{2}(A-1)}) \quad (41)$$

причем последний из них должен находиться как решение дифференциальных уравнений (13), куда входят эффективные взаимодействия.

### § 7. ОБЩАЯ СХЕМА РАСЧЕТА СПЕКТРА ЯДРА

Приступим теперь к нахождению спектра уровней ядра в  $K_{\text{ши}}$ - приближении. Переходя с помощью способов, разработанных в модели оболочек, к гармоникам с заданными  $J$ ,  $T$  и  $\nu$ :

$$u_{JT\nu}(\rho) = \sum_{\sigma} c_{JT\nu}^{\sigma} u_{\sigma}(\rho) \quad (42)$$

легко находим и матрицу эффективных взаимодействий в  $(JT\nu)$ - представлении:

$$W_{JT\nu}^{JT\nu'}(\rho) = \sum_{\sigma, \sigma'} (c_{JT\nu}^{\sigma})^* c_{JT\nu'}^{\sigma'} W_{\sigma}^{\sigma'}(\rho) \quad (43)$$

Волновая функция ядра в этом представлении выписывалась нами ранее (см. (36)). Для функций  $\chi^{(\nu)}$  имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \frac{d^2}{dp^2} - \frac{2(\lambda+1)}{p^2} + \frac{2m}{h^2} (E - W_{\nu}^{\nu}(\rho)) \right\} \chi^{(\nu)}(\rho) = \quad (44)$$

$$= \frac{2m}{h^2} \sum_{\nu' \neq \nu} W_{\nu'}^{\nu'}(\rho) \chi^{(\nu')}(\rho)$$

Здесь и везде ниже мы не выписали явно индексы сохраняющихся величин  $J$ ,  $T$ , общих для всех  $X^{(\nu)}$  и  $W_{\nu}^{(\nu)}$ .

Заметим теперь, что полученные в § 5 матрицы эффективных взаимодействий имеют порядок:

$$W_{\nu} \sim A^2 V_0 ; W_{\nu}^{(\nu')} \sim A V_0 ; W_{\nu}^{(\nu'')} \sim V_0 \quad (45)$$

где  $A$  – число нуклонов, а  $V_0$  – величина взаимодействия между двумя нуклонами. Это позволяет ввести следующую запись:

$$W_{\nu}^{(\nu')}(\rho) = W_0(\rho) \delta_{\nu\nu'} + w_{\nu}^{(\nu)}(\rho) \quad (46)$$

где  $\delta_{\nu\nu'}$  – символ Кронекера,  $W_0(\rho)$  имеет порядок  $A^2 V_0$ , а недиагональная часть матрицы  $w_{\nu}^{(\nu)}(\rho) \leq \frac{1}{A} W_0(\rho)$ .

Возникновение малости  $\frac{1}{A}$  сильно упрощает задачу нахождения энергетического спектра. Этот подход не будет претендовать на большую точность, а лишь на то, чтобы качественно описать характер получающихся решений и спектр уровней. Для получения точных количественных результатов надо численно решать систему дифференциальных уравнений, выписанную выше.

Приближенный подход использует обычный метод. Рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2} + \frac{2m}{h^2} (E - W_0(\rho)) \right\} \chi_0(\rho) = 0 \quad (47)$$

Решение этого уравнения обозначим через  $\chi_{0n}(\rho)$ , а соответствующие собственные значения через  $E_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Для решения написанной выше системы дифференциальных уравнений для функций  $X^{(\nu)}$ , можем использовать стандартный приближенный метод, согласно которому эти функции надо искать в виде:

$$X^{(\nu)} = \sum_n a_{\nu n} \chi_{0n} \quad (48)$$

Подставляя эти выражения в систему (44), умножая слева на  $\chi_{on}$ , интегрируя по  $d\rho$  и используя ортогональность функций  $\chi_{on}$ :

$$\int_0^\infty d\rho \chi_{on}(\rho) \chi_{om}(\rho) = \delta_{nm}$$

получаем уравнения на коэффициенты  $a_{vn}$ :

$$(E - E_n) a_{vn} - \sum_{n'n'} \langle n, \omega_v^{v'}, n' \rangle a_{vn'} = 0 \quad (49)$$

где  $\langle n, \omega_v^{v'}, n' \rangle \equiv \int_0^\infty \chi_{on}(p) \omega_v^{v'}(p) \chi_{on'}(p) dp \quad (50)$

Для определения спектра энергии имеем секулярное уравнение:

$$\det |(E - E_n) \delta_{vv'} \delta_{nn'} - \langle n, \omega_v^{v'}, n' \rangle| = 0 \quad (51)$$

После того, как найдены энергии состояний, можно найти значения коэффициентов  $a_{vn}$  и построить волновые функции состояний ядра. Используя введение выше обозначения получаем:

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = B \left( \frac{\ell}{\rho} \right)^{\frac{K+3}{2}} \rho^2 e^{\frac{\rho^2 - AR^2}{2\ell^2}} \sum_n \chi_{on}(p) \sum_v a_{vn} \phi_{v, \text{обол}}^{(6)}(1, 2, \dots, A) \quad (52)$$

Целесообразно сравнить полученные результаты с тем, что дает применение стандартной оболочечной модели. Решение задачи в этом последнем случае ищется в виде:

$$\Psi_{\text{обол}}(1, 2, \dots, A) = \sum_v \alpha_v \tilde{\mathcal{P}}_{v, \text{обол}}^{(\ell)}(1, 2, \dots, A) \quad (53)$$

Обозначив остаточное взаимодействие между нуклонами через  $\hat{W}^{(\text{ост.})} \equiv \sum_{i>j}^A \hat{V}_{(i,j)}^{(\text{ост.})}$  получаем определения коэффициентов

$\alpha_{\nu}$  систему уравнений:

$$(E - E_0) \alpha_{\nu} - \sum_{\nu'} \langle \nu, \hat{W}^{(act.)}, \nu' \rangle \alpha_{\nu'} = 0 \quad (54)$$

$$\langle \nu, \hat{W}^{(act.)}, \nu' \rangle \equiv \langle \Phi_{\nu, \text{обол.}}^{(e)}, \hat{W}^{(act.)} \Phi_{\nu', \text{обол.}}^{(e)} \rangle \quad (54I)$$

Сравнивая 3 последние формулы с полученными выше, видим одно принципиальное отличие: при "оболочечном подходе" получается только часть из уровней, следующих из уравнений метода К-гармоник (при  $K = K_{\text{ши}}$ ). Связано это с тем, что в методе К-гармоник явно учитывается коллективная степень свободы  $P$ , и возбуждение коллективных движений (им отвечают решения  $X_{\text{оп}}$ ) дает начало целым полосам состояний, которым нет места в оболочечном подходе.

#### § 8. ВВЕДЕНИЕ В ЗАДАЧУ КОЛЛЕКТИВНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

При дальнейшем развитии метода К-гармоник можно идти в нескольких направлениях. Одно – это учет членов с  $K > K_{\text{ши}}$  в разложении волновой функции и суммирование отдельных цепочек таких членов. Второе направление – это введение в задачу кроме  $P$  и других коллективных степеней свободы. Оба эти направления тесно связаны друг с другом, но второе направление с точки зрения методики является более простым. Ниже будут приведены некоторые результаты, полученные на этом пути.

По-прежнему будем исходить из уравнения Шредингера с гамильтонианом:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \Delta_i + \sum_{i>j}^A \hat{V}(i,j)$$

и введем тензор инерции рассматриваемой системы нуклонов

$$q_{st} = \sum_{i=1}^A p_i^{(s)} p_i^{(t)} ; \vec{P}_i \equiv \vec{z}_i - \vec{R} \quad (55)$$

Прежде чем идти дальше, заметим, что уравнение (14) для функций  $\chi(p)$  в основном приближении можно было бы получить с помощью вариационного принципа, задаваясь формой (13) для волновой функции. Сейчас мы будем действовать именно таким способом.

Зададим вид волновой функции нашей системы

$$\psi(1, 2, \dots, A) = \chi(q_{st}) P_k(1, \dots, A) \quad (56)$$

Где  $P_k$  - гармонический полином минимальной при данном  $A$  степени, а через  $\chi(q_{st})$  обозначена некая функция от всех шести независящих компонент тензора инерции, пр-ия для которой сейчас и будем искать.

В уравнении вариационного принципа

$$\delta(\psi, \hat{H}\psi) = 0 ; (\psi, \psi) = 1 \quad (57)$$

произведем вариацию по  $\chi$ . Для того, чтобы это выполнить, надо хотя бы формально сделать набор  $q_{st}$  независимым от набора координат  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_A$ . Это достигается введением в выражения для матричных элементов шести  $\delta$ -функций:

$$\delta(q_{st} - \sum_i p_i^{(s)} p_i^{(t)}) \equiv \delta(q_{xx} - \sum_i p_i^{(x)} p_i^{(x)}) \dots \delta(q_{zz} - \sum_i p_i^{(z)} p_i^{(z)}) \quad (58)$$

При этом

$$\prod_{i=1}^A d\vec{z}_i = \delta(q_{st} - \sum_i p_i^{(t)} p_i^{(t)}) d\vec{q}_{st} \prod_{i=1}^A d\vec{z}_i \quad (59)$$

$$d\vec{q}_{st} \equiv dq_{xx} dq_{xy} \dots dq_{zz}$$

Подставив (59) в (57) увидим, что вариация по  $\chi$  может проводиться без затрагивания функций  $\mathcal{T}_K$ . После простых, но несколько длинных вычислений получим для функции  $\chi$  уравнение:

$$(\hat{H}_{ком} - E) \chi(q_{st}) = 0 \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ком} = & -\frac{2h^2}{m\mathcal{D}} \left\{ \sum_{stp} \frac{\partial}{\partial q_{tp}} q_{st} \frac{\partial}{\partial q_{sp}} - \sum_s \frac{1}{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_{ss}} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{stp} \frac{1}{\mathcal{D}} q_{sp} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial q_{st} \partial q_{pt}} \right) \left\{ \mathcal{D} + \frac{1}{\mathcal{D}^2} \int d\mathcal{T}_{3A} \vec{\delta}(q_{st} - \sum_i p_i^{(t)}) \mathcal{T}_K^+ \sum_{i>j}^A \hat{V}(i,j) \mathcal{T}_K \right\} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

Где

$$\mathcal{D}^2 = \int d\mathcal{T}_{3A} \vec{\delta}(q_{st} - \sum_i p_i^{(t)}) \cdot \mathcal{T}_K^+ \mathcal{T}_K \quad (61^I)$$

Приведенные выше формулы <sup>можно</sup> упростить, вводя сопряженные импульсы

$$\hat{\mathcal{J}}_{st} \equiv -ih \frac{1 + \delta_{st}}{2} \frac{\partial}{\partial q_{st}} \quad (62)$$

и вводя новую функцию

$$\bar{\chi} \rightarrow \mathcal{D}\chi \quad (63)$$

Для этой новой функции уравнение Шредингера имеет вид:

$$(\hat{T}_0 + \hat{T}_1 + \hat{V} - E) \bar{\chi} = 0 \quad (64)$$

где

$$\hat{T}_0 = \frac{2}{m} \sum_{stP} (\hat{\pi}_{tP} q_{sp} \hat{\pi}_{st}) \quad (65)$$

$$\hat{T}_1 = -\frac{2}{mD} \sum_{stP} (\hat{\pi}_{st} q_{sp} \hat{\pi}_{tP} D) \quad (66)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{D^2} \int dT_{3A} \bar{\delta}(q_{st} - \sum_i \bar{p}_i p_i^{(\epsilon)}) T_k^+ \sum \hat{V}(ij) T_k \quad (67)$$

Всего имеется 6 переменных  $q_{st}$ ; переходом во вращающуюся систему координат, описываемую углами Эйлера  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , можно сделать тензор  $q_{st}$  диагональным. При этом оператор кинетической энергии станет равным:

$$\begin{aligned} \hat{T}_0 = & \frac{2h^2}{m} \left\{ -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} q_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \left[ \frac{1}{q_1 q_2} (q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}) + \text{цикл.перест.} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left[ \frac{q_1 + q_2}{(q_1 - q_2)^2} \hat{\mathcal{L}}_3^2 + \text{цикл.перестановка} \right] \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь через  $q_i$  обозначены 3 компоненты тензора (диагональные) во вращающейся системе координат, а  $\hat{\mathcal{L}}_i$  — операторы проекций орбитального момента количества движения на главные оси вращающегося эллипсоида. Выписанный выше оператор кинетической энергии является точным в рамках сделанного нами в самом начале <sup>чно</sup> предположения о том, что динамические коллективные переменные  $q_{st}$  составляют симметричный тензор второго ранга.

### § 9. ФОРМА СИСТЕМЫ НУКЛОНов

При исследовании статической деформации ядра можно исходить из физически оправданного предположения, что вращение

ядра как целое не влияет на его форму. Если это так, то можно затормозить ядро "руками" и в исходном гамильтониане положить:

$$q_{st} = \delta_{st} q_s; \hat{\pi}_{st} = \hat{\pi}_t \delta_{st} = -i\hbar \delta_{st} \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (69)$$

В этом случае

$$\hat{H}_{\text{колл}} = \frac{2}{m} \sum_s \hat{\pi}_s q_s \hat{\pi}_s - \frac{2}{m\omega} \sum_s (\hat{\pi}_s q_s \hat{\pi}_s \omega) + \hat{V} \quad (70)$$

Оператор кинетической энергии становится теперь равным:

$$\hat{T}_0 = \frac{2}{m} \sum_s \hat{\pi}_s q_s \hat{\pi}_s = -\frac{2\hbar^2}{m} \sum_s (q_s \frac{\partial^2}{\partial q_s^2} + \frac{\partial}{\partial q_s}) \quad (71)$$

Для вычисления второго и третьего членов (70) необходимо конкретизировать вид гармонических полиномов

Используя такие же приемы, что и в первых параграфах, можно полиномы  $P_k$  привести к виду:

$$P_k = \frac{C_{\vec{n}}}{(q_1 q_2 q_3)^{\frac{1}{2}} \sqrt{A!}} \det |\tilde{\Phi}_{\vec{n}}(i)| \quad (72)$$

$$\tilde{\Phi}_{\vec{n}}(i) = \frac{H_{n_x}(x_i) H_{n_y}(y_i) H_{n_z}(z_i)}{[2^{n_x+n_y+n_z} \pi^3 n_x! n_y! n_z!]^{\frac{1}{2}}} \Delta_{N_T}(i) \quad (73)$$

$$C_{\vec{n}} = C_{n_x, n_y, n_z} = \left( \frac{2^{n_x+n_y+n_z}}{n_x! n_y! n_z! \pi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (74)$$

$n_1 = \sum_{i=1}^A n_{x_i}; n_2 = \sum_{i=1}^A n_{y_i}; n_3 = \sum_{i=1}^A n_{z_i}$ . (сумма по за-  
полнению),  $H_n$  - полиномы Эрмита.

Проводя вычисления дальше, можно получить следующие формулы:

$$\mathcal{D}^2 = \frac{C \frac{2}{\pi} q_1^{\frac{A-3}{2} + K_1} q_2^{\frac{A-3}{2} + K_2} q_3^{\frac{A-3}{2} + K_3}}{\pi^{3/2} \Gamma(K_1 + A + \frac{1}{2}) \Gamma(K_2 + A + \frac{1}{2}) \Gamma(K_3 + A + \frac{1}{2})} \quad (75)$$

$$-\frac{2}{m \mathcal{D}} \sum_{s=1}^3 (\hat{\pi}_s q_s \hat{\pi}_s \mathcal{D}) = \sum_{s=1}^3 \frac{(\frac{A-3}{2} + K_s)^2}{2 m q_s} \quad (76)$$

Здесь  $K_s$  - это степени  $x^-$ ,  $y^-$  и  $z^-$  - компонент координат частиц в полиноме  $\mathcal{P}_K$ .

Окончательный вид уравнения следующий:

$$\left\{ -\frac{2h^2}{m} \sum_{s=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial q_s} q_s \frac{\partial}{\partial q_s} - \left( \frac{\frac{A-3}{2} + K_s}{q_s} \right)^2 \right] + \left[ \hat{V}_K^{\vec{k}} - E \right] \right\} K(q_s) = 0 \quad (77)$$

Мы не будем здесь как-либо конкретизировать вид потенциала  $\hat{V}_K^{\vec{k}}$ . Заметим лишь, что при заданном нуклон-нуклонном взаимодействии он может быть вычислен. К настоящему времени такие расчеты были сделаны для ядер  $Be^{8+}$ ,  $C^{12+}$  и  $O^{16+}$  и были вычислены энергия связи, размеры и форма этих ядер.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.А. Симонов. ЯФ, 3, 630, 1966.
2. А.М. Бадалян, Е.С. Гальперн, В.Н. Ляховицкий, В.В. Пустовалов, Ю.А. Симонов, Е.Л. Сурков. ЯФ, 6, 473, 1967.
3. А.М. Бадалян, Е.С. Гальперн, В.Н. Ляховицкий. ЯФ, 8, ЗИЗ, 1968.
4. Ю.А. Симонов, ЯФ, 7, 1210, 1968.
5. Е.Л. Сурков. ЯФ, 6, 908, 1967.
6. А.М. Бадалян, Ю.А. Симонов. ЯФ, 9, 69, 1969.
7. Г. Бете. "Квантовая механика". "Мир", Москва, 1965.
8. I.Talmi, A.de-Shalit. "Nuclear Shell Theory", 1963.
9. H. Mang, H. Weidenmüller, *Annual Review of Nucl. Sci.*, 1968, p.I.
10. П.С. Градштейн и И.М. Рыжик, "Таблицы интегралов...", Физматгиз, Москва, 1963.
- II. Н.Я. Виленкин. "Специальные функции и теории представлений групп". Москва, "Наука", 1965.

1-61343. Подписано к печати 25/III-1971 г. Зак.439. Тир.200.

Тип. МИФИ, М.Пионерская, 12