

539.1

B85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теории ядра. дис.

ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА

(КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ)

Э. Е. САПЕРШТЕИН

**ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ
И СВОЙСТВА НИЗКОЛЕЖАЩИХ
ВОЗБУЖДЕНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР**

МОСКВА — 1971

539

885

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

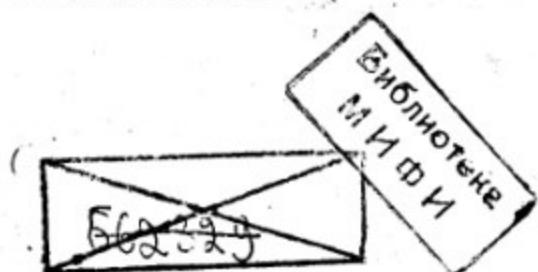
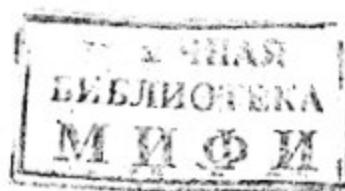
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической ядерной
физике, 1я сессия
ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ ЯДРА
(Конспекты лекций)

Э. Е. САПЕРШТЕИН

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ И СВОЙСТВА НИЗКО-
ЛЕЖАЩИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ АТОМНЫХ ЯДЕР

Всесоюз. конф.
1971
484164



МИФИ - 1971 г.

I. Введение

Атомное ядро представляет собой систему, состоящую из большого числа сильно взаимодействующих частиц, и полное квантовомеханическое описание такой системы практически невозможно. Однако, как и в других случаях проблемы многих тел, задача существенно упрощается, если ограничиться рассмотрением низкоклешащих возбужденных состояний. Эти состояния, как правило, имеют простую природу: они соответствуют появлению небольшого числа квазичастиц и квазидырок, взаимодействующих между собой. Так, например, колективные колебательные состояния могут быть интерпретированы как связанное состояние одной квазичастицы и одной квазидырки. Поскольку число квазичастиц, участвующих в никаких возбуждениях невелико, их можно рассматривать как газ, т.е. пренебрегать тройными соударениями.

Свойства квазичастиц заметно отличаются от свойств частиц. Взаимодействие между квазичастицами сильно отличается от взаимодействия между свободными нуклонами, в частности, оно является запаздывающим. Поэтому в некоторых случаях поведение квазичастиц не может быть описано с помощью гамильтоновского формализма. В лекциях мы столкнемся с такими примерами.

Как показано в теории конечных ферми-систем /1/, взаимодействие между квазичастицами может быть охарактеризовано несколькими параметрами, одинаковыми для всех ядер, кроме самых легких. Выделение таких универсальных параметров - нетривиальная задача. Все величины, характеризующие взаимодействие, могут быть разделены на две категории. К первой относятся те величины, которые определяются локальными свойствами ядерного вещества и поэтому одинаковы для всех ядер с той же точностью,

что и плотность ядерного вещества. Ко второй относятся величины, определяемые взаимодействием на больших расстояниях, возникающим из-за поляризации среды. Такие величины чувствительны к структуре уровней вблизи поверхности Ферми и меняются от ядра к ядру и в зависимости от энергии возбуждения ядра.

В теории бесконечной ферми-жидкости Ландау было показано, что при рассмотрении длинноволновых возбуждений вблизи поверхности Ферми в качестве локального взаимодействия входит амплитуда \mathcal{F} рассеяния квазичастиц на угол ноль. В теории конечных ферми-систем было показано, что при рассмотрении поведения ядра в длинноволновом внешнем поле (задачи о нахождении статических моментов и вероятностей низкочастотных переходов) роль локального взаимодействия квазичастиц также играет амплитуда \mathcal{F} рассеяния на угол ноль. Параметры, характеризующие ее, являются универсальными константами теории.

Однако даже в длинноволновом внешнем поле положение часто усложняется: из-за отражения квазичастиц от поверхности ядра в эффективном поле, действующем на квазичастицы, могут появляться быстро осциллирующие компоненты, отвечающие большим передаваемым импульсам $\mathcal{q} \sim p_F$. Они определяются амплитудой рассеяния при больших значениях передаваемого импульса, рассмотрение которой требует более сложной параметризации, чем амплитуда \mathcal{F} .

Другой круг задач, в которых значение амплитуды рассеяния на угол ноль недостаточно, - это задача о спектрах, для решения которой нам нужно знать матричные элементы полной амплитуды взаимодействия $\langle J | \Gamma | J \rangle$ с определенным значением момента J двух квазичастиц (или аналогичные матричные элементы с фиксированным моментом J частицы с дыркой).

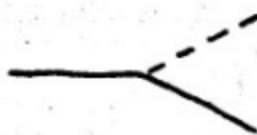
В волновой функции Ψ_J двух квазичастиц малые $q \sim q \sim p_F$, как правило, входят с равным весом. Анализ этих матричных элементов показывает, что в эти матричные элементы вносит существенный вклад как дальнодействие в канале двух частиц, так и дальнодействие в канале частица-дырка. Рассмотрение этого круга задач приводит к системе 2-канальных уравнений, в которых оба канала входят равноправным образом. Эти уравнения могут быть преобразованы таким образом, что неуниверсальные части эффективного взаимодействия Γ выражаются через одну универсальную амплитуду взаимодействия Γ'' . Если в ядерной материи спаривания нет, то внутри ядра Γ'' совпадает с амплитудой рассеяния квазичастиц в ядерной материи на произвольный угол. Если в ядерной материи есть спаривание, то рецепт введения универсального взаимодействия сложнее.

2. Графики Фейнмана

Этот раздел является дополнительным и предназначен для самостоятельного прочтения теми слушателями, которые плохо знакомы с графической техникой в рамках квантовой электродинамики или проблемы многих тел. В рамках этого метода различные физические процессы изображаются в виде рисунков. Так, движение света изображается пунктиром:

движение частицы изображают линией

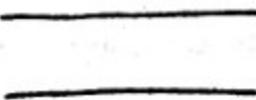
Такая картинка



означает, что заряженная частица, допустим, электрон, испус-

тила квант света. Сплошная линия нарисована с изломом, чтобы показать, что электрон после испускания кванта приобретает другой импульс.

Пусть есть две невзаимодействующие частицы:



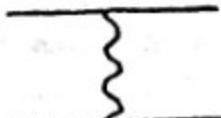
Если они взаимодействуют, рисуют такую картинку:



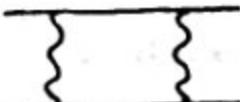
Если их взаимодействие осуществляется с помощью квантов света (это значит, что взаимодействие — кулоновское), тогда линии соединяют пунктирной линией:



Если это два нуклона и взаимодействие осуществляется передачей π -мезона, тогда рисуют волнообразную линию между линиями частиц:



Эта картинка показывает, что два нуклона один раз взаимодействовали между собой. Если они взаимодействовали два раза, то рисуют так:



Аналогично можно изобразить и более сложные процессы, происходящие с частицами.

Для того, чтобы эти рисунки имели не только иллюстративный, но и количественный смысл, будем понимать под каждым графиком амплитуду перехода из одного состояния в начальный момент в другое состояние в конечный момент времени. Квадрат амплитуды перехода дает вероятность нахождения конечного со-

стояния в конечный момент времени. Так, например, приведенный выше пунктирный график означает амплитуду свободного распространения фотона (она называется функцией Грина или \mathcal{D} -функцией фотона), сплошная линия означает амплитуду свободного распространения электрона или другой частицы (соответственно, функция Грина или G -функция электронов). График испускания кванта означает амплитуду перехода заряженной частицы с импульсом \vec{P} в состояние с квантим импульса \vec{K} и частицей с импульсом $\vec{P} - \vec{K}$.

Согласно принципу суперпозиции полная амплитуда перехода, или как ее обычно называют функция Грина, представляет собой сумму всех возможных физических различных амплитуд перехода. Как мы сейчас увидим, можно, используя принцип суперпозиции и классифицируя графики тем или иным способом, получать соотношения между различными амплитудами перехода. Для того, чтобы записать эти соотношения в обычной аналитической форме, следует только установить соответствие между простейшими элементами графиков и аналитическими выражениями. Поясним, как это делается, на нескольких простых, но важных примерах. Прежде всего получим графическим способом известное соотношение, связывающее амплитуду рассеяния двух частиц с потенциалом взаимодействия. Графически амплитуда рассеяния изобразится, согласно принципу суперпозиции, суммой графиков:

$$\Gamma = \boxed{\text{hatched rectangle}} = \underbrace{\text{wavy line}}_{\text{one particle}} + \underbrace{\text{wavy line}}_{\text{two particles}} + \underbrace{\text{wavy line}}_{\text{three particles}} + \dots$$

Первый из графиков изображает взаимодействие между частицами. Второй из графиков соответствует двукратному взаимодействию частиц.

Между актами взаимодействия стоит амплитуда перехода двух невзаимодействующих частиц.

Будем сопоставлять первому графику потенциал взаимодействия между частицами

$$V = \boxed{\quad}$$

а линии — функцию Грина, то есть амплитуду перехода G свободной частицы. Тогда второй график условно записывается

$$\boxed{\quad} = VK_0V = VGGV$$

Действительно, амплитуда перехода двух свободных частиц K_0 равна произведению функций Грина каждой из частиц. Для амплитуды рассеяния получится ряд

$$\Gamma = V + VGGV + VGGVGGV + \dots$$

Выражение, стоящее во втором и следующих членах справа от GG , снова образует сумму, дающую Γ . Для Γ получается уравнение

$$\Gamma = V + VGG\Gamma$$

Функция G , входящая в это уравнение, как мы увидим ниже, легко находится.

Очевидно, что выражение для Γ представляет собой символическую запись известного из квантовой механики уравнения для амплитуды рассеяния

$$f(\vec{P}, \vec{P}_2) = V(\vec{P}, \vec{P}_2) + \int \frac{V(\vec{P}, \vec{P}') f(\vec{P}', \vec{P}_2) d\vec{P}'}{(\varepsilon_{\vec{P}} - \varepsilon_{\vec{P}'} + i\gamma) (2\pi)^3}$$

($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}'$ — импульсы в системе центра инерции).

Сравнивая уравнения для Γ и f , можно установить точное соответствие графических и аналитических выражений.

Аналогичным образом можно связать функцию Грина частицы во внешнем поле \tilde{G} с функцией Грина свободной частицы G . Функция Грина в поле \tilde{G} изобразится суммой частных амплитуд перехода

$$\tilde{G} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots,$$

где точка с пунктиром изображает акт действия внешнего поля V .

$$V = \text{---}$$

Собирая все графики, стоящие в \tilde{G} справа от V , получаем опять \tilde{G} . Таким образом,

$$\tilde{G} = G + GV\tilde{G}$$

Сравнивая поправку к G в первом порядке теории возмущений по V :

$$G' = GVG$$

с известным квантовомеханическим выражением, легко установить, в каком смысле следует понимать умножение в символической формуле для \tilde{G} .

Таким образом, идея графического метода состоит в том, чтобы на простых примерах установить соответствующие между элементами графиков и аналитическими выражениями, после чего можно научиться расшифровывать любые графики, состоящие из этих элементов.

Получение обобщенных графическим методом настолько проще, чем аналитические выводы, что удается легко разобраться в сложных задачах, которые при аналитическом подходе кажутся неразрешимыми.

Дальше метод графиков Фейнмана будет широко использоваться.

3. Квазичастицы

Основной физической идеей теории конечных Ферми-систем, как и теории Ферми-жидкости Ландау, является идея квазичастиц. Ядро представляет собой систему сильно взаимодействующих частиц-нуклонов. Эти частицы, двигаясь в среде, вовлекают в движение соседние частицы. Такой конгломерат имеет сложную структуру. Но т.к. в системе все характерные величины: среднее расстояние между частицами ζ_0 , радиус действия потенциала взаимодействия, интенсивность V взаимодействия - в некоторых безразмерных единицах - одного порядка (порядка единицы), то размеры этого конгломерата также порядка ζ_0 (или, другими словами, порядка единицы). В ряде процессов, например, при рассмотрении движения этого конгломерата в длинноволновом внешнем поле его можно рассматривать как цезе - квазичастицу, которая имеет эффективную массу M^* и эффективный заряд e_q , вообще говоря, отличные от массы и заряда свободных нуклонов. Однако, исходя из закона сохранения электрического заряда, можно показать, что заряд квазичастицы по отношению к длинноволновому электрическому полю равняется заряду частиц (1 для протона и 0 для нейтрона). Аналогичным образом из закона сохранения момента следует, что спин квазичастиц равняется 1/2.

Таким образом, по многим своим свойствам квазичастицы похожи на частицы, этим и объясняется во многом успех квантовой теории оболочек.

Каков точный смысл понятия квазичастица, становится ясно, если рассмотреть 1-частичную функцию Грина.

4. Функция Грина квантовомеханической системы

Рассмотрим сначала функцию Грина квантовомеханической системы. Ψ -функция системы удовлетворяет уравнению

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H(\xi) \right) \Psi(\xi, t) = 0 \quad (1)$$

где ξ есть набор координат, описывающих систему, а H - ее гамильтониан. Будем считать, что H не зависит от времени, тогда функция Грина системы $G(\xi, \xi', \tau)$ определяется соотношением:

$$\Psi(\xi, t + \tau) = C_N \int G(\xi, \xi', \tau) \Psi(\xi', t) d\xi' \quad (2)$$

т.е. G - функция есть ни что иное как амплитуда перехода. Здесь $\int d\xi'$ означает интегрирование по всем координатам и суммирование по спиновым переменным. Нормировочный множитель $C_N = i^N$, где N - число частиц в системе. Легко видеть, что функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$-iC_N \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - H(\xi) \right) G(\xi, \xi', \tau) = \delta(\tau) \delta(\xi - \xi') \quad (3)$$

причем $G_{\tau < 0} = 0$.

Если $\Psi_s(\xi)$ - некая полная система функций, то можно ввести:

$$G(\xi, \xi', \tau) = \sum G_{ss'}(\tau) \Psi_s(\xi) \Psi_{s'}^*(\xi')$$

Если Ψ_s - собственные функции системы: $H\Psi_s = E_s \Psi_s$, то из уравнения для G легко видеть, что

$$-iC_N G_{ss'}(\tau) \equiv G_s(\tau) (-iC_N) \delta_{ss'} = \delta_{ss'} e^{-iE_s \tau} \theta(\tau)$$

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

Перейдя отсюда в \mathcal{E} -представление, получим

$$C_N G_{s'}(\varepsilon) = C_N \int G_s(\tau) e^{i\varepsilon\tau} d\tau = \frac{i}{\varepsilon - E_s + i\gamma}, \quad (4)$$

$i\gamma$ - бесконечно малая добавка, показывающая правило обхода.

Если рассматриваемая система состоит всего из одной частицы,

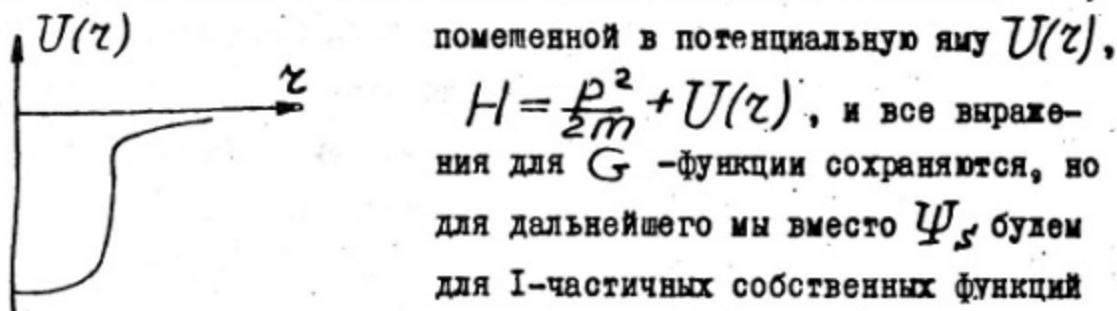


Рис. I

$H = \frac{p^2}{2m} + U(z)$, и все выражения для G -функции сохраняются, но для дальнейшего мы вместо Ψ_s будем для I-частичных собственных функций гамильтониана H употреблять обозначения $\varphi_\lambda(\vec{z})$ ($\vec{z} = (\vec{z}, s)$), тогда

$$\begin{aligned} G(\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon) &= \sum_\lambda G_\lambda(\varepsilon) \varphi_\lambda(\vec{z}) \varphi_\lambda^*(\vec{z}') = \\ &= \sum_\lambda \frac{\varphi_\lambda(\vec{z}) \varphi_\lambda^*(\vec{z}')}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda + i\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если частица свободная, то в качестве $\varphi_\lambda(\vec{z})$ удобно выбрать плоские волны и

$$G(\vec{P}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_P + i\gamma} \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_p = p^2/2m$$

5. Одночастичная функция Грина

Перейдем теперь к рассмотрению ферми-системы - сначала идеального ферми-газа. Рассмотрим 1-частичную функцию Грина, т.е. не функцию Грина всей системы, а амплитуду, описывающую распространение одной частицы.

Как мы видели, $G_{\lambda\lambda'}(\tau)$ имеет смысл амплитуды перехода частицы из состояния λ в момент t в состояние λ' в момент $t+\tau$. Для одной частицы мы имели

$$G_{\lambda\lambda'}^0 = \delta_{\lambda\lambda'} \begin{cases} -ie^{-i\varepsilon_\lambda \tau}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

Единственное отличие в нашем случае возникает из-за принципа Паули: амплитуда перехода пропорциональна $\sqrt{(1-n_\lambda)(1-n_{\lambda'})}$, (т.к. число свободных мест в состоянии λ есть $1-n_\lambda$), т.е. функция Грина частицы в ферми-газе имеет вид:

$$G_{\lambda\lambda'}^+(\tau) = \delta_{\lambda\lambda'} (1-n_\lambda) \begin{cases} -ie^{-i\varepsilon_\lambda \tau}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

Аналогично можно ввести функцию Грина дырки:

$$G_{\lambda\lambda'}^-(\tau) = \delta_{\lambda\lambda'} n_\lambda \begin{cases} -ie^{-i\varepsilon_\lambda^- \tau}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

Здесь ε_λ^- - энергия дырки, т.е. разность энергий системы до и после появления дырки. В идеальном ферми-газе

$$n_\lambda = \begin{cases} 1, & \varepsilon_\lambda < \varepsilon_F \\ 0, & \varepsilon_\lambda > \varepsilon_F \end{cases}$$

где ε_F обозначает энергию Ферми системы.

Удобнее, однако, функции Грина частицы и дырки объединить в одну функцию, определенную для любых τ :

$$G_\lambda(\tau) = \begin{cases} G_\lambda^+(\tau), & \tau > 0 \\ -G_\lambda^-(\tau), & \tau < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Напомним, что $\tau = t, -t_2$.

Именно такая функция Грина есть аналог вводимой в квантовой электродинамике, она может быть определена аналитически выражением

$$G_{\lambda\lambda'}(\tau) = -i \langle 0 | T \{ a_\lambda(t+\tau) a_{\lambda'}^\dagger(t) \} | 0 \rangle, \quad (7)$$

где T означает упорядочение по времени, a^\dagger и a - операторы рождения и уничтожения. Выражение (7) справедливо и во взаимодействующей системе, тогда $|0\rangle$ - основное состояние системы (физический вакуум), а операторы рождения и уничтожения записаны в представлении Гайзенберга:

$$a_\lambda(t) = e^{iHt} a_\lambda e^{-iHt},$$

где H - гамильтониан системы.

Из этого выражения для G -функции легко установить ее связь с I-частичной матрицей плотности ρ . Действительно, легко видеть, что

$$\rho_{\lambda\lambda'} = \langle 0 | a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} | 0 \rangle = -i G_{\lambda\lambda'}(0) \equiv \quad (7*)$$

$$\equiv \lim_{\tau \rightarrow -0} G_{\lambda\lambda'}(\tau) = \int_{\tau \rightarrow -0} G_{\lambda\lambda'}(\varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d\varepsilon}{2\pi i}$$

Мы определим (7) для функции Грина пользоваться не будем.

Оно однако необходимо для строгого рассмотрения свойств функции Грина: для получения спектрального разложения, изучения аналитических свойств и т.п.

Мы получили вид функции Грина для идеального ферми-газа. Как мы уже говорили, в ферми-системе с взаимодействием также существуют возбуждения (квазичастицы и квазидырки), которые имеют свойства, близкие свойствам частиц и дырок в ферми-газе, и поэтому описываются такими же амплитудами распространения - функциями Грина. Для доказательства мы должны рассмотреть уравнение для функции Грина в системе с взаимодействием (уравнение Дайсона).

Проще всего это уравнение получить, пользуясь графическим методом. Изобразим точную функцию Грина G сплошной жирной линией, сплошной тонкой - "голую" функцию Грина G^0 , т.е. амплитуду распространения частицы без взаимодействия с частицами фона. Все графики можно классифицировать следующим образом. Прежде всего - это единственный график, соответствующий свободному движению. Все остальные графики имеют следующий вид: до некоторой точки частица движется свободно, затем происходит столкновение, в результате которого образуется несколько частиц и дырок, затем опять возникает свободное движение и акты столкновений повторяются. Все это графически можно изобразить так: сначала свободное движение, затем сумма графиков, не содержащих частей, соединенных одной линией и затем полная амплитуда перехода из промежуточного состояния в конечное.

Графически все это изобразится так:

$$G = \frac{1}{\underline{\hspace{2cm}}} \frac{2}{\underline{\hspace{2cm}}} = \frac{1}{\underline{\hspace{2cm}}} \frac{2}{\underline{\hspace{2cm}}} + \frac{1}{\underline{\hspace{2cm}}} \frac{3}{\Sigma} \frac{4}{\underline{\hspace{2cm}}}$$

Здесь буквой \sum изображена, как говорят, неприводимая совокупность графиков, переводящих одну линию в одну, т.е. совокупность графиков, не содержащих частей, соединенных одной линией. Символически это уравнение имеет вид:

$$G = G_0 + G_0 \sum G , \quad (8)$$

а в подробной записи

$$G(1,2) = G_0(1,2) + \int G_0(1,3) \sum(3,4) G(4,2) d\tau_3 d\tau_4 \quad (9)$$

где $1=(\xi_1, t_1)$, $d\tau = d\xi dt$, а интегрирование по $d\xi$ включает суммирование по спину. Уравнение (8) может быть преобразовано умножением слева на оператор G_0^{-1} к виду:

$$G_0^{-1} G - \sum G = 1$$

Оператор G_0^{-1} определяется уравнением $G_0^{-1} G_0 = 1$, т.е. в \vec{P} -представлении $G_0^{-1} = \varepsilon - P^2/2m$

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \frac{P^2}{2m}) G_{\alpha\beta}(\vec{\tau}, \vec{\tau}', \varepsilon) - \int \sum_{\gamma\delta} G_{\gamma\beta}(\vec{\tau}, \vec{\tau}, \varepsilon) G_{\gamma\delta}(\vec{\tau}, \vec{\tau}', \varepsilon) d\vec{\tau}, &= \\ = \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}') \delta_{\alpha\beta} & \end{aligned} \quad (10)$$

Точный вид \sum не может быть вычислен, если в задаче нет малого параметра. Однако некоторые свойства \sum могут быть выяснены использованием соотношения unitарности и техники дисперсионных соотношений. Так, можно показать, что в системах без куперовского спаривания $\sum(\varepsilon, \vec{P})$ в импульсном представлении является плавной функцией ε и \vec{P} (характер-

ный параметр для изменения по P -импульс Ферми P_F). Это означает, что в координатном представлении $\sum_{\alpha\beta}(\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon)$ δ -видная функция разности координат. Разлагая \sum в ряд по производным от δ -функции, получим приближенно

$$\int \sum G d\vec{z} = \alpha(\vec{z}, \varepsilon) G(\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon) + \beta_{\alpha\beta}(\vec{z}, \varepsilon) \frac{\partial^2 G(\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon)}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}$$

где

$$\alpha(\vec{z}, \varepsilon) = \int \sum (\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon) d\vec{z},$$

$$\beta_{\alpha\beta}(\vec{z}, \varepsilon) = \int \sum (\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon) (\vec{z} - \vec{z}')_\alpha (\vec{z} - \vec{z}')_\beta d\vec{z},$$

В изотропной среде $\beta_{\alpha\beta} = \beta \delta_{\alpha\beta}$, в однородной среде α и β не зависят от \vec{z} , в конечной системе эта зависимость очень мала ($\sim z_0/R$) внутри системы и существует только на краю ядра. Тогда уравнение для G принимает вид:

$$\left\{ \varepsilon - [1 - 2m\beta(\vec{z}, \varepsilon)] \frac{P^2}{2m} - \alpha(\vec{z}, \varepsilon) \right\} G(\vec{z}, \vec{z}', \varepsilon) = \delta(\vec{z} - \vec{z}') \quad (II)$$

Если мы интересуемся видом G -функции вблизи поверхности Ферми (ε отсчитывается от E_F), то можем положить $\beta(\vec{z}, \varepsilon) = \beta(\vec{z}, 0)$, а $\alpha(\vec{z}, \varepsilon) = \alpha(\vec{z}, 0) + \frac{\partial \alpha(\vec{z}, 0)}{\partial \varepsilon} \varepsilon$

Тогда

$$\left\{ \varepsilon \left(1 - \frac{\partial \alpha(\vec{z}, 0)}{\partial \varepsilon} \right) - (1 - \beta(\vec{z}, 0) \cdot 2m) \frac{P^2}{2m} - \right.$$

$$-\alpha(\vec{r}, 0) \} \quad G(\vec{r}, \vec{r}'; \varepsilon) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

и, вводя

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon}}, \quad m^*(\vec{r}) = \frac{m(1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon})}{1 - 2m\beta(\vec{r}, 0)}, \quad (I2)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{\alpha(\vec{r}, 0)}{1 - \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon}}$$



получим уравнение

$$\left(\varepsilon - \frac{P^2}{2m^*} - U(\vec{r}) \right) G(\vec{r}, \vec{r}', \varepsilon) = \alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (I3)$$

которое отличается от уравнения для одной частицы в поле заменой m на эффективную массу m^* и появлением множителя α (перенормировочный множитель функции Грина) в правой части. В I-ом порядке теории возмущений $m^* = m$, $\alpha = 1$, а

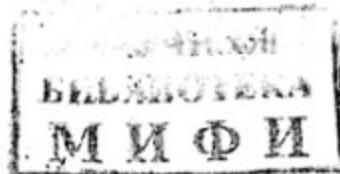
$U(r) = U_{\text{ХФ}}(r)$ – хартри-фоковскому самосогласованному потенциалу.

Вводя, как и выше, систему собственных функций

$$\left(\frac{P^2}{2m^*} + U(r) \right) \varphi_\lambda(\vec{r}) = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda(\vec{r})$$

получим

$$(\varepsilon - \varepsilon_\lambda) G_{\lambda\lambda'}(\varepsilon) = \alpha \delta_{\lambda\lambda'} \quad (I4)$$



Эта функция $G_{\lambda\lambda'}(\varepsilon) = \frac{a \delta_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda + i\gamma\theta}$ Грина отличается от функции Грина невзаимодействующей частицы только множителем a в правой части ($0 \leq a \leq 1$). Это выражение корректно, если $\varepsilon \ll \varepsilon_\lambda$ (отсчитанные от ε_F) малы. Наличие у G такого полюса, как можно показать из спектрального разложения для функции Грина, означает существование вблизи поверхности Ферми I-частичных возбуждений-квазичастиц, которые описываются функцией Грина

$$G^q = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda + i\gamma\theta} \quad (15)$$

Если мы отходим далеко от границы Ферми, то мы не имеем права оставлять в G только полюсной член, а должны писать:

$$G(\varepsilon) = a G^q(\varepsilon) + G^R(\varepsilon), \quad (16)$$

где G^R - регулярная вблизи нуля функция, все ее особые точки по ε лежат в области $|\varepsilon| \sim \varepsilon_F$.

Мы получили обоснование и уточнение модели оболочек. Наивной модели оболочек отвечает $a = 1$, $m = m^*$, $G^R = 0$. Мы, конечно, исходили из некоторых предположений; так, мы считали, что \sum разложима в ряд вблизи поверхности Ферми. Это предположение не справедливо, если в системе есть куперовское спаривание. В этом случае \sum имеет полюс при $\varepsilon = 0$. Этот полюс легко может быть выделен, и вся теория переформулирована. При этом получаются формулы более строгие, чем при использовании преобразования Боголюбова, т.к., последнее нарушает закон сохранения числа частиц, что приводит к ошибкам только в системах с очень большим числом частиц. В системах

со спариванием также могут быть введены квазичастицы, но они уже распределены не по "ступеньке", а распределение их размножено на ширине порядка Δ - энергетической щели: (см.рис.2)

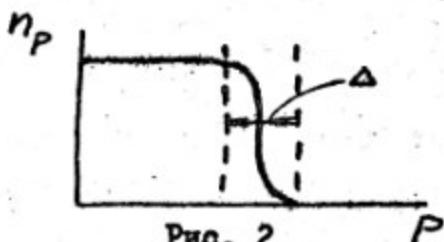


Рис. 2

5^a. Одночастичная функция Грина в случае спаривания

Рассмотрим подробнее вопрос, на чем было основано наше предположение о разложимости Σ в ряд по ε вблизи поверхности Ферми. Проще всего это выяснить в бесконечной системе. Простейший график для Σ описывает виртуальный переход частицы в 2 частицы и дырку (или дырки в 2 дырки и частицу), т.е. одна сплошная линия превращается в три:

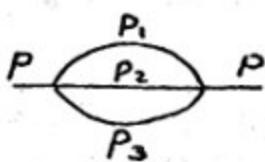


Рис.3

Легко видеть, что если такой график и содержит какие-либо особенности при малых ε ($P = (\vec{P}, \varepsilon)$), то это особенности в высоких производных. Так, часть Σ ,

отвечающая этому графику, не может иметь полюса при малых ε . Действительно, если Σ имеет полюс:

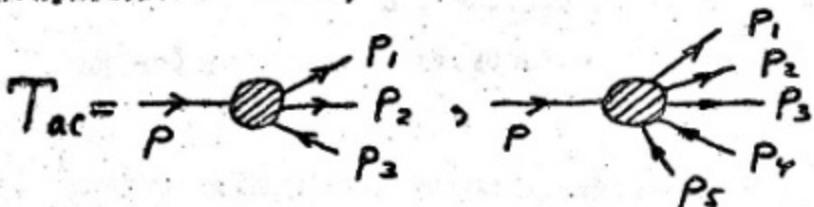
$\Sigma = \frac{A(\vec{P}^*)}{\varepsilon - a(\vec{P})}$, то $\text{Im } \Sigma \sim \delta(\varepsilon - a(\vec{P}^*))$, но вид $\text{Im } \Sigma$, отвечающий рис. 3, легко установить из соотношения унитарности:

$$\text{Im } T_{aa} = \frac{1}{2} \sum_c |T_{ac}|^2,$$

где T_{aa} в данном случае - матричный элемент перехода

$1 \rightarrow 1$, а T_{ac} - $1 \rightarrow 3; 1 \rightarrow 5$ и т.д. (состояния

$|C\rangle$ не содержит одночастичного в силу определения Σ как неприводимого блока)



и т.д.

Первый график отвечает минимой части от члена Σ , изображенного на рис. 3. Рассмотрим случай $\Sigma > 0$, тогда

$$\text{Im } \Sigma_3 \sim \int |\Gamma(\vec{P}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)|^2 n_{\vec{P}} n_{\vec{P}_2} (1 - n_{\vec{P}_3}) \times \\ \delta(\vec{P} - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{P}_3) \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\vec{P}} - \varepsilon_{\vec{P}_2} + \varepsilon_{\vec{P}_3}) d\vec{P}_1 d\vec{P}_2 d\vec{P}_3$$

Интеграл $\int d\vec{P}_3$ убирает δ -функцию $\delta(\vec{P} - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{P}_3)$. Остаются два интеграла по $d\vec{P}_1$ и $d\vec{P}_2$. $\varepsilon_{\vec{P}}$ и $\varepsilon_{\vec{P}_2}$ положительны, а $\varepsilon_{\vec{P}_3}$ - отрицательно (мы отсчитываем $\varepsilon_{\vec{P}}$ от поверхности Ферми: $\varepsilon_{\vec{P}} = \mathcal{U}_F(|\vec{P}| - P_F)$), поэтому в интегrale $\varepsilon_{\vec{P}_1}, \varepsilon_{\vec{P}_2} < \varepsilon$, откуда $\text{Im } \Sigma_3 \sim \varepsilon^2$. На самом деле из аналитических свойств Σ следует, что $\text{Im } \Sigma$ меняет знак при $\varepsilon = 0$, т.е. $\text{Im } \Sigma_3 = \alpha \varepsilon / |\varepsilon|$, где α - константа, определяемая взаимодействием. Аналогично легко получить, что $\text{Im } \Sigma_5 \sim \varepsilon^3 / |\varepsilon|$ и т.д. Во всяком случае, среди графиков теории возмущений для Σ нет ни одного, приводящего к δ -функции в минимой части Σ . Для того, чтобы $\text{Im } \Sigma$ содержала δ -функцию, нужно, чтобы среди состояний $|C\rangle$ было состояние, энергия которого полностью определяется величиной ε . Такая ситуация возникает, если в системе есть куперовское спаривание, т.е. имеется бозе-конденсат куперовских пар с импульсом $\vec{P}=0$. Тогда состоя-

ние с одной частицей на фоне N частиц будет комбинировать с состоянием: дырка на фоне $N+2$ частиц. Соответствующий член \sum может быть изображен в виде

$$\sum_{\kappa} = \frac{P}{N} \rightarrow \textcirclearrowleft \textcirclearrowright \frac{-P}{N+2} \textcirclearrowleft \textcirclearrowright \frac{P}{N}$$

Блок перехода в конденсатную пару с импульсом $P=0$:

$\rightarrow \textcirclearrowleft \textcirclearrowright$ обозначим $i\Delta^{(1)}$, а блок $\textcirclearrowleft \textcirclearrowright \frac{-P}{N+2} \textcirclearrowleft \textcirclearrowright$ - $i\Delta^{(2)}$. Тогда $\sum_{\kappa}(P) = -\Delta^{(1)}(P)\Delta^{(2)}(-P)G(-P)$

где $G(-P)$ - функция Грина без учета спаривания. Уравнение для функции Грина со спариванием

$$G_s = G_o + G_o(\sum + \sum_{\kappa})G_s \quad (I7)$$

(\sum - совокупность регулярных графиков собственно-энергетической части) с помощью уравнения Дайсона для G :

$$G = G_o + G_o \sum G$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} G_s(P) &= G(P) + G(P)\sum_{\kappa}(P)G_s(P) = \\ &= G(P) - \Delta^{(1)}\Delta^{(2)}G(P)G(-P)G_s(P) \end{aligned}$$

Это уравнение может быть получено и прямо графически. Далее,

$$G_s(P) = \frac{1}{G^{-1}(P) + G(-P)\Delta^{(1)}\Delta^{(2)}}$$

Близи поверхности Ферми $G(P) = \alpha / (\varepsilon - \varepsilon_{\bar{P}} + i\gamma\theta_{\bar{P}})$
поэтому

$$G_s(P) = \alpha \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon_{\bar{P}}) + \frac{\alpha^2 \Delta^{(1)} \Delta^{(2)}}{-\varepsilon - \varepsilon_{\bar{P}}}}$$

откуда, вводя $\alpha^2 \Delta^{(1)} \Delta^{(2)} \equiv \Delta^2$, получим

$$G_s(P) = \alpha \frac{\varepsilon + \varepsilon_{\bar{P}}}{\varepsilon^2 - \varepsilon_{\bar{P}}^2 - \Delta^2 + i\gamma}$$

Введем

$$U_{\bar{P}}^2 = \frac{E_{\bar{P}} + \varepsilon_{\bar{P}}}{2E_{\bar{P}}} , \quad V_{\bar{P}}^2 = \frac{E_{\bar{P}} - \varepsilon_{\bar{P}}}{2E_{\bar{P}}}$$

$$\text{где } E_{\bar{P}} = \Delta^2 + \varepsilon_{\bar{P}}^2 = \Delta^2 + v_F^2 (P - P_F)^2$$

Тогда G_s можно представить в виде

$$G_s = \alpha \left\{ \frac{U_{\bar{P}}^2}{\varepsilon - E_{\bar{P}} + i\gamma} + \frac{V_{\bar{P}}^2}{\varepsilon + E_{\bar{P}} - i\gamma} \right\} + G_R \quad (18)$$

Здесь G_R - регулярная часть функции Грина, которую мы для простоты опускали. G_R не меняется от спаривания. Зная G_s , можно вычислить распределение частиц по импульсам:

$$\begin{aligned} n^a(\bar{P}) &= \int_{\tau \rightarrow -0} G_s(\bar{P}, \varepsilon) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d\varepsilon}{2\pi} = \\ &= n^R(\bar{P}) + \alpha V_{\bar{P}}^2 = n^R(\bar{P}) + \alpha \frac{E_{\bar{P}} - \varepsilon_{\bar{P}}}{2E_{\bar{P}}} \end{aligned}$$

График этой функции мы изобразили ранее на рис. 2.

Все полученные формулы легко переносятся на случай конечной системы. Так, в λ -представлении

$$G_{\lambda\lambda'} = \alpha \delta_{\lambda\lambda'} \frac{\varepsilon + \varepsilon_\lambda}{\varepsilon^2 - \varepsilon_\lambda^2 - \Delta_\lambda^2} + G_{\lambda\lambda'}^R = \\ = \alpha \delta_{\lambda\lambda'} \left\{ \frac{U_\lambda^2}{\varepsilon - E_\lambda + i\delta} + \frac{V_\lambda^2}{\varepsilon + E_\lambda - i\delta} \right\} + G_{\lambda\lambda'}^R,$$

где $U_\lambda^2 = \frac{E_\lambda + \varepsilon_\lambda}{2E_\lambda}$, $V_\lambda^2 = \frac{E_\lambda - \varepsilon_\lambda}{2E_\lambda}$,

$$E_\lambda^2 = \varepsilon_\lambda^2 + \Delta_\lambda^2$$

Эти формулы получены в предположении, что $\Delta_{\lambda\lambda'}$ диагонально по λ, λ' для λ и λ' , лежащих вблизи ферми-поверхности. Это действительно так, что устанавливается простым анализом.

На примере спаривания мы увидели, как можно усложнять квазичастицы, если в \sum есть близкие к поверхности Ферми особенности. Такая же программа в принципе может быть проведена, например, в случае низколежащего 2^+ -уровня.

6. Вычисление средних

При нахождении статических моментов ядер (магнитных, квадрупольных и т.п.) мы сталкиваемся с задачей вычисления среднего значений по основному состоянию от оператора вида

$$\hat{Q} = \sum_{\lambda\lambda'} a_\lambda^+ a_{\lambda'} Q_{\lambda'\lambda}$$

Среднее значение \hat{Q} выражается через матрицу плотности

$$Q = \langle \hat{Q} \rangle = \sum \langle a_\lambda^\dagger a_\lambda' \rangle Q_{\lambda\lambda} = \sum P_{\lambda\lambda} Q_{\lambda\lambda}' = S_P P Q$$
(20)

Суммирование в (20) распространяется по состояниям λ , λ' , далеко отстоящим от поверхности Ферми, для которых мы не знаем вида G -функции, а следовательно, и матрицы плотности P , т.е. вычислять такого рода средние в лоб мы не можем.

Пусть известно значение $Q = Q_0$ для какого-либо ядра. Тогда

$$\delta Q = Q - Q_0 = \sum (\delta P)_{\lambda\lambda'} Q_{\lambda\lambda'} \quad (21)$$

Как мы покажем ниже, изменение матрицы плотности δP или изменение функции Грина δG от добавления одной или нескольких частиц может быть выражено только через свойства G -функции вблизи поверхности Ферми, т.е. может быть вычислено.

7. Функция Грина во внешнем поле

Определим изменение I-частичной функции Грина в слабом внешнем поле V^0 . Проще всего это сделать, используя графики Фейнмана. Функция Грина в поле

$$\tilde{G} = \frac{1}{E - \frac{1}{2m} p^2 + i\epsilon} + \frac{V^0}{E - \frac{1}{2m} p^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$+ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} V^o + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} V^o + \dots = \\ = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = G + G \tilde{\Gamma}[V^o] G$$

Здесь заштрихованный треугольник $\tilde{\Gamma}[V^o]$ означает бесконечную совокупность графиков, среди которых только один ($\text{---} = V^o$) не содержит взаимодействия, все остальные начинаются с акта взаимодействия. Они имеют следующую структуру. Если двигаться от вершины треугольника вниз, то сначала идет точка V^o , затем две линии частицы и дырки (GG). Далее идет полная сумма всех графиков, начинаяющихся и кончаящихся актом взаимодействия и переводящих частицу и дырку в новое состояние, т.е. полная амплитуда рассеяния двух частиц Γ :

$$\Gamma = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[V^o] &= \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} V^o + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} GG V^o = \\ &= V^o + \Gamma GG V^o \end{aligned} \tag{22}$$

Символическое умножение в формуле (22) следует понимать в операторном смысле:

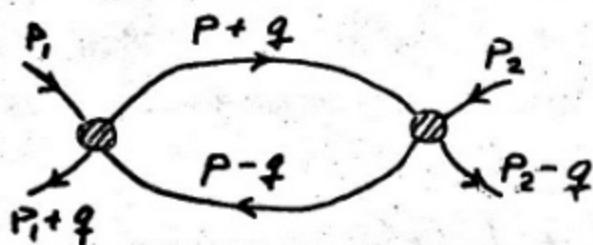
$$\Gamma G G V^o = \int \Gamma(1, 2, 3, 4) G(3, 5) G(6, 4) \times \\ \times V^o(5, 6) d\tilde{\tau}_3 d\tilde{\tau}_4 d\tilde{\tau}_5 d\tilde{\tau}_6$$

Как мы покажем ниже, уравнение (22) для $\mathcal{T}[V^o]$ может быть преобразовано таким образом, чтобы в ответ входили только полюсные части функций Грина, причем только близкие к поверхности Ферми их части, т.е. другими словами, это уравнение может быть сформулировано на языке квазичастиц.

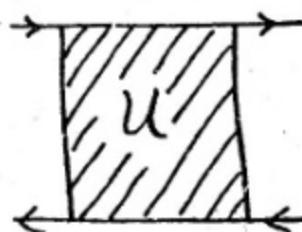
Величина $\mathcal{T}[V^o]$ аналогична рассматриваемой в квантовой электродинамике вершинной части.

8. Уравнение для амплитуды рассеяния в бесконечной Ферми-жидкости при малых передаваемых импульсах

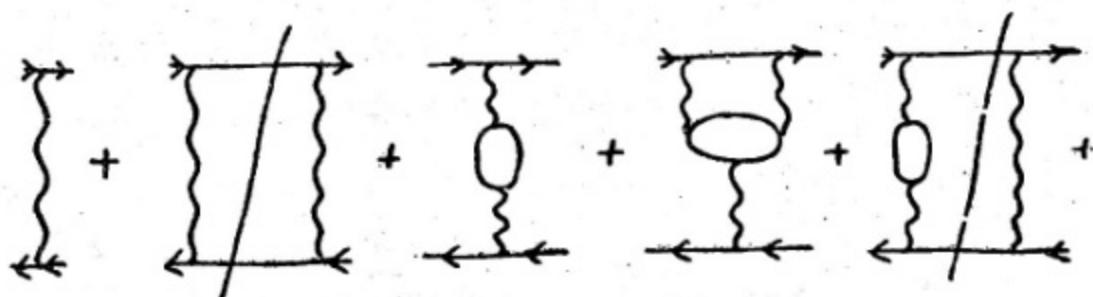
При рассмотрении коллективных колебаний в ферми-жидкости Ландау проанализировал свойства 2-частичной амплитуды рассеяния при малых передаваемых 4-импульсах $q = (\vec{k}, \omega)$.
Легко видеть, что графики теории возмущений такого типа:



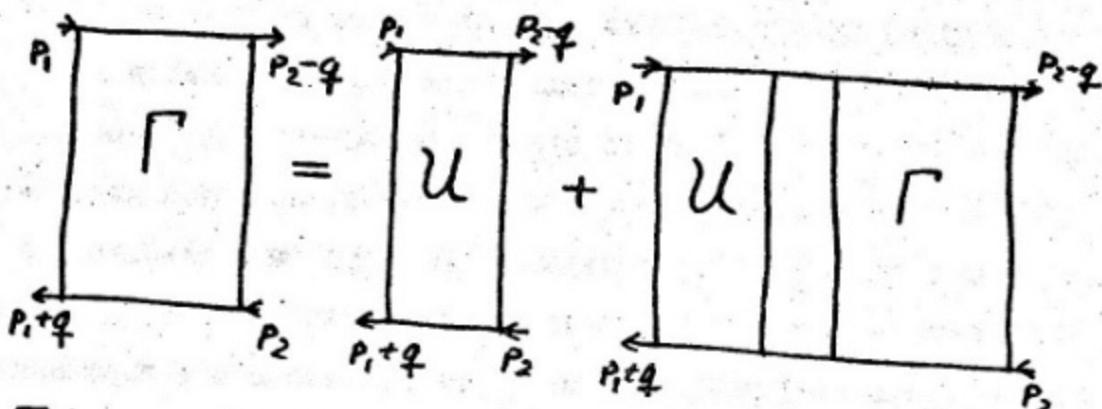
имеют существенно особую точку при $q = 0$ вида $\frac{\kappa v_F}{\omega - \kappa v_F}$ (v_F — скорость на границе Ферми). Такого же вида особенность будет присутствовать в сколь угодно сложном графике, в котором имеются части, соединенные двумя линиями в канале частица-дырка. В то же время все графики, не имеющие частей, соединенных только двумя линиями, являются плавными функциями q и при малых q могут быть заменены на константы. Наша задача состоит в выделении блоков таких неособых графиков, замене их на константы и в выражении особых частей амплитуды через эти константы. Введем "не-приводимый" блок \mathcal{U} :



не содержащий двух линий в канале частица-дырка. Приведем примеры графиков Γ , входящих и не входящих (зачеркнутые) в \mathcal{U} :



Уравнение для Γ имеет вид:



$$\Gamma(p_1, p_2, q) = U(p_1, p_2) + \int U(p_1, p) G(p+q) G(p) \times \Gamma(p, p_2, q) \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4},$$

или символически:

$$\Gamma = U + U G G \Gamma \quad (23)$$

Напомним, что

$$G(p) = a G^q(p) + G^R(p) = \frac{a}{\varepsilon - \varepsilon_p + i\delta} \theta_{p-} + G^R(p)$$

где регулярная часть $G^R(p)$ функции Грина имеет особенности только вдали от поверхности Ферми

$$G^q(p) = \frac{\eta_p}{\varepsilon - \varepsilon_p - i\delta} + \frac{1 - \eta_p}{\varepsilon - \varepsilon_p + i\delta}$$

Разобьем произведение гриневских функций на две части:

$$GG = A + B \quad (24)$$

где

$$A = a^2 G^q(p+q) G^q(p) \quad (25)$$

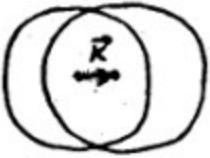
полюса A по переменной ε расположены следующим образом:

$$\frac{\cdot \varepsilon_p + i\gamma}{\cdot \varepsilon_p - i\gamma} \quad \frac{\cdot \varepsilon_{p+q} - \omega + i\gamma}{\cdot \varepsilon_{p+q} - \omega - i\gamma}$$

При $q \rightarrow 0$ полюса сближаются, и A содержит δ -образный максимум вблизи поверхности Ферми. Прямое вычисление дает:

$$\int G^q(p+q) G^q(p) \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \frac{\Pi_{\bar{p}+\bar{k}} - \Pi_{\bar{p}}}{\varepsilon_{\bar{p}+\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{p}} - \omega - i\gamma \operatorname{sgn} \omega}$$

Легко видеть, что эта функция при малых \vec{k} отлична от нуля в узкой области \vec{p} вблизи фермиповерхности: (см. рис.), т.е. величину A можно представить в виде:



$$A = 2\pi i \delta(\varepsilon) \delta(|\vec{p}| - p_F) \frac{\vec{K} \vec{v}}{\omega - \vec{K} \vec{v} + i\gamma \operatorname{sgn} \omega} \frac{a^2 m^*}{p_F} \quad (25')$$

Видно, что величина A имеет существенно особую точку при $q = 0$:

$$\lim_{\substack{\vec{K} \vec{v} \\ \omega \rightarrow 0}} A = 0, \quad \lim_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ \vec{K} \vec{v}}} A = -a^2 m^* \frac{2\pi i}{p_F} \delta(\varepsilon) \delta(|\vec{p}| - p_F)$$

Соответственно, имеет существенно особую точку и Γ .

Напротив, B - вялая функция \vec{K} и ω и не имеет никаких резких зависимостей от Σ и \vec{P} . Поэтому те члены Γ , которые не содержат A , являются плавными функциями импульсов. Введем вспомогательную амплитуду, удовлетворяющую уравнению:

$$\Gamma^\omega = \mathcal{U} + \mathcal{U}B\Gamma^\omega = \mathcal{U} + \Gamma^\omega B\mathcal{U}.$$

Легко видеть, что Γ^ω совпадает с пределом Γ при $K\sqrt{\omega} \rightarrow 0$. Γ^ω не содержит уже никаких сингулярностей при малых q . С помощью этого блока можно преобразовать уравнение для Γ :

$$\Gamma = \mathcal{U} + \mathcal{U}B\Gamma + \mathcal{U}A\Gamma$$

Умножим его слева на оператор $(1 + \Gamma^\omega B)$ (умножение операторное):

$$\begin{aligned} \Gamma + \Gamma^\omega B\Gamma &= (1 + \Gamma^\omega B)\mathcal{U} + (1 + \Gamma^\omega B)\mathcal{U}B\Gamma + \\ &+ (1 + \Gamma^\omega B)\mathcal{U}A\Gamma = \Gamma^\omega + \Gamma^\omega B\Gamma + \Gamma^\omega A\Gamma, \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$\Gamma = \Gamma^\omega + \Gamma^\omega A\Gamma \quad (26)$$

Уравнение (26) было получено Ландау. В нем остаются только интегрирования вблизи поверхности Ферми и ответ выражается только на языке квазичастиц. Процедура перехода от уравнения (23) к уравнению (26) аналогична процедурам перенормировок в квантовой электродинамике, при которых изгоняются не наблюдаемые понятия (затравочные масса, заряд и т.д.).

В рассматриваемой задаче "наблюдаемо" то, что относится к

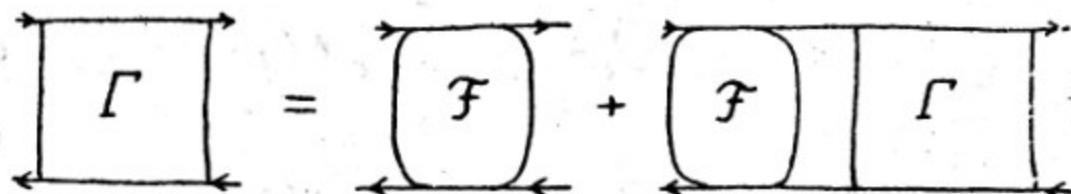
свойствам квазичастиц. Чтобы окончательно в уравнении (26) все сформулировать на языке квазичастиц, мы должны изгнать перенормировочный множитель функции Грина α . Для этого переобозначим:

$$\alpha^2 \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \frac{1}{\alpha^2} A \rightarrow A, \quad \alpha^2 \Gamma \xrightarrow{\omega} \mathcal{F},$$

тогда уравнение (26) для Γ запишется:

$$\Gamma = \mathcal{F} + \mathcal{F} A \Gamma, \quad (27)$$

где $A = G^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$ и не содержит перенормировочного множителя α . На графиках Фейнмана переход от частиц к квазичастицам отвечает помножению всех концов амплитуд на множитель $\alpha^{+\frac{1}{2}}$ (аналогично соответствующей процедуре в квантовой электродинамике, когда мы переходим от "голых" электронов к наблюдаемым). Тогда уравнение (27) можно изобразить графически:



причем сплошная линия отвечает уже распространению не частицы (G), а квазичастицы ($G^{\frac{1}{2}}$).

Блок \mathcal{F} , входящий в уравнение (27), имеет смысл потенциала взаимодействия между квазичастицами (в ряде вопросов, однако, существенно, что это не потенциал, а амплитуда!). Т.к. мы будем интересоваться состояниями, когда входные и выходные импульсы лежат на поверхности Ферми, то $\mathcal{F}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ зависит только от одной переменной - от угла $\chi = \vec{p}_1 \vec{p}_2 / p_F^2$ (зависимостью \mathcal{F} от χ , как говорилось, при малых χ

можно пренебречь). \mathcal{F} может быть разложено в ряд по полиномам Лежандра:

$$\mathcal{F}(z) = \sum \mathcal{F}_e P_e(z) . \quad (28)$$

\mathcal{F}_e и являются константами, которые вводятся в теорию. Как говорилось выше, $\mathcal{F} = \lim_{\kappa \sigma / \omega \rightarrow 0} \Gamma$. Рассмотрим другой предел Γ^{κ} - статический $\lim_{\omega / \kappa v \rightarrow 0} \Gamma^{\kappa} \equiv \Gamma^{\kappa}$. Уравнение, связывающее Γ^{κ} и \mathcal{F} имеет вид:

$$\Gamma^{\kappa}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \mathcal{F}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + \frac{dn}{d\varepsilon_F} \int \mathcal{F}(\vec{n}_1, \vec{n}) \Gamma^{\kappa}(\vec{n}, \vec{n}_2) \frac{d\vec{n}}{4\pi} \quad (29)$$

где

$$\frac{dn}{d\varepsilon_F} = \frac{3n_0}{2\varepsilon_F} = \frac{m^* P_F}{\pi^2}$$

Введем безразмерные амплитуды:

$$\frac{dn}{d\varepsilon_F} \mathcal{F} \equiv \sum \gamma_i^{\omega} O_i = f + f' \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 + (g + g') \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 + (g - g') \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2 \quad (30)$$

$$\frac{dn}{d\varepsilon_F} \Gamma^{\kappa} \equiv \sum \gamma_i^{\kappa} O_i = f^{\kappa} + f'^{\kappa} \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 + (g^{\kappa} + g'^{\kappa}) \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 + (g^{\kappa} - g'^{\kappa}) \vec{\epsilon}_1 \vec{\epsilon}_2$$

(мы для простоты опустили тензорные и спин-орбитальные члены)

Тогда уравнение (29) для γ_i^{κ} разделится:

$$\gamma_i^{\kappa} = \gamma_i^{\omega} + (\gamma_i^{\omega} \gamma_i^{\kappa}) = \gamma_i^{\omega}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + \int \gamma_i^{\omega}(\vec{n}_1, \vec{n}) \gamma_i^{\kappa}(\vec{n}, \vec{n}_2) \frac{d\vec{n}}{4\pi}$$

Отсюда легко установить связь между гармониками разложения

γ_i^ω и γ_i^* по полиномам Лежандра:

$$\gamma_{i\mu}^* = \frac{\gamma_{i\mu}^\omega}{1 + \frac{2\gamma_{i\mu}^\omega}{2\mu+1}} \quad \text{или} \quad \gamma_{i\mu}^\omega = \frac{\gamma_{i\mu}^*}{1 - \frac{2\gamma_{i\mu}^*}{2\mu+1}} \quad (31)$$

Общий же вид уравнения (29) для обеих амплитуд при малых q следующий:

$$\gamma(\vec{n}_1, \vec{n}_2, q) = \gamma^\omega(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + \int \gamma^\omega(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \frac{K \vec{n} \cdot \vec{v}}{\omega - K \vec{n} \cdot \vec{v}} \delta(\vec{n}_1, \vec{n}_2, q) \frac{d\vec{n}}{4\pi} \quad (32)$$

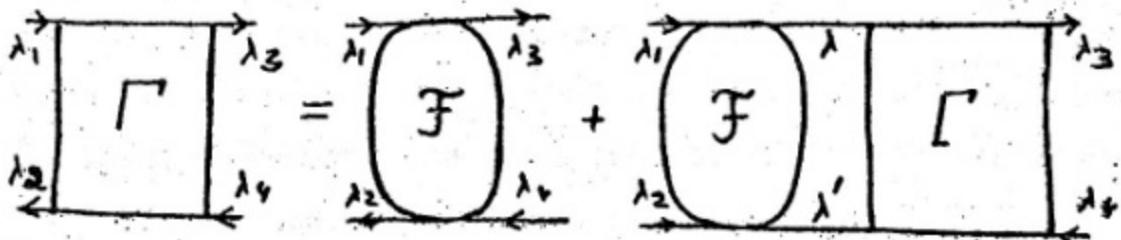
Аналогичную процедуру перенормировки можно произвести и в конечной системе. Формальные преобразования остаются теми же. Единственное отличие заключается в том, что теперь нужно использовать λ -представление:

$$G_{\lambda\lambda'}^q = \frac{\delta_{\lambda\lambda'}}{\varepsilon - \varepsilon_\lambda + i\delta\theta(\varepsilon_\lambda)} \quad (33)$$

$$\int G_\lambda^q G_{\lambda'}^q \frac{d\varepsilon}{2\pi i} = \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'} + \omega}$$

Для Γ получается уравнение:

$$\int_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4} \Gamma(\omega) = \mathcal{F}_{\lambda\lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4} + \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{F}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda\lambda'} \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'} + \omega} \int_{\lambda'\lambda}^{\lambda_3, \lambda_4} (\omega) \quad (34)$$



Входящие сюда матричные элементы нужно понимать следующим образом:

$$\Gamma_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \int \varphi_{\lambda_1}^*(1) \varphi_{\lambda_2}(2) \Gamma(1, 2, 3, 4) \varphi_{\lambda_3}(3) \varphi_{\lambda_4}^*(4) \prod_{i=1}^4 d\tau_i,$$

где, как говорилось выше, $I \equiv (\vec{r}_1, s_1)$ в координатном представлении и $I \equiv (\vec{P}_1, s_1)$ - в импульсном. В координатном представлении это же уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{F}(1, 2, 3, 4) + \\ &+ \int \mathcal{F}(1, 2, 5, 6) A(5, 6, 7, 8) \Gamma(7, 8, 3, 4) \prod_{i=5}^8 d\tau_i, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$A(5, 6, 7, 8) = \sum_{\lambda \lambda'} \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'} + \omega} \varphi_\lambda(5) \varphi_\lambda^*(7) \varphi_{\lambda'}(6) \varphi_{\lambda'}^*(8) \quad (35')$$

Определение \mathcal{F} то же самое, что и в бесконечной системе: $\mathcal{F} = \mathcal{U} + (\mathcal{U}B\mathcal{F})$, т.е. \mathcal{F} не содержит двух полюсных линий в канале частица-дырка. Поэтому, как правило, \mathcal{F} можно считать локальной функцией координат - в том смысле, что характерные расстояния, на которых \mathcal{F} начинает резко убывать, порядка среднего расстояния между частицами τ_0 . Поэтому внутри ядра \mathcal{F} можно считать универсальной функцией, совпадающей с амплитудой рассеяния в бесконечной ядерной материи, и параметризовать её так же, как в бесконечной материи, - гармониками разложения в ряд по полиномам Лежандра. В координатном представлении нулевая гармоника отвечает

δ -функции; например,

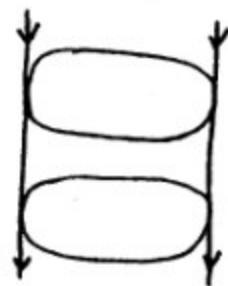
$$f_0 \rightarrow f_0 \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_3) \delta(\vec{z}_3 - \vec{z}_4)$$

Первая гармоника

$$f_1 \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_F^2} \rightarrow \frac{f_1}{P_F^2} \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_3) \nabla_{z_2} \delta(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) \nabla_{z_4} \delta(\vec{z}_3 - \vec{z}_4)$$

и т.д. Эти формулы получаются прямым переходом из импульсного представления в координатное.

В \mathcal{F} могут возникать нерегулярные дальнодействующие члены, связанные с распространением 2-х квазичастиц в канале частица-частица (см.рис.):



Дальше мы остановимся подробно на выделении таких графиков.

9. Перенормировка уравнения для вершинной части.

Эффективное поле, действующее на квазичастицы.

Рассматривая в § 7 изменение I-частичной функции Грина в слабом внешнем поле V^0 , мы получили уравнение (22) для вершинной части:

$$\mathcal{T}[V^0] = V^0 + \Gamma G G V^0 = V^0 + U G G \mathcal{T}[V^0] \quad (36)$$

Вторая форма записи уравнения для \mathcal{T} может быть получена или непосредственно графически или из первой с помощью уравнения для Γ . Уравнение для \mathcal{T} может быть перенормировано

таким же образом, как и уравнение для Γ , посредством разложения $GG = A + B$. Все выкладки аналогичны, окончательный же результат может быть опять-таки сформулирован на языке квазичастиц.

Если ввести локальный заряд квазичастиц :

$$e_q V^o \equiv a \mathcal{T}^\omega [V^o] \quad (37)$$

где

$$\mathcal{T}^\omega [V^o] = V^o + UBV \mathcal{T}^\omega [V^o] \quad (38)$$

и эффективное поле $V = a \mathcal{T}[V^o]$, действующее на квазичастицу, то для V получится уравнение:

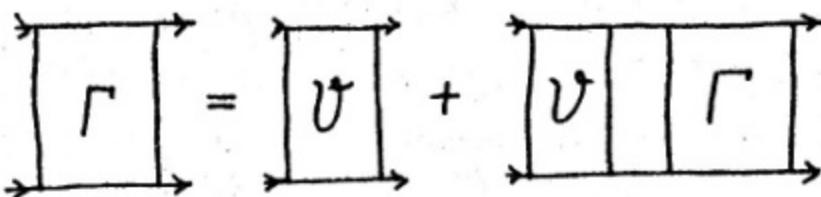
$$V = e_q V^o + \mathcal{F} A V \quad (39)$$

где A - введенный выше пропагатор квазичастицы и квазидырки, а \mathcal{F} играет роль эффективного взаимодействия между квазичастицами. Величина V играет в теории очень большую роль. Она определяет статические моменты ядер, вероятности электромагнитных и β -переходов и другие важные физические свойства атомных ядер.

10. Уравнение для амплитуды рассеяния в канале частица-частица

Мы видели, что амплитуда взаимодействия квазичастиц в ядре имеет неуниверсальные части, связанные с распространением виртуальных частицы и дырки. Эта неуниверсальность (сложная зависимость от квантовых чисел) соответствует особой точке амплитуды в бесконечной системе. Но амплитуда рассеяния в бесконечной системе имеет еще одну особенность (по суммарному

импульсу \mathcal{P}). Уравнение для Γ в канале двух частиц легко может быть получено графически:



Здесь U — неприводимая совокупность графиков, не содержащая двух линий в канале двух частиц. Символически

$$\Gamma = U + UGG\Gamma \quad (40)$$

Разбивая опять GG на $\tilde{A} = G^{\frac{1}{2}}\tilde{G}^{\frac{1}{2}}$ и $B = GG - \tilde{A}$, получим

$$\Gamma = U_0 + U_0 \tilde{A} \Gamma \quad (41)$$

где

$$U_0 = U + UBU_0$$

U_0 , также как и U , является плавной функцией импульса \mathcal{P} . Но в уравнение (41), в отличие от соответствующего уравнения в канале частица-дырка, входят наряду с близкими к поверхности Ферми частями, части, далекие от поверхности Ферми.

Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \int G^{\frac{1}{2}}(E/2 + \omega, \vec{\mathcal{P}}/2 + \vec{p}) G^{\frac{1}{2}}(E/2 - \omega, \vec{\mathcal{P}}/2 - \vec{p}) \frac{d\omega}{2\pi i} = \\ &= \frac{1 - \eta \vec{\mathcal{P}}/2 + \vec{p} - \eta \vec{\mathcal{P}}/2 - \vec{p}}{E - \varepsilon \vec{\mathcal{P}}/2 + \vec{p} - \varepsilon \vec{\mathcal{P}}/2 - \vec{p}}, \end{aligned}$$

и интеграл $(\mathcal{V}_0 \tilde{A} \Gamma)$ по \vec{P} при $E=0$ и $\vec{\Gamma}=0$ расходится логарифмически (при постоянных \mathcal{V}_0 и Γ).

Уравнение (4I) для Γ в конечной системе проще всего выглядит в λ -представлении:

$$\Gamma_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = (\mathcal{V}_0)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} + \sum_{\lambda \lambda'} (\mathcal{V}_0)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \lambda'} \frac{1 - \eta_\lambda - \rho_{\lambda'}}{E - \varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} \Gamma_{\lambda \lambda'}^{\lambda_3 \lambda_4} \quad (42)$$

Тому факту, что в бесконечной системе интеграл $(\mathcal{V}_0 \tilde{A} \Gamma)$ расходится, в конечной – соответствует расходимость суммы по λ и λ' . Конечно, слова "расходимость" следует понимать в условном смысле, т.к. зависимость \mathcal{V}_0 и Γ от \vec{P} в бесконечной системе (и зависимость $(\mathcal{V}_0)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \lambda'}$ и $(\Gamma)_{\lambda \lambda'}^{\lambda_3 \lambda_4}$ от λ, λ' – в конечной) приведет к тому, что интеграл (сумма) будет сходиться, но лишь на расстояниях порядка P_F от ферми-границы. В итоге мы не сможем сформулировать уравнение на языке квазичастиц, которые существуют лишь вблизи поверхности Ферми. Поэтому уравнение для Γ в канале двух частиц нуждается в дальнейшей перенормировке. Мы дальше разберем подробно вопрос об этой перенормировке, но вид $\Gamma(\vec{P})$ при малых \vec{P} качественно может быть выяснен и прямо из уравнения (4I). Действительно, интеграл

$$\int \tilde{A}(\vec{P}=0, E=0, \vec{P}) d\vec{P} \sim \int_{P_F} \frac{dP}{\sigma_F(P - P_F)}$$

расходится логарифмически на нижнем пределе. Это значит, что

$$\int A(\vec{P} \rightarrow 0) d\vec{P} \sim \ln \vec{P}$$

Так как \mathcal{V}_0 особенностей по \mathcal{T} не имеет, то уравнение (41) при малых \mathcal{T} может удовлетворяться только если $\Gamma(\mathcal{T}) \sim e^{-\gamma} \mathcal{T}$, т.е. $\Gamma(\mathcal{T})$ имеет логарифмическую особенность при $\mathcal{T}=0$. Эта особенность приведет, как мы увидим, к наличию в эффективном взаимодействии квазичастиц универсального дальнодействия.

II. Вклад дальнодействия в матричные элементы амплитуды взаимодействия квазичастиц

Рассмотрим сначала для простоты случай, когда на изолированном одночастичном уровне \mathcal{V}_0 имеется несколько квазичастиц. Поскольку число выделенных квазичастиц в объеме ядра мало, можно пренебречь тройными соударениями между ними и поэтому для нахождения энергетического спектра E_Λ и волновых функций Φ_Λ конфигурации достаточно знать набор матричных элементов Γ_g амплитуды парного взаимодействия $\Gamma(1,2; 3,4)$ (рис. 4), определяющих спектр возбуждений пары квазичастиц данного уровня :

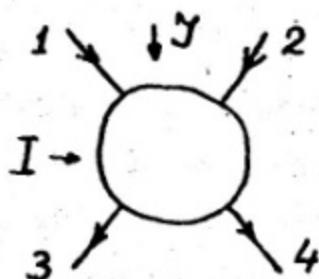


Рис. 4

$$\Gamma_g = \int \Psi_g^*(1,2) \Gamma(1,2; 3,4) \Psi_g(3,4) \prod_i d\tau_i \quad (43)$$

Здесь

$$\Psi_{JM}(1,2) = \sum_{m_1, m_2} C_{j_{m_1}, j_{m_2}}^{JM} R_{\nu_0}(\tau_1) R_{\nu_0}(\tau_2) \Omega_{jm}(\vec{n}_1) \Omega_{jm}(\vec{n}_2)$$

где $R_{\nu}(\tau)$ - радиальная часть волновой функции квазичастицы, $\Omega_{jm}(\vec{n})$ - шаровой спинор. В амплитуде Γ' отсутствуют графики, отвечающие взаимодействию квазичастиц уровня ν_0 между собой в каком-нибудь промежуточном состоянии. В дальнейшем для упрощения обозначений штрихи у Γ будем всюду опускать. Иногда вместо набора Γ_J используют эквивалентный набор Γ_I матричных элементов взаимодействия квазичастиц с фиксированным моментом в канале частица-дырка:

$$\Gamma_I = \int \Phi_I^*(1,3) \Gamma(1,2,3,4) \Phi_I(2,4) \prod_i d\tau_i , \quad (44)$$

где

$$\Phi_I(1,3) = \sum_{m_1, m_2} C_{j_{m_1}, j_{m_2}}^{IM} (-1)^{j-m_3} \varphi_{jm_1}(1) \varphi_{jm_2}^*(3)$$

Отметим, что входящая в (43) и (44) амплитуда Γ сама зависит от энергии E взаимодействия квазичастиц уровня ν_0 в изучаемом состоянии. Эта зависимость проявляется только в поляризационной части Γ , и ее нетрудно учесть.

Если набор матричных элементов Γ_J или Γ_I известен, то дальнейший расчет E_A и Φ_A сводится к решению системы алгебраических уравнений. Такого же рода расчеты могут быть выполнены и для нескольких близких, изолированных от остальных уровней. Мы называем близкими те уровни, вклад которых нельзя рассчитывать по теории возмущений; подробнее об этом

см. в работе /3/. Сюда относится и задача о спектре низколежащих возбуждений ядер, отличающихся от магических добавлением нескольких частиц (или дырок). В этом случае уравнение Шредингера с эффективным потенциалом Γ фактически решается в конфигурационном пространстве нескольких выделенных уровней, причем в Γ по определению нет графиков, отвечающих взаимодействию квазичастиц выделенных уровней между собой в промежуточных состояниях.

В первом порядке теории возмущений амплитуда Γ совпадает с потенциалом взаимодействия V между частицами. Так, для одинаковых частиц

$$\Gamma(1,2;3,4) = V_{(1,2)} [\delta_{(1,3)} \delta_{(2,4)} - \delta_{(1,4)} \delta_{(2,3)}]$$

Однако в реальном ядре, где взаимодействие не мало, амплитуда взаимодействия не может быть аппроксимирована никаким потенциалом вообще, так как она зависит от всех четырех координат и содержит неуниверсальное, меняющееся от ядра к ядру дальнодействие, причем дальнодействующие члены не являются функциями разности координат. Мы будем называть дальнодействующей ту часть полной амплитуды $\Gamma(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2; \vec{\gamma}_3, \vec{\gamma}_4; S_i)$ взаимодействия квазичастиц, которая при больших значениях ($\sim R$) какого-нибудь из своих аргументов $\vec{\gamma}_{ik} = \vec{\gamma}_i - \vec{\gamma}_k$ убывает не быстрее, чем γ_{ik}^{-3} . Действительно, характерная величина матричного элемента $\Gamma_3 \sim R^{-3}$. Поэтому если амплитуда рассеяния на больших расстояниях γ_{ik} убывает как γ_{ik}^{-n} ($n > 3$), то область далеких $\gamma_{ik} \sim R$ не вносит заметного вклада в величину ее матричного элемента. Дальнодействующие члены порождают в импульсном представлении особенности амплитуды рассеяния Γ , лежащие на вещественной оси

вблизи нее. При этом получается, что либо сама Γ , либо ее первая производная по импульсам обращаются в бесконечность.

Мы видели, что в диаграммах теории возмущений для Γ дальнодействие возникает тогда, когда в них имеются части, соединенные друг с другом только двумя линиями. Если эти линии соответствуют распространению пары частица-частица (рис. 5, а), то дальнодействие возникает по переменным Z_{13}, Z_{24} . Это означает, что в импульсном представлении часть полной амплитуды, содержащая указанные графики, быстро меняется, когда суммарный импульс $\vec{\Gamma} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ мал. Если же две линии описывают распространение пары частица-дырка (рис. 5, б), то дальнодействие возникает по переменным Z_{12}, Z_{34} . В импульсном представлении это отвечает быстрому изменению Γ при малых относительных импульсах $\vec{q} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1$ (а из-за антисимметрии Γ и при малых $\vec{P}_3 - \vec{P}_2 = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{q}$).

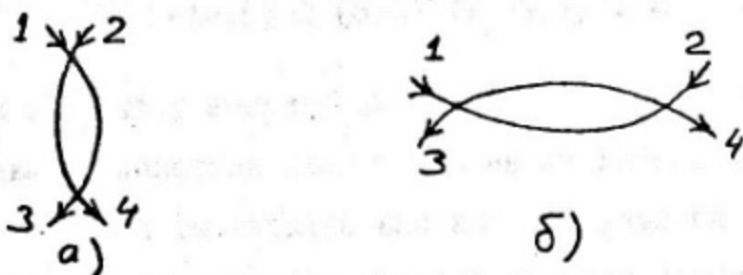


Рис. 5

Разумеется, при суммировании бесконечного ряда теории возмущений могли бы возникнуть новые особенности в Γ , в частности, и вблизи вещественной оси. Для появления таких особенностей нужны специальные физические причины. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся анализом особенностей амплитуды взаимодействия, рассмотренных выше, и будем считать, что сумма бесконечного числа неприводимых диаграмм, не содержащих ни в одном из каналов частей, соединенных двумя линиями, не имеет особых точек вблизи вещественной оси (т.е. в координатном представлении она — локальная функция).

Таким образом, мы видим, что амплитуда взаимодействия $\Gamma(1,2; 3,4)$ может быть записана в следующем виде:

$$\Gamma = \Gamma^e + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)},$$

где Γ^e - локальная часть амплитуды взаимодействия, $\Gamma^e \neq 0$ только в области, где $\zeta_{i_2} \approx \zeta_0$; $\Gamma^{(I)}$ содержит только часть дальнодействия Γ , возникающую в канале частица-частица. Ее величина (так же, как и $\Gamma^{(2)}$) пренебрежимо мала на малых расстояниях ($\zeta_{i_2} \approx \zeta_0$). Амплитуда $\Gamma^{(I)}$ отлична от нуля в областях, где $\zeta_{13} \sim \zeta_{24} \sim R$ и $\zeta_{12} \sim \zeta_{34} \sim \zeta_0$. Амплитуда $\Gamma^{(2)}$ содержит только дальнодействующую часть Γ , возникающую в канале частица-дырка. Она определяет амплитуду взаимодействия в области, где $\zeta_{13} \sim \zeta_{24} \sim \zeta_0$, а $\zeta_{12} \sim \zeta_{34} \sim R$. В амплитуде взаимодействия Γ есть также часть, содержащая дальнодействие сразу в обоих каналах, когда все четыре координаты $\vec{\zeta}_i$ далеко отстоят друг от друга. Но вклад ее в матричные элементы Γ_J пренебрежимо мал, так как эта часть Γ , будучи плавной функцией всех координат, интегрируется с быстро осциллирующими функциями $\varphi_\lambda(\vec{\zeta}_i)$.

Посмотрим теперь, какой вклад вносит каждое из слагаемых (45) в матричный элемент (48) при различных моментах J двух частиц. Для простоты в оценках матричных элементов Γ_J , Γ_I мы будем использовать LS -связь.

Локальную часть Γ для качественного анализа достаточно заменить δ -функцией:

$$\Gamma^e \sim \Gamma_0^e \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_3 - \vec{r}_4).$$

тогда

$$\Gamma_J^e \sim \int \Psi_J^2(r_1, r_2) d\tau_i \sim \frac{2e+1}{4\pi} \left(\frac{eeL}{000} \right)^2 \int R_{\nu_0}^4 r^2 d\tau \quad (46)$$

т.е. Γ_J^e при $J = 0$ имеет порядок $\epsilon_F A^{-1} (2\ell_0 + 1)$.

Когда \mathcal{I} растет, Γ_{γ}^e убывает как $(2\ell_0+1)^2 / \gamma(4\ell_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$, достигая при $\gamma \sim \ell_0 \sqrt{2}$ значения $\sim \Sigma_F A^{-1}$. При дальнейшем увеличении γ Γ_{γ}^e увеличивается, и при $\gamma \sim 2j$ имеем $\Gamma_{\gamma}^e \sim \Sigma_F A^{-1} (2\ell_0+1)^{1/2}$. Следующее слагаемое $\Gamma^{(I)}$ дает заметный вклад в Γ_{γ} только при малых γ . Действительно, для оценки положим

$$\Gamma^{(I)} = \Gamma^{(I)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2; s_i, \tau_i) \delta(\vec{\gamma}_1 - \vec{\gamma}_2) \delta(\vec{\gamma}_3 - \vec{\gamma}_4)$$

Тогда из (43) получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma}^{(I)} \sim & \frac{(2\ell_0+1)}{4\lambda} \left(\frac{\ell_0 \ell_0' \gamma}{0 0 0} \right)^2 \int d\vec{\gamma}_1 d\vec{\gamma}_3 R_{\nu_0}^2(\gamma_1) Y_{LM}(\vec{n}_1) \times \\ & \times \Gamma^{(I)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3) R_{\nu_0'}^2(\gamma_3) Y_{LM}(\vec{n}_3). \end{aligned} \quad (47)$$

Амплитуда $\Gamma^{(I)}$ — плавная функция углов \vec{n}_1 и \vec{n}_3 . Для малых γ имеем $\Gamma_{\gamma}^{(I)} \sim \Sigma_F A^{-1} (2\ell_0+1)$. Когда же γ велико, $Y_{LM}(\vec{n}_1)$ и $Y_{LM}(\vec{n}_3)$ быстро осциллируют, поэтому интеграл (47) мал при $\gamma \gg 1$.

Рассмотрим теперь вклад в (43) третьего слагаемого, $\Gamma^{(2)}$ описывающего дальнодействие в канале частица-дырка. Для оценки положим

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2; s_i, \tau_i) [\delta(1,3)\delta(2,4) \pm \delta(1,4)\delta(2,3)]$$

Тогда

$$\Gamma_{\gamma}^{(2)} \sim \int |\Psi_{\gamma}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)|^2 \Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) d\vec{\gamma}_1 d\vec{\gamma}_2 \quad (48)$$

Амплитуда $\Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ - плавная функция \vec{H}_1 и \vec{H}_2 , поэтому $\Gamma_y^{(2)} \sim \varepsilon_F A^{-1}$ и слабо зависит от \mathcal{Y} . Для $\mathcal{Y} \sim 1$ имеем $\Gamma_y \sim \varepsilon_F A^{-2/3}$, и вкладом $\Gamma_y^{(2)}$ можно пренебречь. В то же время для $\mathcal{Y} \sim A^{1/3}$, обычно $\Gamma_y \sim \varepsilon_F A^{-1}$, т.е. $\Gamma_y^{(2)} \sim \Gamma_y$, и поэтому вклад $\Gamma^{(2)}$ необходимо учитывать.

Коротко результат рассмотрения задачи одного изолированного уровня может быть сформулирован следующим образом.

1. Для малых \mathcal{Y} дальнодействием в канале частица-дырка с точностью $A^{-1/3}$ можно пренебречь и

$$\Gamma_y = \Gamma_y^e + \Gamma_y^{(1)}, \quad \mathcal{Y} \sim 1$$

2. Существует область промежуточных значений моментов, для которых оба канала одинаково существенны, т.е. дальнодействие в обоих каналах дает сравнимый вклад.

3. Для больших $\mathcal{Y} \gtrsim j$ мал вклад дальнодействия в канале частица-частица и

$$\Gamma = \Gamma_y^e + \Gamma_y^{(2)}, \quad \mathcal{Y} \gtrsim j$$

4. Если \mathcal{Y} близко к $2j$, то может оказаться, что $\Gamma_y > \varepsilon_F A^{-1}$. Это условие нередко выполняется для состояний нечетно-нечетных ядер с максимальным моментом. Тогда результат в основном определяется локальной амплитудой Γ^e и, следовательно, матричные элементы Γ_y с $\mathcal{Y} = 2j$ могут быть использованы для непосредственного определения из эксперимента параметров амплитуды Γ^e .

Аналогичным образом можно рассмотреть и вклад различных слагаемых (45) в матричные элементы Γ_I , когда момент I имеет пару частица-дырка. Нетрудно видеть, что все сказанное выше о зависимости матричного элемента Γ_y^e от \mathcal{Y} справед-

живо и в рассматриваемом случае для Γ_I^{ℓ} . Вклад $\Gamma^{(1)}$ имеет порядок $\sim \Sigma_F A^{-1}$ и слабо зависит от I , аналогично тому как в предыдущем случае $\Gamma_J^{(2)}$ слабо зависело от J . Для выяснения роли $\Gamma^{(2)}$ положим снова

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) [\delta(1,3)\delta(2,4) \pm \delta(1,4)\delta(2,3)]$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma_I^{(2)} &= \int \phi_I^*(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) \Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) \phi_I(\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_1) d\vec{\gamma}_1 d\vec{\gamma}_2 \pm \\ &\pm \int \phi_I^*(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) \Gamma^{(2)}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) \phi_I(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) d\vec{\gamma}_2 d\vec{\gamma}_1 \end{aligned} \quad (49)$$

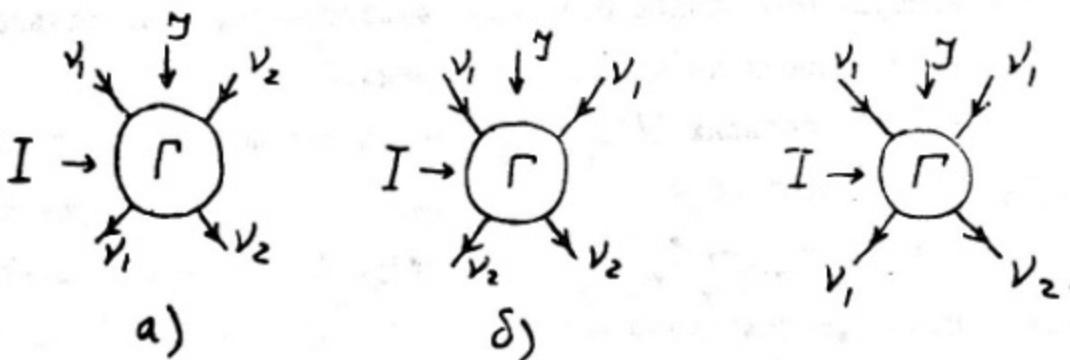


Рис. 6

Первый из этих интегралов велик, когда $I \sim 1$, и быстро убывает с ростом I , а второй имеет примерно одинаковый порядок величины ($\sim \Sigma_F A^{-1}$) независимо от I .

Таким образом:

1) для малых I вклад $\Gamma^{(1)}$ мал, и с точностью $\sim A^{-1}$

$$\Gamma_I = \Gamma_I^{\ell} + \Gamma_I^{(2)}, \quad I \sim 1$$

2) для больших моментов частицы с дыркой ни одной из амплитуд пренебречь нельзя, т.е.

$$\Gamma_I = \Gamma_I^\epsilon + \Gamma_I^{(1)} + \Gamma_I^{(2)}, \quad I \gg 1$$

3) в случае максимально возможных моментов $\bar{I} \approx 2j$;
доминирующий вклад попрежнему вносит локальная амплитуда
 Γ_I^ϵ .

Рассмотрим теперь коротко случай двух близких изолированных уровней ν_1 и ν_2 , сильно отличающихся по своим квантовым числам. Теперь, наряду с диагональными по ν_i матричными элементами

$$\langle \nu, \nu, \mathcal{U} | \Gamma | \nu, \nu, \mathcal{U} \rangle, \quad \langle \nu_1 \nu_2 \mathcal{U} | \Gamma | \nu_1 \nu_2 \mathcal{U} \rangle$$

в задачу входят и недиагональные матричные элементы вида
(см. рис. 6)

$$\langle \nu, \nu_2 \mathcal{U} | \Gamma | \nu, \nu_2 \mathcal{U} \rangle, \quad \langle \nu, \nu_2 \mathcal{U} | \Gamma | \nu_2 \nu_2 \mathcal{U} \rangle, \\ \langle \nu, \nu, \mathcal{U} | \Gamma | \nu, \nu_2 \mathcal{U} \rangle.$$

Среди них наибольший интерес представляют матричные элементы $\langle \nu, \nu_2 \mathcal{U} | \Gamma | \nu, \nu, \mathcal{U} \rangle$ (рис. 6, а), которые были использованы в работе /4/ для нахождения констант локального взаимодействия \mathcal{F} квазичастиц. Когда ν_1 и ν_2 сильно различаются по своим квантовым числам, вклад дальнодействия в канале частица-частица мал, и поэтому задача упрощается, так как надо учитывать дальнодействие лишь в канале частица-дырка. В этом случае можно выразить Γ через амплитуду \mathcal{F} взаимодействия квазичастиц, вводимую в теории конечных Ферми-систем. Если один из одночастичных моментов (j_1) мал, а другой (j_2) велик, то в ответ входит значение \mathcal{F} при

$q = 0$, т.е. именно та величина, которая определяет взаимодействие квазичастиц в задаче о поведении системы во внешнем поле.

Нетрудно показать также, что в случае рис. 6,б канал частица-дырка играет малую роль (ν_1 и ν_2 не комбинируют!) т.е. уравнение для амплитуды взаимодействия Γ надо расписывать в канале частица-частица. Наконец, в случае рис. 6,б в ответ входит лишь локальная часть Γ^e амплитуды взаимодействия Γ .

Отметим, что в приведенных выше рассуждениях мы всюду считали, что дальнодействующая составляющая взаимодействия — плавная функция координат. В следующем разделе мы увидим, что это не совсем так: в амплитуде взаимодействия Γ присутствуют также и быстро осциллирующие члены, медленно убывающие по абсолютной величине с ростом расстояний Z_{ik} . Их учет не изменяет качественных выводов этого раздела.

12. Анализ дальнодействующих частей амплитуды взаимодействия квазичастиц

Теория конечных ферми-систем основана на том факте, что локальные характеристики внутренних областей ядра, в том числе и локальное взаимодействие, определяются свойствами бесконечной ядерной материи. Природа дальнодействия может быть различной: во-первых, это неуниверсальное дальнодействие, обусловленное конечностью системы, возникающее благодаря возбуждениям квазичастиц в слое $\sim \Sigma_F N^{-\frac{1}{3}}$ вблизи поверхности Ферми; во-вторых, это универсальное дальнодействие, которое существует и в бесконечной системе. Такое дальнодействие, как уже говорилось выше, связано с особыми точками

амплитуды рассеяния квазичастиц в бесконечной системе в импульсном представлении. Характер этих особенностей, как правило, нетрудно установить.

Выше было уже отмечено, что дальнодействующая составляющая амплитуды взаимодействия Γ возникает только в диаграммах, соединенных двумя линиями, в результате интегрирования произведения полюсных частей $G^{\frac{1}{2}}$ -функций распространения G . Рассмотрим сначала дальнодействие в канале частица-дырка. Дальнодействующая часть $\Gamma^{(2)}$ зависит от двух координат $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$, и для ее анализа нам нужно исследовать выражение

$$A(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} G^{\frac{1}{2}}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \varepsilon) G^{\frac{1}{2}}(\vec{\gamma}_2, \vec{\gamma}_1, \varepsilon + \omega) = \\ = \sum' \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'} + \omega} \varphi_\lambda(\vec{\gamma}_1) \varphi_\lambda^*(\vec{\gamma}_2) \varphi_{\lambda'}(\vec{\gamma}_2) \varphi_{\lambda'}^*(\vec{\gamma}_1).$$
(50)

Здесь n_λ - числа заполнения квазичастиц, ε_λ - их энергии. Штрих в сумме означает, что в ней отсутствуют переходы между одночастичными уровнями, в пространстве которых диагонализуется эффективное взаимодействие Γ . Так, например, для двух близких уровней ν_0 и ν'_0 в (50) нет перехода $\nu_0 \rightarrow \nu'_0$.

Как известно, близкая к поверхности Ферми область суммирования ($\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'} \sim \varepsilon_F N^{-\frac{1}{3}}$) порождает в A , а следовательно, и в амплитуде взаимодействия Γ неуниверсальное дальнодействие. Действительно, в этой области в сумме (50) основную роль играют комбинирующие, т.е. отличающиеся небольшим числом узлов, уровни ν и ν' и произведение $\varphi_\lambda(\vec{\gamma}) \varphi_{\lambda'}(\vec{\gamma})$ имеет плавную часть $\sim R^{-\frac{3}{2}}$. Поскольку

число комбинирующих уровней порядка $N^{2/3}$, то в пропагаторе $A(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$, а значит, и в амплитуде взаимодействия возникает неуниверсальное дальнодействие $\sim R^{-3}$. В далекой части суммы (50) ($\Sigma_\lambda - \Sigma_{\lambda'} \gg \epsilon_F N^{1/3}$) волновые функции $\psi_\lambda(\vec{r})$ можно заменить плоскими волнами, в результате чего она, очевидно, совпадает с соответствующей частью $A_\infty(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ суммы (50) бесконечной ядерной материи.

В импульсном представлении

$$A_\infty(q) = \int \frac{n_{\vec{P}+\vec{q}} - n_{\vec{P}}}{\Sigma_{\vec{P}+\vec{q}} - \Sigma_{\vec{P}}} \frac{d\vec{P}}{(2\pi)^3} \quad (51)$$

Предел этого выражения при $q \rightarrow 0$ не равен нулю, в то время, как из (50) следует, что $A(\vec{q}, \vec{q}') = 0$ при $q = 0$ (или $q' = 0$). Пропагатор $A(\vec{q}, \vec{q}')$ быстро меняется в области $q, q' \sim p_F N^{-1/3}$. Это простое следствие наличия в $A(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ дальнодействующей части, обязанной вкладу близкой к поверхности Ферми области суммирования в (50). При $q, q' \gg p_F N^{-1/3}$ пропагатор $A(\vec{q}, \vec{q}')$ совпадает с $A_\infty(\vec{q}, \vec{q}')$. Функция $A_\infty(q)$ имеет при $q = 2p_F$ логарифмическую точку ветвления. Ее возникновение нетрудно проследить в простейшем случае, когда эффективная масса M не зависит от импульса \vec{P} , т.е. $\Sigma_{\vec{P}} = P^2/2M$. Тогда интеграл легко берется. Вводя обозначение $y = q/2p_F$, мы получаем

$$A_\infty(y) = \frac{p_F M}{2\pi^2} \left(1 + \frac{1-y^2}{2y} \ln \frac{1+y}{1-y} \right) \quad (52)$$

Отсюда видно, что производная $\partial A_\infty / \partial y$ обращается в бесконечность при $y = 1$, и, следовательно, в координатном

представлении $A_{\infty}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2)$ имеет осциллирующую с периодом $2P_F$ дальнодействующую составляющую. Фурье-образ (52) такой:

$$A_{\infty}(\vec{z}_1 - \vec{z}_2) = -\frac{\cos 2P_F |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^3} + \frac{\sin 2P_F |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|}{|\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^4}. \quad (53)$$

Из сказанного выше следует, что и пропагатор $A(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ также, как и $A_{\infty}(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, имеет быстро осциллирующую дальнодействующую часть. В реальном случае, когда $\Sigma_P \neq \pm \frac{P^2}{2M}$, $A_{\infty}(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ уже не имеет вида (53). Однако логарифмическая точка ветвления при $q = 2P_F$ не исчезает, так как это — точка окончания спектра возбуждений частица-дырка, где минимая часть $A(q = 2P_F)$ обращается в нуль. Логарифмическая особенность при $q = 2P_F$ возникает и в амплитуде рассеяния в бесконечной системе. В координатном представлении эта особенность приводит к появлению универсального дальнодействия

$$\Gamma^{(2)}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \sim \cos(2P_F |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|) |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^{-5} \quad (54)$$

при $|\vec{z}_1 - \vec{z}_2| \gg z_0$

Однако вклад $\Gamma^{(2)}$ в матричные элементы Γ_{ij} обычно пренебрежимо мал из-за быстрых осцилляций $\Gamma^{(2)}$. Рассматривая более сложные диаграммы амплитуды взаимодействия, содержащие в промежуточных состояниях уже не две, а четыре, шесть и более линий, мы можем убедиться, что ни при каких значениях входных импульсов соответствующая этой диаграмме часть амплитуды взаимодействия не обращается в бесконечность (так же, как и

ее первая производная по импульсам), т.е. сложные диаграммы не дают вклада в дальнодействующую часть амплитуды взаимодействия. По-видимому, вообще можно сказать, что по мере усложнения диаграмм их особенности все более ослабляются, и вклад их в матричные элементы Γ_3 убывает.

Таким образом, мы видим, что вкладом универсального дальнодействия в канале частица-дырка можно пренебречь и считать $A_{\infty}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ локальной функцией координат. Разность же

$$\mathcal{A}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) = A(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) - A_{\infty}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2) \quad (55)$$

пренебрежимо мала, когда $\gamma_2 \sim \gamma_0$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ содержит только дальнодействующую составляющую пропагатора $A(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$. Это разбиение позволяет выделить из Γ неуниверсальную дальнодействующую часть.

Перейдем теперь к рассмотрению канала частица-частица. Интегрирование произведения гриновских функций G^q дает в этом случае следующий результат:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3) &= \int \frac{d\omega}{2\pi i} G^q(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3, \omega) G^q(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_3, E-\omega) = \\ &= \sum \frac{1 - n_{\lambda} - n_{\lambda'}}{E - \varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'} + 2\mu} \varphi_{\lambda}(\vec{\gamma}_1) \varphi_{\lambda}^*(\vec{\gamma}_3) \varphi_{\lambda'}(\vec{\gamma}_1) \varphi_{\lambda'}(\vec{\gamma}_3). \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь, так же как и в канале частица-дырка, часть суммы по λ, λ' вблизи поверхности Ферми является источником неуниверсального дальнодействия и, аналогично предыдущему, разность

$$\tilde{A}(\vec{\tau}, \vec{\tau}_3) = \tilde{A}(\vec{\tau}, \vec{\tau}_3) - \tilde{A}_{\infty}(\vec{\tau}, \vec{\tau}_3)$$

пренебрежимо мала при $\gamma_3 \sim \gamma_0$. За краем ядра \tilde{A} и \tilde{A}_{∞} совпадают друг с другом и с пропагатором свободных нуклонов и $\tilde{A} = 0$. Свойства внутренней части $\tilde{A}_{\infty}(\vec{\tau}, \vec{\tau}_3)$ во многом похожи на свойства $A_{\infty}(\vec{\tau}, \vec{\tau}_2)$. Обе функции зависят лишь от разности координат. В импульсном представлении

$A_{\infty}(P)$ имеет логарифмическую точку ветвления при $P=2P_F$, аналогичную точке ветвления $q=2P_F$ у функции $A_{\infty}(q)$. Эта особенность также порождает в Γ быстро осциллирующий дальнодействующий член, вклад которого в матричные элементы пренебрежимо мал. Однако, в отличие от $A_{\infty}(q)$, $A_{\infty}(P)$ имеет еще одну особую точку; эта функция логарифмически расходится при $P=0$. Когда в ядерной материи между квазичастицами действуют силы отталкивания и спаривания нет, расходимость $A_{\infty}(P)$ при $P=0$ приводит к появлению логарифмической особенности в точке $P=0$ и в амплитуде рассеяния.

Вблизи $P=0$ имеем $\Gamma_{\infty}(P) \sim \ln^{-1}(P/c)$ ($c \sim P_F$)
Отсюда получается, что в координатном представлении на расстояниях $|\vec{\tau}, -\vec{\tau}_3| \gg \gamma_0$

$$\Gamma_{\infty}(\vec{\tau}, -\vec{\tau}_3) \sim |\vec{\tau}, -\vec{\tau}_3|^{-3} \ln^{-1} |\vec{\tau}, -\vec{\tau}_3| \quad (57)$$

До сих пор мы могли считать, что все величины, описывающие свойства бесконечной системы, локальные, т.е. особые точки амплитуды рассеяния по переменным P и q порождают в координатном представлении либо локальные, либо несущественные быстро осциллирующие члены амплитуды рассеяния.

Здесь же мы сталкиваемся с совсем иной ситуацией: мы видим,

что в координатном представлении в Γ имеется медленно меняющийся, универсальный дальнодействующий член $\Gamma^{(1)}(\vec{z}, \vec{z}_3) \sim \sim |\vec{z} - \vec{z}_3|^3 \ln^{-1} |\vec{z} - \vec{z}_3|$. Нетрудно показать, что в том случае, когда суммарный момент пары квазичастиц мал, вклад этого члена в матричные элементы Γ_J сравним с вкладом локальной части Γ^e . Действительно,

$$\Gamma_J^{(1)} \sim \int_{\Omega} \frac{\Psi_J^*(\vec{z}, \vec{z}) \Psi_J(\vec{z}_3, \vec{z}_3)}{|\vec{z} - \vec{z}_3|^3 \ln |\vec{z} - \vec{z}_3|} d\vec{z} d\vec{z}_3 ,$$

где интеграл берется по области Ω больших расстояний $z_{1,3} \sim R$. При малом J $\Psi_J(\vec{z}, \vec{z})$ - плавная функция \vec{z} . Поэтому при $J \sim 1$

$$\Gamma_J^{(1)} \sim (2J+1)/R^3 (2J+1)^{1/2} \ln p_F R ,$$

т.е. имеет тот же порядок величины, что и главные члены.

Несколько иная ситуация возникает в том случае, когда в бесконечной системе между квазичастицами действуют силы притяжения. Тогда обычно константа C под знаком логарифма мала, и при $p \sim C$ Γ имеет полюс, что означает неустойчивость системы по отношению к образованию куперовских пар с энергией связи $\Delta \sim p_F C$. В результате происходит перестройка системы. В полной амплитуде взаимодействия двух квазичастиц в бесконечной системе появляется полюс, отвечающий распространению куперовской пары. Поэтому выражение реальной амплитуды взаимодействия в ядре конечных размеров через эту "наблюдаемую" амплитуду не очень удобно. В этом случае в качестве универсального взаимодействия Γ следует вводить не полную амплитуду взаимодействия в бесконечной системе со

спариванием, а неприводимый блок, не содержащий пропагатора пары и сохраняющий смысл потенциала взаимодействия. Ситуация здесь аналогична ситуации в канале частица-дырка в системе без спаривания при частоте $\omega \neq 0$. В этом случае амплитуда взаимодействия квазичастиц имеет полюс, отвечающий распространению звука, а в качестве универсального взаимодействия нужно вводить амплитуду $\Gamma^K(\omega = 0)$, не имеющую полюса.

Так, введенная неприводимая амплитуда взаимодействия квазичастиц в системе со спариванием уже не будет иметь особенностей на вещественной оси P вблизи $P = 0$: особые точки сдвигаются в комплексную плоскость на величину порядка Δ . Но так как в реальных ядрах $\Delta \sim 1$ Мэв, т.е. $\Delta \ll \varepsilon_F$, то в этом случае универсальное взаимодействие содержит дальнодействующую составляющую.

I3. Переформировка двухканальной системы уравнений для Γ

В этой главе мы получим выражения, связывающие дальнодействующие компоненты эффективного взаимодействия между квазичастицами ядра с локальной частью этого взаимодействия, которая совпадает с амплитудой рассеяния квазичастиц в бесконечной ядерной материи, когда квазичастицы находятся внутри ядра. Наиболее удобным для этого оказываются так называемые двухканальные уравнения. Переформировка этих уравнений может быть произведена строго. Здесь мы рассмотрим менее строгий, но более простой способ, приводящий к тем же результатам. Напомним, что неуниверсальное дальнодействие в графиках для амплитуды Γ возникает тогда, когда при суммировании по промежуточным состояниям оказывается существенной область, примыкающая к поверхности Ферми, и поэтому любой

график, в котором основной вклад дают промежуточные состояния с энергией возбуждения $E_s \gg \varepsilon_F N^{-\frac{1}{3}}$, универсален. Отсюда, в частности, следует, что если в системе нет аномально близких коллективных состояний сложной природы, неуниверсальное дальнодействие возникает лишь в тех графиках, в которых имеются части, отвечающие распространению пары квазичастиц с энергией возбуждения $\sim \varepsilon_F N^{-\frac{1}{3}}$. Важно также отметить тот факт, что графики, содержащие неуниверсальное дальнодействие в обоих каналах одновременно, обыкновенно дают малый вклад ($N^{-2/3}$) в окончательные результаты. Поэтому задача по существу сводится к собиранию лестничных графиков в обоих каналах: частица-частица и частица-дырка. При этом удобно считать, что графикам, изображенным на рис. 7:



Рис. 7

соответствуют лишь дальнодействующие части \hat{A} и \tilde{A} пропагаторов $A = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} G(\varepsilon + \frac{\omega}{2})G(\varepsilon - \frac{\omega}{2})$ и $\tilde{A} = \int \frac{d\omega}{2\pi i} G(E - \omega)G(E + \omega)$, определяемые следующим образом:

$$\hat{A} = A - A_\infty$$

$$\tilde{A} = \tilde{A} - \tilde{A}_\infty$$

Очевидно, что те графики эффективного взаимодействия Γ , в которых ни разу не встречается ни \hat{A} , ни \tilde{A} , совпадают с соответствующими графиками для Γ в бесконечной системе. Поэтому, собирая лестничные графики, амплитуду Γ взаимодействия между квазичастицами в конечной системе можно предста-

вить в виде

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma^u, \quad (58)$$

где Γ^u представляет собой совокупность локальных частей Γ . Γ_1 содержит неуниверсальное дальнодействие только в канале частица-дырка (т.е. не содержит $\tilde{\Phi}$) и определяется уравнением

$$\Gamma_1 = \Gamma^u + \Gamma^u \not{A} \Gamma_1. \quad (59)$$

Γ_2 содержит неуниверсальное дальнодействие в канале частица-частица. Уравнения для Γ_2 таково:

$$\Gamma_2 = \Gamma^u + \Gamma^u \not{A} \Gamma_2. \quad (60)$$

Нетрудно показать, что уравнения (58), (59) и (60) для Γ можно записать в виде:

$$\Gamma = \Gamma^u + \Gamma^u \not{A} \Gamma + \Gamma^u \not{A} \Gamma. \quad (61)$$

Входящая в уравнения (58), (59) и (60) универсальная амплитуда $\Gamma^u(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3, \vec{z}_4, s_c)$ внутри ядра, когда $z_i < R$, совпадает с амплитудой рассеяния квазичастиц в бесконечной системе. За краем ядра Γ^u переходит в амплитуду рассеяния свободных нуклонов, аналитически продолженную в область отрицательных энергий (за краем ядра квадраты импульсов нуклонов малы и отрицательны). Внутри ядра Γ^u зависит лишь от разностей координат $\vec{z}_{ik} = \vec{z}_i - \vec{z}_k$, а в импульсном представлении от двух импульсов: суммарного $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ и переданного $\vec{q} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2$. Нетрудно видеть, что из-за того, что $\not{A}(\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ - плавная функция z_1 и z_2 , в интегральный

член уравнения (59) входит $\Gamma^u(\mathcal{P})$ при малых q . По той же причине в интегральный член (60) входит $\Gamma^u(q)$ при малых \mathcal{P} . При $q \rightarrow 0$ $\Gamma^u(\mathcal{P}, q)$ никаких особенностей не имеет, и в (59) можно представить $\Gamma^u(\mathcal{P}, q=0)$, которая совпадает с амплитудой $a^2 \Gamma^u(\mathcal{P})$, вводимой в теории Ферми-жидкости Ландау. Используя известное соотношение для амплитуд теории Ферми-жидкости мы можем связать $\Gamma^u(q=0)$ с локальной амплитудой взаимодействия \mathcal{F} теории конечных Ферми-систем ($\mathcal{F} = a^2 \Gamma^u$, a^2 - перенормировочный множитель)

$$\Gamma^u(q=0) = \mathcal{F} + \mathcal{F} A_{\infty}(q=0) \Gamma^u(q=0)$$

Это соотношение позволяет использовать для вычисления дальнодействия в канале частица-дырка константы взаимодействия, найденные из анализа поведения ядра во внешнем поле. Точка $\mathcal{P}=0$ для Γ^u является особой и вблизи нее $\Gamma^u(\mathcal{P}) \sim \ln^{\prime} P$ (в системе без спаривания). Так как характерные $P \sim p_F N^3$, то дальнодействие в канале частица-частица имеет лишь логарифмическую малость и поэтому должно быть учтено. В системе со спариванием особые точки Γ^u сдвигаются в комплексную плоскость на величину порядка Δ , однако из-за того, что в реальных ядрах величина щели Δ мала, универсальное дальнодействие в Γ^u все равно остается.

Поскольку в задаче нет параметра малости, вычисление Γ^u чрезвычайно сложная задача. Поэтому пока наиболее реальный путь связан с параметризацией амплитуды Γ^u и определением вводимых в теорию констант из экспериментальных данных.

Разложим амплитуду Γ^u по инвариантным амплитудам γ^2 . Ввиду отсутствия в среде галилеевской инвариантности это разложение выглядит сложнее нежели в пустоте. Так, когда все

входные и выходные импульсы лежат на поверхности Ферми, инвариантных амплитуд γ^i , являющихся аналитическими функциями q^2 и P^2 , восемь:

$$\begin{aligned} \Gamma^i = \sum \hat{\gamma}_i O^i &= \hat{f} + \hat{g} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \hat{S}(P_1 - P_2 + q)_{\mu} S_{\alpha \beta} + \\ &+ \hat{t} q_{\alpha} q_{\beta} S_{\alpha \beta} + \hat{u} (P_1 + P_2)_{\alpha} (P_1 + P_2)_{\beta} S_{\alpha \beta} + i \hat{x} (\vec{e}_1 + \\ &+ \vec{e}_2) [\vec{q} \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)] + i \hat{O} (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) [\vec{q} \times (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)] + \\ &+ \hat{K} [\vec{e}_1 \times \vec{e}_2] [(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{q})], \end{aligned} \quad (62)$$

$$S_{\alpha \beta} = e_{1 \alpha} e_{2 \beta} - \frac{1}{3} \vec{e}_1 \vec{e}_2 \delta_{\alpha \beta}.$$

$\hat{\gamma}_i$, входящие в выражение (62), с точностью до членов $\sim \frac{N-Z}{2A}$ являются изотопическими скалярами: $\hat{\gamma}_i = \gamma_i + \gamma'_i \vec{T}_1 \vec{T}_2$.

Одна из введенных амплитуд не является произвольной. Нетрудно видеть, что, например, амплитуда $\hat{g} \vec{e}_1 \vec{e}_2$ может быть разложена по амплитудам \hat{S} , \hat{t} , \hat{u} , но коэффициенты этого разложения не будут аналитическими функциями P^2 и q^2 . Требование аналитичности приводит к появлению лишней амплитуды \hat{g} , но при этом на одну из тензорных амплитуд, например, на \hat{u} налагается ограничение:

$$\mathcal{U}(P^2, q^2) = \mathcal{U}_1(q^2) + \mathcal{U}_2(P^2)$$

Как говорилось выше, γ^i - функции двух импульсов: P^2 и q^2 , вместо которых удобно ввести две новых переменных $z = \vec{P}_1 \vec{P}_2$ и $x = \frac{1}{4} (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)(\vec{P}_3 - \vec{P}_4)$. При перестановках $x \rightarrow -x$, $z \rightarrow z$. Гармоники разложения амплитуд $\hat{\gamma}^i(x, z)$ в двойной ряд по полиномам Лежандра

$$\hat{\gamma}^i(x, z) = \sum \hat{\gamma}_{mM}^i P_m(x) P_M(z) \quad (63)$$

являются универсальными параметрами. Степень убывания $\gamma_{m\mu}^i$ с ростом номеров m и μ определяется положением и характером особенностей $\Gamma^{\mu}(x, z)$. Число независимых параметров $\gamma_{m\mu}^i$, вводимых в теории, сокращается в результате использования условий антисимметрии амплитуды:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4\tau}(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-1)^T \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{4\tau}(p_1, p_2, p_4, p_3) = (-1)^T \Gamma_{\beta\alpha\gamma\delta}^{4\tau}(p_2, p_1, p_3, p_4), \quad (64)$$

где T - суммарный изоспин сталкивающихся квазичастиц, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - спиновые индексы. Для гармоник разложения инвариантных амплитуд отсюда получаем:

$$\begin{aligned} f_{m\mu}^T + g_{m\mu}^T &= (-1)^{T+m} (f_{m\mu}^T + g_{m\mu}^T), \\ f_{m\mu}^T - 3g_{m\mu}^T &= (-1)^{T+m+1} (f_{m\mu}^T - 3g_{m\mu}^T), \\ S_{m\mu}^T &= (-1)^{T+m} t_{m\mu}^T, \quad u_{m\mu}^T = (-1)^{T+m} u_{m\mu}^T, \\ x_{m\mu}^T &= (-1)^{T+m+1} x_{m\mu}^T, \\ K_{m\mu}^T &= (-1)^{T+m+1} O_{m\mu}^T \end{aligned} \quad (65)$$

Можно надеяться, что из-за короткодействия ядерных сил в амплитуде рассеяния Γ^{μ} будут существенны только несколько первых гармоник по переменной X . Как отмечалось ранее, Γ^{μ} содержит в канале двух частиц универсальное дальнодействие (особая часть $\gamma_m^s(z) \sim \ell m^{-1}(1-z)/C_m$), гармоники которого по z медленно убывают с ростом номера μ . Гармоники же регулярной части $\delta_m^s(z)$ по μ убывают быстро. Далеко по μ гармоники $\delta_m^s(z)$ дают вклад только тогда, когда существенно дальнодействие в канале двух частиц (например, при

вычислении энергии взаимодействия 2-х частиц с моментом $J=0$).

Во всех остальных случаях в ответ входит только несколько первых гармоник регулярной и сингулярной части. Константы C_m^i могут быть связаны с константами, определяющими регулярную часть χ_m^i и найдены, например, из экспериментов по статическим моментам и вероятностям электромагнитных и β -переходов в ядрах.

Для иллюстрации рассмотрим простой пример, когда все тензорные и спин-орбитальные амплитуды равны нулю, а в сингулярной и спин-спиновой амплитудах оставлены только нулевая и первая гармоники ^{x)}:

$$f^T = f_{00}^T + f_{01}^T z + f_{10}^T x$$

$$g^T = g_{00}^T + g_{01}^T z + g_{10}^T x$$

Константы f_{00}^T , g_{00}^T описывают S -рассеяние, а f_{10}^T , g_{10}^T - P -рассеяние. Напомним, что $x = \frac{1}{2}(1-z-q^2)$, так что члены $f_{10}q^2$ и $g_{10}q^2$ соответствуют введению в амплитуду эффективного радиуса взаимодействия.

Введенные 12 констант связаны шестью условиями:

$$g_{00}^1 = -f_{00}^1, g_{01}^1 = -f_{01}^1, g_{10}^1 = \frac{1}{3}f_{10}^1,$$

$$g_{00}^0 = \frac{1}{3}f_{00}^0, g_{01}^0 = \frac{1}{3}f_{01}^0, g_{10}^0 = -f_{10}^0,$$

^{x)} Ограничение только нулевыми гармониками приводит к соотношениям, которые резко противоречат экспериментальным данным.

так что независимых констант в рассматриваемом примере всего
шесть. Амплитуды f и g могут быть записаны в виде

$$f = \left\{ \frac{1}{4} (3f_{00}^2 + f_{00}^0) + \frac{1}{4} (3f_{01}^2 + f_{01}^0) \mp + \frac{1}{4} (3f_{10}^2 + f_{10}^0) x \right\} + \\ + \left\{ \frac{1}{4} (f_{00}^2 - f_{00}^0) + \frac{1}{4} (f_{01}^2 - f_{01}^0) \mp + \frac{1}{4} (f_{10}^2 - f_{10}^0) x \right\} \bar{T}_1 \bar{T}_2 ;$$

$$g = \left\{ \frac{1}{4} (-3f_{00}^2 + \frac{1}{3} f_{00}^0) + \frac{1}{4} (-3f_{01}^2 + \frac{1}{3} f_{01}^0) \mp + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (f_{10}^2 - f_{10}^0) x \right\} + \left\{ \frac{1}{4} (-f_{00}^2 - \frac{1}{3} f_{00}^0) + \frac{1}{4} (-f_{01}^2 - \frac{1}{3} f_{01}^0) \mp + \frac{1}{4} (\frac{1}{3} f_{10}^2 + f_{10}^0) x \right\} \bar{T}_1 \bar{T}_2 . \quad (66)$$

Значения амплитуд f и g при $q = 0$ (т.е. при
 $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta$) совпадают со статическими пределами f^K и g^K

амплитуд рассеяния, вводимыми в теории Ферми-жидкости.

Амплитуды f^K , g^K и f^ω , g^ω связаны соотношениями:

$$f_M^K = \frac{f_M^\omega}{1 + 2f_M^\omega/(2M+1)}, \quad f_M'^K = \frac{f_M'^\omega}{1 + 2f_M'^\omega/(2M+1)}$$

$$g_M^K = \frac{g_M^\omega}{1 + 2g_M^\omega/(2M+1)}, \quad g_M'^K = \frac{g_M'^\omega}{1 + 2g_M'^\omega/(2M+1)}$$

Из соотношений (66) при $q = 0$ получим 8 соотношений для
введенных констант, откуда найдем

$$f_0^0 = \frac{3}{4} (f_0^K + g_0^K - 3f_0'^K - 3g_0'^K),$$

$$\begin{aligned}
 f_{00}^0 &= \frac{1}{4} (f_0^k + f_0'^k - 3g_0^k - 3g_0'^k), \\
 f_{10}^0 &= \frac{1}{2} (f_0^k - 3f_0'^k - 3g_0^k + 9g_0'^k), \\
 f_{10}' &= \frac{3}{2} (f_0^k + f_0'^k + g_0^k + g_0'^k), \\
 f_{01}^0 &= \frac{1}{2} f_{10}^0 + f_1^k - 3f_1'^k, \\
 f_{01}' &= \frac{1}{2} f_{10}' + f_1^k + f_1'^k.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Оставшиеся два соотношения могут быть использованы для выражения g_1^k и $g_1'^k$, а следовательно, и g_1^ω , $g_1'^\omega$ — раз остальные константы:

$$\begin{aligned}
 g_1^k &= \frac{1}{4} (-3f_{01}' + \frac{1}{3}f_{01}^0 - \frac{1}{2}f_{10}' + \frac{1}{2}f_{10}^0), \\
 g_1'^k &= \frac{1}{4} (-f_{01}' - \frac{1}{3}f_{01}^0 - \frac{1}{6}f_{10}' - \frac{1}{2}f_{10}^0).
 \end{aligned} \tag{68}$$

Подставим в полученные формулы значения констант $f_0^\omega = 0,2$; $f_0'^\omega = 0,8$; $g_0^\omega = 0,5$; $g_0'^\omega = 0,8$, найденные в работе /4/, а также $f_1^\omega = -0,15$ и $f_1'^\omega = 0,3$ из работы /5/ (эффективную массу M^* мы принимали разной, 0,9 M). Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 f_{00}^0 &= -1,15; \quad f_{00}' = -0,8; \quad f_{10}^0 = 0,6; \quad f_{10}' = 1,5; \\
 f_{01}^0 &= -0,6; \quad f_{01}' = 0,8; \\
 \text{а также } g_1^\omega &= -0,5; \quad g_1'^\omega = -0,25.
 \end{aligned}$$

Отметим, что приведенное вычисление носит несколько условный характер, т.к. ошибки в найденном значении f_1^ω велики, а кроме того, при нахождении констант f_0^ω , $f_0'^\omega$, g_0^ω и $g_0'^\omega$ неучтенные гармоники f^ω и g^ω не учитывались.

учет, разумеется, изменил бы значения и самих нулевых гармоник.

Таким образом, в рассматриваемом приближении константы f_{10} и g_{10} , характеризующие эффективные радиусы взаимодействия, а также первые гармоники g_i^ω и $g_i'^\omega$ амплитуды спин-спинового взаимодействия выражаются через константы f_0^ω , $f_0'^\omega$, g_0^ω , $g_0'^\omega$, f_i^ω и $f_i'^\omega$. Если бы мы рассматривали только те задачи, в которых участвует амплитуда взаимодействия \mathcal{F} , и не учитывали связь \mathcal{F} с полной амплитудой Γ^u рассеяния квазичастиц, то никаких соотношений между различными гармониками \mathcal{F} мы бы получить не могли. Конечно, сделанное нами приближение – будем называть его первым – является слишком грубым. Во-первых, мы пренебрегли тензорными амплитудами, которые именуют последнее из соотношений (65). Во-вторых, мы не учитывали гармоник более высокого порядка. Следующее приближение состоит в удержании тензорных амплитуд.

Магнитные моменты ядер

Рассмотрим схему вычисления статических ядерных моментов на примере магнитных моментов ядер. Мы видели, что изменение среднего значения оператора Q при добавлении частицы к ядру определяется как

$$\delta \langle Q \rangle = S_P Q \delta \rho^a = \sum Q_{\lambda\lambda'} \delta \rho_{\lambda\lambda'}^a,$$

где $\delta \rho^a$ – изменение матрицы плотности частиц при добавлении к ядру частицы:

$$\delta \rho^a = \int \delta G \frac{d\varepsilon}{2\pi^2}$$

Если наряду с $\delta \rho^a$ ввести величину $\delta \rho$ – изменение мат-

рицы плотности квазичастиц:

$$\delta \rho = \int \delta G^2 \frac{d\varepsilon}{2\pi L},$$

то легко получить связь:

$$\delta \rho^a = a \delta \rho,$$

где a - перенормировочный коэффициент функции Грина.

Изменение матрицы плотности квазичастиц вызывается двумя причинами: во-первых, возникает изменение в числах заполнения квазичастиц, связанное с изменением правила обхода полюса в функции Грина, - это изменение есть и в отсутствие взаимодействия между квазичастицами, - во-вторых, добавленная квазичастица своим силовым полем изменяет распределение других квазичастиц.

Первый член в простейшем случае, например, при добавлении к дважды магическому ядру частицы, равняется

$$\delta \rho_{\lambda\lambda'}^o = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda_o},$$

что означает, что возникла квазичастица в состоянии λ_o .

Второй член, как уже сказано, обусловлен силовым воздействием добавленной квазичастицы на квазичастицы остова и определяется выражением:

$$\begin{aligned} \delta \rho_{\lambda\lambda'} &= (1 - \delta_{\lambda\lambda'}) \int \frac{d\varepsilon}{2\pi L} G_\lambda(\varepsilon) \delta \sum_{\lambda\lambda'} G_{\lambda'}(\varepsilon) = \\ &= (1 - \delta_{\lambda\lambda'}) \frac{\eta_\lambda - \eta_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} V_{\lambda\lambda'}, \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$V_{\lambda\lambda'} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \mathcal{F}_{\lambda\lambda'}^{\lambda_1\lambda_2} (\delta \rho)_{\lambda_1\lambda_2}.$$

В выражении для эффективного поля V нет затравочного члена $e_q V_{\lambda\lambda'}^0$, т.к. на систему не накладывается никакое внешнее поле. Окончательно

$$\begin{aligned} (\delta\rho)_{\lambda\lambda'} &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda_0} + \frac{u_\lambda - u_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} \sum_{\lambda_1\lambda_2} \Gamma_{\lambda\lambda'}^{\lambda_1\lambda_2} \delta\rho_{\lambda_1\lambda_2} = \\ &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\lambda\lambda_0} + \frac{u_\lambda - u_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} \Gamma_{\lambda\lambda'}^{\lambda_0\lambda_0}. \end{aligned} \quad (70)$$

Среднее значение магнитного момента

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle &= \mu (\delta\rho)^a = 1/4 \left\{ (\delta_0 \rho)^a + \int G \delta \Sigma G \frac{d\varepsilon}{2\pi i} \right\} = \\ &= \mu \left\{ a \delta_0 \rho + a A \Gamma \delta_0 \rho + a B \Gamma \delta_0 \rho \right\} = \\ &= Ma(1+B\Gamma^\omega)(1+A\Gamma)\delta_0 \rho = e_q \mu \left\{ \delta_0 \rho + A\Gamma \delta_0 \rho \right\} = \\ &= e_q \mu \left\{ \delta_0 \rho + A\Gamma^\omega \delta \rho \right\} = e_q \mu \delta \rho = \\ &= e_q^e \mu^e \delta \rho + e_q^s \mu^s \delta \rho. \end{aligned}$$

Заряд квазичастицы e_q различен для орбитальной e_q^e и спиновой e_q^s частей магнитного момента.

Если, далее, $\delta\rho$ определяется уравнением (70), то

$$\langle \mu \rangle_{\lambda_0} = e_q \mu_{\lambda_0\lambda_0} + e_q \sum \Gamma_{\lambda_0\lambda_0}^{\lambda_1\lambda_2} A_{\lambda_1\lambda_2} \mu_{\lambda_1\lambda_2} \quad (71)$$

Эта формула остается справедливой и с учетом парных корреляций. Легко видеть, что определяемая в (71) величина $\langle \mu \rangle_{\lambda_0}$

есть ни что иное, как диагональный матричный элемент по состоянию λ_0 от эффективного поля $V[\mu]$. От уравнения (71) перейдем к обычной форме уравнения для V :

$$V_{\lambda_1 \lambda_2} [\mu] = e_q / M_{\lambda_1 \lambda_2} + \sum \mathcal{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda \lambda'} A_{\lambda \lambda'} V_{\lambda \lambda'} [\mu] \quad (72)$$

Запишем оператор магнитного момента в виде:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}^j + \hat{\mu}^s$$

$$\hat{\mu}^j = \frac{1+T_z}{2} \hat{j}, \quad \hat{\mu}^s = \frac{1+T_z}{2} (\gamma_p - \frac{1}{2}) \hat{G}_z + \frac{1-T_z}{2} \gamma_n \hat{G}_z$$

$\hat{\mu}^j$ будем называть орбитальной, а $\hat{\mu}^s$ - спиновой частью магнитного момента. Пренебрегая малыми членами, получаем:

$$(e_q \hat{\mu}^j)_{\lambda \lambda'} = \left\{ e_q^e (\vec{e} + \frac{1}{2} \vec{G}) + \frac{1}{2} (e_q^s - e_q^e) \vec{G} \right\}_{\lambda \lambda'} \approx$$

$$= e_q^e \vec{j}_{\lambda \lambda'} = \vec{j}_{\lambda} \delta_{\lambda \lambda'} \left\{ (1 - \gamma_e) \frac{1-T_z}{2} + \gamma_e \frac{1+T_z}{2} \right\}.$$

С той же точностью

$$V_{\lambda \lambda'} [\hat{\mu}^j] = (e_q \hat{\mu}^j)_{\lambda \lambda'} = \vec{j}_{\lambda} \delta_{\lambda \lambda'} \left\{ (1 - \gamma_e) \frac{1-T_z}{2} + \gamma_e \frac{1+T_z}{2} \right\}$$

Это следует из того, что оператор \vec{j} имеет только диагональные матричные элементы, а в правой части уравнения (72) диагональных элементов нет. Первый член соответствует нечетному нейтрону. Орбитальный множитель Ланде у нейтрона, как можно показать, равняется

$$\gamma_e = \frac{1}{3} f_1^P.$$

На такую же величину уменьшается орбитальный множитель Ланде у протона ($= 1 - \frac{g_e}{2}$).

Рассмотрим теперь спиновую часть магнитного момента и пренебрежем на время всеми членами амплитуды, содержащими импульсы, т.е. будем считать, что

$$\mathcal{T} \frac{dn}{d\varepsilon} = \hat{f}_o + \hat{g}_o \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2.$$

Тогда общий вид решения уравнения для $V[6]$ имеет вид:

$$V_\alpha[\sigma] = T_{\alpha\beta}(\vec{r}) \sigma_\beta = T_1(r) \sigma_\alpha + T_2(r) (\vec{\sigma} \vec{\varepsilon}) n_\alpha, \quad (72)$$

где

$$n_\alpha = \chi_\alpha / \chi.$$

Очевидным образом, в уравнении для $V[6]$ останется вклад только от амплитуды \hat{g}_o :

$$V_\alpha[\sigma] = \hat{e}_q^s \sigma_\alpha + \frac{\hat{g}_o}{\frac{dn}{d\varepsilon_F}} \sigma_\beta \sum \varphi_\lambda^*(\vec{r}) \sigma_\beta \varphi_\lambda(\vec{r}) \times \\ \times \frac{n_\lambda - n_{\lambda'}}{\varepsilon_\lambda - \varepsilon_{\lambda'}} V_{\alpha\lambda'}[\sigma]. \quad (73)$$

Оператор σ_α имеет отличные от нуля недиагональные элементы только по состояниям, принадлежащим одному и тому же спин-орбитальному дублету. Сопряженные уровни этого дублета должны лежать по разные стороны от поверхности Ферми (множитель $(n_\lambda - n_{\lambda'})$). (см. рис. 8). Таких дублетов в конкретных ядрах оказывается один-два, редко три. Численный анализ показывает, что вклад других переходов (с правилом отбора $\Delta n = 1$) в уравнении для $V[6]$ (они возникают, начи-

ная со второго порядка теории возмущений) мал. (5-10%).



Рис. 8

Если их не учитывать, то уравнение для $V[\epsilon]$ может быть решено аналитически (такое решение было получено М.А.Троицким и В.А.Ходелем /6/). Проще всего оно выглядит в случае, когда подходящий спин-орбитальный дублет всего один. Тогда

$$T_{1,2}(z) = T_{1,2} R_{ne}^2(z)$$

где T_1, T_2 - числа.

Уравнение (73) можно записать в виде:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}(\vec{n}) = \delta_{\alpha\beta} - \chi_1 \frac{4\pi}{B(2l+1)} \sum' f \phi_{j'em}^*(\vec{n}) \epsilon_\beta \phi_{j'e'm}(\vec{n}) \times \\ \times \int \phi_{j'e'm'}^*(\vec{n}_1) T_{\alpha\beta}(\vec{n}_1) \epsilon_{\gamma} \phi_{j'em}(\vec{n}_1) d\vec{n}_1 \quad (74)$$

где

$$\chi_1 = \frac{2}{B(2l+1)} \left(\frac{dn}{d\epsilon_F} \right)^{-1} \frac{1}{4\pi} \int g_0(z) R_{ne}^2(z) R_{ne'}^2(z) z$$

$B(2l+1)$ - величина расщепления спин-орбитального дублета, а f - фактор заполнения комбинирующего уровня. Приближенно $f = \frac{K}{2j+1}$, где K - число работающих в интегральном члене частиц. При подстановке (72*) в (74) возникают суммы:

$$K_{\alpha\beta}^{(1)} = 4\pi \sum' \phi_{j'em}^*(\vec{n}) \epsilon_\alpha \phi_{j'e'm'}(\vec{n}') \times$$

$$\times \int \Phi_{j'e_m'}^*(\vec{n}_1) S_\rho \Phi_{je_m}(\vec{n}_1) d\vec{n}_1,$$

$$K_{\alpha\rho}^{(2)} = 4\pi \sum' \Phi_{je_m}^*(\vec{n}) S_\alpha \Phi_{j'e_m'}(\vec{n}) \times \quad (75)$$

$$\times \int \Phi_{j'e_m'}^*(\vec{n}_1) S_\delta P_{1g} P_{1\rho} \Phi_{je_m}(\vec{n}_1) d\vec{n}_1.$$

Вычислим их. Для этого введем коэффициенты a_{ik} :

$$K_{\alpha\rho}^{(2)} = a_{1k} \delta_{\alpha\rho} + a_{2k} n_\alpha / r_\rho.$$

Используя условие полноты и теорему сложения сферических функций, получим следующие формулы для a_{ik} :

$$3a_{11} + a_{21} = 4V(2j+1); \quad 3a_{12} + a_{22} = 2V(2j+1),$$

$$a_{11} + a_{21} = 2V(2j+1); \quad a_{12} + a_{22} = V(2j+1), \quad (76)$$

где

$$V = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{4j(j+1)}{(2e+1)^2} \right].$$

Приведем вывод первого соотношения (76). Из (75) имеем

$$\begin{aligned} 3a_{11} + a_{21} &= 4\pi \sum' \Phi_{je_m}^*(\vec{n}) S_\alpha \Phi_{j'e_m'}(\vec{n}) \times \\ &\times \int \Phi_{j'e_m'}^*(\vec{n}_1) S_\alpha \Phi_{je_m}(\vec{n}_1) d\vec{n}_1, \end{aligned} \quad (77)$$

Используя условие полноты функций Φ_{je_m} , из (77) легко получить

$$3a_{11} + a_{21} = 4\pi \left[3 \sum \Phi_{je_m}^*(\vec{n}) \Phi_{je_m}(\vec{n}) - \right]$$

$$-\sum \phi_{j em}^*(\vec{n}) \alpha_k \phi_{j em'}(\vec{n}) \times \int \phi_{j em'}^*(\vec{n}_1) \times \\ \times \epsilon_k \phi_{j em}(\vec{n}_1) d\vec{n}_1] .$$

Хорошо известно, что

$$(\delta_\alpha)_{jem, jem'} = \frac{2(-1)^t}{2e+1} \int \phi_{j em'}^*(\vec{n}) j \alpha \phi_{j em}(\vec{n}) d\vec{n},$$

где

$$t = \begin{cases} 0, & \text{при } j = e + \frac{1}{2} \\ 1, & \text{при } j = e - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Воспользовавшись еще раз полнотой функций ϕ_{jem} , получим:

$$3a_{11} + a_{21} = 4\pi \sum \phi_{j em}^*(\vec{n}) \phi_{j em}(\vec{n}) \left[3 - \frac{4j(j+1)}{(2e+1)^2} \right].$$

откуда, используя теорему сложения сферических функций:

$$4\pi \sum \phi_{j em}^*(\vec{n}) \phi_{j em}(\vec{n}) = 2j + 1 ,$$

получим первое из выражений (76). Аналогично получаются и остальные.

Таким образом,

$$\tau_1 = e_g - \chi \tau_1 - \frac{1}{2} \chi \tau_2 ,$$

$$\tau_2 = -\chi \tau_1 - \frac{1}{2} \chi \tau_2 ,$$

где

$$\chi = \chi, \nu g ,$$

где

$$g = \begin{cases} K & \text{если } K - \text{четное} \\ \frac{K-1}{2j-1}(2j+1) & \text{если } K - \text{нечетное} \end{cases}$$

(при $K \sim j \gg 1$ имеем $g \approx K$).

Из (72) находим

$$V_\alpha[\sigma] = e_g [\sigma_\alpha - \Lambda (\sigma_{\beta n_\beta} n_\alpha + \sigma_\alpha)], \quad (78)$$

где

$$\Lambda = \frac{\chi}{1 + \frac{3}{2}\chi}. \quad (79)$$

При положительной константе $\sigma_0 > 0$ отклонение от шмидтовского значения всегда будет направлено внутрь линий Шмидта, что всегда наблюдается на эксперименте.

14а. Магнитные моменты ядер. Учет отражений квазичастиц от границ системы

Уравнение для эффективного поля в форме (72) имеет смысл использовать только тогда, когда сумма по λ, λ' сходится вблизи поверхности Ферми. Это происходит, как правило, в том случае, когда внешнее поле V^0 длинноволновое, и отвечает тому факту, что в соответствующем уравнении для бесконечной системы (89) интегрирование распространяется по интервалу $\sim \vec{K}$ (волновой вектор внешнего поля) вблизи поверхности Ферми. Такая ситуация будет безусловно иметь место, если $\frac{1}{R} \ll K \ll P_F$, т.е. для таких полей система должна вести себя подобно бесконечной. В случае же $K \gtrsim \frac{1}{R}$ может стать существенным отражение квазичастиц от поверхности ядра. Оказывается, это бывает в тех случаях, когда в сумме (72) играет выделенную роль один переход $V_0 \rightarrow V_0'$.

Разобьем пропагатор A на сумму

$$A = A_0 + A'$$

где A_0 содержит указанный аномальный переход $V_0 \rightarrow V'_0$,
а A' - все остальные.

Введем вспомогательные величины

$$\Gamma' = \mathcal{F} + \mathcal{F} A' \Gamma' \quad (80)$$

и

$$V' = e_q V^0 + \mathcal{F} A' V' \quad (81)$$

Тогда легко видеть, что можно записать

$$V = V' + \Gamma' A_0 V. \quad (82)$$

Мы сейчас покажем, что в A_0 есть члены, на сохраняющие импульса (причем несохранение сильное, на величину $\sim P_f$) и приводящие к быстро осциллирующим компонентам V даже в том случае, когда V^0 - плавное поле. Особенно просто понять, в чем дело, если оставить в \mathcal{F} только нулевую гармонику, а для $R_V(\tau)$ использовать квазиклассическое представление:

$$R_V(\tau) = \frac{\alpha_V(\tau)}{\sqrt{P_V(\tau)}} \sin \Phi_V(\tau),$$

где $\Phi_V(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} P_V(\xi) d\xi$ - квазиклассическая фаза.

Тогда

$$A_0(\tau_1, \tau_2) = \int_{V_0} V'_0(\tau_1) \int_{V_0} V'_0(\tau_2) \cos \Phi_{V_0}(\tau_1) \times \\ \times \cos \Phi_{V_0'}(\tau_1) \cos \Phi_{V_0}(\tau_2) \cos \Phi_{V_0'}(\tau_2),$$

где

$f_{\nu_0 \nu'_0}(z)$ - плазменная функция z .

Разбивая произведение

$$\cos \phi_{\nu_0}(z) \cos \phi_{\nu'_0}(z) = \frac{1}{2} [\cos(\phi_{\nu_0}(z) - \phi_{\nu'_0}(z)) + \cos(\phi_{\nu_0}(z) + \phi_{\nu'_0}(z))],$$

и получим сумму плавной по z функции ($\phi_{\nu_0}(z) - \phi_{\nu'_0}(z) \sim 1$ для всех $z \leq R$) и быстро осциллирующей функции

$$(\phi_{\nu_0}(z) + \phi_{\nu'_0}(z)) \sim N^{1/3}$$

В соответствии с этим представим A_0 в виде:

$$A_0(z_1, z_2) = A_0^{(11)}(z_1, z_2) + A_0^{(12)}(z_1, z_2) + A_0^{(21)}(z_1, z_2) + A_0^{(22)}(z_1, z_2)$$

$$A_0^{(11)}(z_1, z_2) \sim \cos[\phi_{\nu_0}(z_1) - \phi_{\nu'_0}(z_1)] \cos[\phi_{\nu_0}(z_2) - \phi_{\nu'_0}(z_2)]$$

$$A_0^{(12)}(z_1, z_2) \sim \cos[\phi_{\nu_0}(z_1) - \phi_{\nu'_0}(z_1)] \cos[\phi_{\nu_0}(z_2) + \phi_{\nu'_0}(z_2)]$$

$$A_0^{(21)}(z_1, z_2) \sim \cos[\phi_{\nu_0}(z_1) + \phi_{\nu'_0}(z_1)] \cos[\phi_{\nu_0}(z_2) + \phi_{\nu'_0}(z_2)]$$

Ясно, что члены, содержащие $A_0^{(2,1)}$ и $A_0^{(2,2)}$, отвечают большим $q \sim \rho_F$, поэтому разобьем V на две компоненты - плавную $V^{(1)}$ (отвечающую $q \sim 1/R$) и быстро осциллирующую $V^{(2)} (q \sim \rho_F)$:

$$V = V^{(1)} + V^{(2)}$$

$$V^{(1)} = V' + \Gamma'(A_0^{(11)} V^{(1)} + A_0^{(12)} V^{(2)}), \quad (83)$$

$$V^{(2)} = \Gamma'(A_0^{(21)} V^{(1)} + A_0^{(22)} V^{(2)}).$$

В первом уравнении теперь стоит Γ' при $q \sim 1/R$, а во втором - при $q \sim \rho_F$. При таких больших q решение уравнения (80) для Γ' становится бессмысленным, т.к., сумма по λ, λ' распространяется на состояния, лежащие далеко от

поверхности Ферми. Но в таком решении и нет нужды, т.к. при $q \sim P_F$ Γ' совпадает с введенной выше универсальной амплитудой Γ'' (которая связана с \mathcal{F} простыми соотношениями).

Уравнение для $V^{(1)}$ легко преобразовать, умножая обе части равенства на оператор $(1 - \mathcal{F}A')$. Найдем

$$V^{(1)} = e_q V^0 + \mathcal{F}[(A' + A''^{(1)})V^{(1)} + A''^{(1,2)}V^{(2)}].$$

Это уравнение легко было получить и сразу, выделяя из пропагатора A плавную часть.

Особенно просто это уравнение выглядит для спиновой части магнитных моментов, где, как говорилось выше, можно пренебречь A' :

$$V_\alpha^{(1)}[6] = e_q \zeta_\alpha + \mathcal{F}(A_o^{(1,1)}V_\alpha^{(1)} + A_o^{(1,2)}V_\alpha^{(2)}), \quad (84)$$

$$V_\alpha^{(2)}[6] = \Gamma''(A_o^{(2,1)}V_\alpha^{(1)} + A_o^{(2,2)}V_\alpha^{(2)}).$$

Если в \mathcal{F} оставить только нулевую гармонику g_0^ω (полагая $g_{np} = 0$), то $\Gamma'' \sim g_0^\omega$, где

$$g_0^\omega = \frac{g_0^\omega}{1 + g_0^\omega}.$$

Общая схема решения уравнения для $V[6]$ в этом приближении та же, что и без учета эффекта отражения квазичастич от границ системы. Но мы должны представить $R_{V_o}^2 = (R_{V_o}^2)^{(1)} + (R_{V_o}^2)^{(2)}$ - в виде суммы плавной $(R_{V_o}^2)^{(1)}$ и быстро осциллирующей $(R_{V_o}^2)^{(2)}$ частей, а решение искать в виде:

$$V_{\zeta}[\epsilon] = (R_{v_0}^2)^{(1)} [\tau_1^{(1)} \zeta_x + \tau_2^{(1)} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}) R_x] + \\ + (R_{v_0}^2)^{(2)} [\tau_1^{(2)} \zeta_x + \tau_2^{(2)} (\vec{\zeta} \cdot \vec{n}) R_x] \quad (85)$$

В соответствии с этим, общее решение для случая одного спин-орбитального дублета определится опять формулой вида (78), но теперь

$$\Lambda = \frac{\chi_{vv_0}^{(1)} + \chi_{vv_0}^{(2)}}{1 + \frac{3}{2} \chi_{vv_0}^{(1)} + \frac{3}{2} \chi_{vv_0}^{(2)}}, \quad (86)$$

где

$$\chi_{vv'}^{(1)} \sim g_o \omega \int (R_v^2)^{(1)} (R_{v'}^2)^{(1)} z^2 dz,$$

а

$$\chi_{vv'}^{(2)} \sim g_o^K \int (R_v^2)^{(2)} (R_{v'}^2)^{(2)} z^2 dz$$

Старое решение (78) получается отсюда при замене g_o^K на $g_o \omega$. Однако, как показал численный анализ, возникающая при этом ошибка, как правило, не велика (не превышает 0,3 яд.магнетона).

15. Краткий обзор основных задач, решенных в рамках теории конечных ферми-систем. Перспективы развития теории

В рамках теории конечных ферми-систем было рассмотрено большое число ядерных явлений: магнитные дипольные и октупольные моменты ядер, квадрупольные моменты ядер, изотопи-

ческое смещение и изомерный сдвиг атомных и мезоатомных линий. Вероятности μ -захвата электромагнитных и β -переходов. Были решены отдельные задачи о спектрах ядер и рассмотрены многие другие ядерные свойства. Для работ этого первого этапа было характерно стремление отобрать наиболее простые случаи: когда в ответ входит амплитуда рассеяния квазичастиц на угол ноль; когда не нужно учитывать сложных конфигураций квазичастиц и т.п. Кроме того, ставилась щель грубого описания эксперимента (точность порядка 20%). Взаимодействие (амплитуда F) между квазичастицами при этом параметризовалось наиболее простым образом: в разложении $F(z)$ по полиномам Лежандра оставлялись только нулевые гармоники. Однако уже при первом подходе выяснились такие особенности взаимодействия между квазичастицами в ядре, которые нельзя не учитывать даже при довольно грубом сравнении с экспериментом. Такой особенностью, в частности, является сильное притяжение квазичастиц на поверхности ядра, которое необходимо учитывать, например, в таких задачах, как вычисление квадрупольных моментов и изотопического смещения, путем введения зависимости констант f и g от γ вблизи края ядра.

Следует отметить, что в ряде явлений, например, при вычислении изотопических и изомерных сдвигов, вероятностей μ -захвата и др. взаимодействие между нуклонами в ядре учитывалось впервые.

Сейчас мы научились рассматривать случаи, когда в ответ входит амплитуда рассеяния квазичастиц на произвольные углы. Это значительно расширило рамки применимости теории. Сейчас мы, в частности, занимаемся рассмотрением спектров окономагических ядер с учетом более сложного взаимодействия

(тензорных членов и др.). Мы надеемся, что нам удастся найти новые константы, введенные в теорию, и с их помощью рассчитать заново магнитные моменты ядер, вероятности β^- -распада, μ -захвата и др.

Кроме того, в теории не разработан ряд принципиальных вопросов: не выяснена картина возникновения деформаций, не построена полная схема рассмотрения свойств сферических ядер с низколежащим 2^+ -уровнем, практически, не решались задачи, включающие рассмотрение реакций.

Все эти проблемы ждут энтузиастов.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Квадрупольные моменты и вероятности (ВЕ2) возбуждения низколежащих 2^+ состояний в четных ядрах

(Это приложение представляет собой изложение работы А.М.Дюгаева и М.И.Троицкого).

В лекциях говорилось о возможности улучшения квазичастиц, т.е. уточнения вида одиночечной функции Грина в том случае, когда в системе имеются низколежащие колективные состояния. Примером таких низколежащих состояний являются регулярно встречающиеся в четно-четных сферических ядрах колебательные 2^+ состояния. Они сильно портят вид одиночечной функции Грина G , и нахождение точного вида G в этом случае - очень сложная задача. Это видно, в частности, на примере модели Беляева-Зелевинского. Однако, как показали Дюгаев и Троицкий, соотношения между такими характеристиками, как квадрупольные моменты основного 0^+ -состояния, первого 2^+ - и второго 2^+ -состояний, вероятности Е2-переходов $BE2(2^+ \rightarrow 0^+)$, $BE2(2^+ \rightarrow 0^+)$, $BE2(2^+ \rightarrow 2^+)$ и энергии ω_1 и ω_2 2^+_1 и 2^+_2 -уровней можно получить, не вычисляя точного вида G .

I. Спектр возбуждения четных ядер определяется полюсами амплитуды рассеяния $\Gamma(\omega)$. Статические моменты возбужденных состояний можно определить, рассчитав сдвиг полюса в $\Gamma(\omega)$ при наложении на систему сколь угодно слабого поля центральной симметрии.

Вблизи полюса (ω_s) $\Gamma(\omega)$ можно представить в виде:

$$\omega \rightarrow \boxed{\Gamma} = \boxed{\Gamma^R} + \text{диаграмма}$$
 (П.1)

где Γ^R - блок, не содержащий полюса при частоте $\omega = \omega_s$.

(П.1) можно записать так:

$$\Gamma(\omega) = \Gamma^R(\omega) + g_s D_s(\omega) g_s^* \quad (\text{П.2})$$

Здесь g_s - блок перехода частицы-дырки в возбужденное состояние, $D_s(\omega)$ - полюсная часть функции Грина возбужденного состояния:

$$D_s(\omega) = \frac{2\omega_s}{\omega^2 - \omega_s^2}$$

Сдвиг полюса в $\Gamma(\omega)$ соответствует сдвигу полюса в $D_s(\omega)$. Напишем уравнение для функции Грина возбуждения во внешнем поле:

$$\widetilde{D}_s = D + DQ\widetilde{D}; \quad \sim\sim = \sim\sim + \sim\bullet\sim\sim \quad (\text{П.3})$$

Нетрудно убедиться, что сдвиг полюса определяется:

$$Q_{ss} = \bullet\sim\sim = \sum_{\lambda\lambda'} V_{\lambda\lambda'}^0 (a_\lambda^+ a_{\lambda'})_{ss} \quad (\text{П.4})$$

Пунктир означает внешнее поле V^0 . Формула (П.4) написана по теории возмущения по внешнему полю, что соответствует тонким волнистым линиям в (П.4). Следовательно, график (П.4) определяет статические моменты Q возмущенного S -состояния системы.

Амплитуда перехода из основного состояния в возбужденное состояние можно изобразить следующим образом

$$A_{os} = \sim\sim_s = \sum_{\lambda\lambda'} V_{\lambda\lambda'}^0 (a_\lambda^+ a_{\lambda'})_{os} \quad (\text{П.5})$$

Блок, соответствующий графику (П.5), можно раскрыть следующим образом:

$$A_{os} = \text{---} \circlearrowleft = V^o(\omega_s) GG g_s , \quad (\text{П.6})$$

где G - точные одночастичные функции Грина.

Формула (П.6) может быть получена и более формальным путем. Для этого следует написать разложение Лемана для двухчастичной Грина, по каналу частица-дырка:

$$K(\omega) = \sum_s (a_\lambda^+ a_{\lambda'}^-)_{os} (a_{\lambda}, a_{\lambda_2}^+)_{so}$$

С другой стороны, для двухчастичной функции Грина при одинаковых временах частицы и дырки можно написать связь с Γ

$$K(\omega) = \int GGG \Gamma GGG \frac{d\varepsilon'}{2\pi i} \frac{d\varepsilon}{2\pi i}$$

Используя выражение (П.1) для Γ вблизи полюса ω_s , сразу получим формулу (П.6).

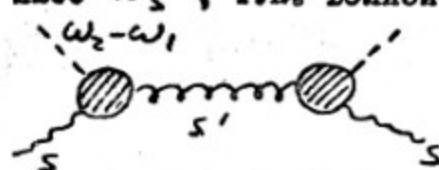
Аналогично, амплитуда перехода из состояния S в состояние S' выразится графиком

$$A_{ss'} = \text{---} \circlearrowleft_{s'} = \sum_s V_{\lambda\lambda'}^o (a_\lambda^+ a_{\lambda'}^-)_{ss'} . \quad (\text{П.7})$$

Для этого следует рассмотреть амплитуду, характеризующуюся двумя волнистыми линиями и двумя пунктирными, а именно:



Амплитуда перехода из состояния s в состояние s' выражается вычетом в полюсе ω_s' , т.к. вблизи полюса



легко видеть правильность (П.7).

Блоки (П.4, П.7) распишем следующим образом:

$$A_{ss'} = \text{Diagram of a shaded dome-shaped region between two wavy lines labeled } s \text{ and } s' = V G^6 \bar{T} g_s g_{s'}$$

Блок \bar{T} не содержит ни в каком разрезе двух линий (т.е. функций Грина частицы и дырки), а также волнистых линий.

Блок V - эффективное поле, действующее на частицы.

В случае, если в системе нет низколежащих коллективных уровней, которые сильно бы портили одночастичные функции Грина, можно введенные величины (A , Q) непосредственно расчитывать через константы теории конечных ферми-систем, как это и делалось ранее. В противном случае возникает сложная задача о нахождении точных одночастичных функций Грина. Тем не менее, можно, не решая этой задачи, попытаться найти соотношения между наблюдаемыми физическими величинами.

2. Для определенности рассмотрим следующую ситуацию, которая встречается в реальных ядрах. Среди всех возбужденных состояний системы вблизи основного состояния есть два уровня одной симметрии с частотой ω_1 и ω_2 . Следующий уровень этой симметрии расположен на частоте ω_3 . При этом :

$$\begin{aligned} (\omega_2 - \omega_1)^2 / \omega_3^2 &\ll 1, \\ (\omega_2 - \omega_1)^2 / \Delta^2 &\ll 1, \\ \omega_1^2 / \Delta^2 &\ll 1, \end{aligned} \quad (П.8)$$

где Δ — величина энергетической щели характеризует энергию одночастичных переходов. При выполнении этих условий можно выделить в рассматриваемых величинах блоки, сильно зависящие от ω при малых ω ($\omega=0$, $\omega=\omega_1$, $\omega=\omega_2$, $\omega=\omega_2-\omega_1$), и плавные блоки, которые можно считать постоянными при малых ω . Это позволит определить соотношения между величинами A и Q , если симметрия внешних полей и возбужденных состояний совпадают.

Для этого распишем g_1 и g_2 — блоки перехода в возбужденные состояния, выделяя полюса и учитывая при этом, что блок не содержит в вертикальном разрезе состояния S по определению П(2):

Для этого введем блок g_s^0 — амплитуду перехода частицы и дырки, не содержащую в вертикальном разрезе двух функций Грина (GG)

$$g_s^0 = \text{Diagram showing a loop with two vertical lines and a central cross, plus a dot, followed by an equals sign and another diagram showing a loop with two vertical lines and a central dot.}$$

Тогда для g_s можно написать:

$$g_s = g_s^0 + \tilde{\Gamma} GG g_s^0 = \text{Diagram showing a loop with two vertical lines and a central dot, plus a dot, followed by an equals sign and another diagram showing a loop with two vertical lines and a central dot, with a bracket labeled } \tilde{\Gamma} \text{ above it.}$$

где $\tilde{\Gamma}(\omega_s)$ — амплитуда, не содержащая полюса при $\omega=\omega_s$. Выделим в этой амплитуде полюс при $\omega=\omega_s'$ и введем блок

ки Γ^R , g^R , не содержащие полюсов $\omega = \omega_s$ и $\omega = \omega_{s'}$. Следовательно, $g_s(\omega)$ записывается:

$$g_s(\omega) = g_R + g_R D_{s'}(\omega_s)(g_R G G g_0)$$

$$g_s(\omega) = g_R + g_R D_{s'}(\omega_s)(g_R G G g_0) \quad (\text{II.9})$$

Будем считать $g_R(\omega_s) = g_R(\omega_{s'})$. В случае, если для третьего уровня той же симметрии $\omega_3 \gg \omega_2$, точность этого $\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3}\right)^2 \ll 1$. Более подробно об этом будет ниже.

Аналогично можно поступить и с эффективным полем, выделяя оба полюса:

$$V(\omega) = V^R + \sum_{s=1,2} g_s(\omega_s) \mathcal{D}_s(\omega) / (g_s(\omega_s) G G V_0) \quad (\text{II.10})$$

Очевидно, что $V^R = \beta g^R$, $V_0 = \beta g_0$ (β - размерный множитель).

Удобно ввести:

$$K_s(\omega) = 1 + \phi(\omega) D_{s'}(\omega),$$

$$\phi(\omega) = \text{Diagram} = (Q_0 G G g^R)$$

Тогда из (II.9), (II.10) следует

$$g_s(\omega) = g^R K_s(\omega)$$

$$V(\omega) = \beta g^R \left(1 + \sum_{s=1,2} K_s^2(\omega_s) \mathcal{D}_s(\omega) \right) =$$

$$\equiv C g^R \mathcal{D}(\omega) \quad (\text{II.11})$$

Используя (П.7), (П.8), получим:

$$A_{os} = \phi(\omega_s) K_s(\omega_s) \quad (\text{П.12})$$

$$A_{ss'} = \beta \mathcal{V}(\omega_s, -\omega_s) K_s(\omega_s) K_{s'}(\omega_{s'}) T(\omega_s; \omega_{s'})$$

$$Q_{ss} = \beta \mathcal{V}(0) K_s^2(\omega_s) T(\omega_s; \omega_s),$$

где

$$T = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} g_R(\omega_{s'} - \omega_s) \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} = (g^R)^3 G^6 \overline{T}$$

3. Блоки $\phi(\omega)$ и $T(\omega)$ в (П.12) слабо зависят от ω , так как не имеют полюсов при ω_1 и ω_2 , и их можно считать постоянными при выполнении ограничений (П.8):

$$\begin{aligned} \phi(\omega_1) &= \phi(\omega_2) \equiv \phi \\ T(\omega_1; \omega_2) &= T(\omega_1; \omega_1) = T(\omega_2; \omega_2) \equiv T \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Из (П.12) и (П.13) легко получить соотношение:

$$\frac{A_{o1}^2}{A_{o2}^2} = \frac{Q_{11}}{Q_{22}} \quad (\text{П.14})$$

Для получения других соотношений выразим ϕ через ω_1 и ω_2 и некоторую константу, постоянную для всех ядер. С этой целью напишем уравнение Дайсона:

$$\text{Diagram} = \text{Diagram} + \text{Diagram}$$

$$Q\mathcal{D}Q = Q\mathcal{D}_0Q + Q\mathcal{D}_0(QGGQ_0)\mathcal{D}Q \quad (\text{II.15})$$

В (II.15) пунктир означает далекую часть функции Грина возбуждения, связанную с далекими от поверхности Ферми переходами.

Q по определению не содержит в вертикальном разрезе пунктирной линии.

Вблизи полюса ($\omega \rightarrow \omega_i$):

$$Q\mathcal{D}Q \rightarrow \frac{g^2 2\omega_i}{\omega^2 - \omega_i^2} \quad (\text{II.16})$$

Используя (II.15), получим:

$$Q\mathcal{D}Q = \frac{Q(\omega)Q(\omega)}{\mathcal{D}_0^{-1} - (QGGQ_0)\omega} \quad (\text{II.17})$$

Для Q можно написать выражение, аналогичное (II.9):

$$Q(\omega) = Q^R(1 + (Q^RGGQ_0))\mathcal{D}_z(\omega) \equiv Q^R K_1^R(\omega) \quad (\text{II.18})$$

Q^R отличается от g^R далекими частями. Можно положить:

$$Q^R = \gamma g^R, \quad (\text{II.19})$$

где γ - величина, связанная с далекими переходами и поэтому слабо меняющаяся от ядра к ядру.

Из (II.17, II.18, II.19), используя условия полюса, получаем:

$$\frac{(K_1^{\gamma}(\omega_1))^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{\phi^2 \cdot 2\omega_2} = K_1^2(\omega_1) 2\omega_1, \quad (\text{П.20})$$

где

$$K_1^{\gamma}(\omega_1) = \gamma(1 + \gamma \Phi D_2(\omega_1)) \quad (\text{П.20'})$$

Напомним, что $K_1 = K_1^{\gamma}$ при $\gamma = 1$.

Уравнение (П.20) позволяет определить Φ через ω_1, ω_2 и γ . Следовательно, определив γ из опыта в одном ядре, можно выразить A_{01} и A_{02} и отношения A_{12}/Q_{11} или Q_{11}/Q_{22} через частоты ω_1 и ω_2 . Это будет сделано ниже в конкретном случае низколежащих 2^+ уровней в четно-четных ядрах.

Свойства низколежащих 2^+ уровней в четно-четных ядрах

I. Большое число четно-четных ядер имеют низколежащие 2^+ уровни и ограничения (П.8) выполняются: $\frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\Delta^2} \ll 1$; $\frac{\omega_1^2}{4\Delta^2} \ll 1$ (Δ - энергия спаривания).

При этом будем считать, что третий уровень симметрии 2^+ расположен высоко: $\omega_3 \gg \omega_2$. Случай, когда частота ω_3 близка к ω_2 , будет рассмотрен ниже. При этом частота второго уровня близка к $2\omega_1$, ($\omega_2 = (2+\eta)\omega_1$) $|\eta| \leq 0,5$

Выпишем наблюдаемые величины, используя (П.12) и отдав угловые части. При этом рассматриваются внешние поля симметрии 2^+ ($L = 2$)

$$B_{01} = \beta^2 \phi^2 K_1^2,$$

$$B_{02} = \beta^2 \phi^2 K_2^2, \\ B_{12} = \frac{1}{2L+1} \beta^2 \mathcal{V}^2 K_1^2 K_2^2 T_s^2 \\ Q_s^{(LM)} = \beta \mathcal{V} K_s^2 T_s \langle LM \rangle, \quad (\text{II.21})$$

где

$$\langle LM \rangle = (-1)^{L-M} \begin{pmatrix} L & L & L \\ -M & 0 & M \end{pmatrix}$$

β - размерный множитель, введенный в (II.21) (имеет размерность $e \cdot \frac{\text{барн}}{\text{Мэв}}$), одинаковый для всех ядер.

Между этими величинами и частотами ω_1, ω_2 существуют соотношения.

Как выяснилось из сравнения с опытом, γ , введенное в (II.20), близко к единице. Поэтому с целью упрощения изложения приведем соотношения, взяв $\gamma = 1$. Из (II.20) находим:

$$\Phi = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\sqrt{\omega_1 \omega_2}} = \omega_1 \frac{1 - \alpha^2}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (\text{II.22})$$

где

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 + \eta.$$

Тогда $K_1 = 1 + \sqrt{\alpha}; \quad K_2 = \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{\sqrt{\alpha}}.$

Это позволяет рассчитать B_{01} и B_{02} через ω_1, α .

$$B_{01} = \beta^2 \omega_1^2 \left(\frac{1 - \alpha^2}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 (1 + \sqrt{\alpha})^2,$$

$$B_{02} = \beta^2 \omega_1^2 \frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2} \frac{1}{(1-\sqrt{\alpha})^2}, \quad (\text{II.23})$$

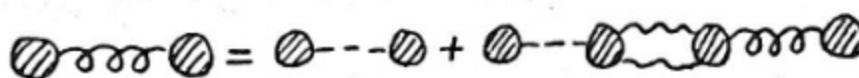
а также получить соотношения:

$$Q_{11}^2 = \langle LM \rangle^2 (2L+1) \frac{B_{01}B_{12}}{B_{02}} \frac{\mathcal{D}^2(\omega)}{\mathcal{D}^2(\omega_2 - \omega_1)} \quad (\text{II.24})$$

При этом $\mathcal{D}(\omega) = 1 + \phi \sum_{i,2} K_S \frac{2\omega_S}{\omega^2 - \omega_S^2}$

Для того, чтобы связать $A_{ss'}$ и Q_{ss} с последовательностью первых 2^+ уровней (т.е. с частотами ω_1 и ω_2), нужно вычислить блок T через ω_1 и ω_2 и подставить в (II.12).

4. Для этого в уравнении Дайсона (II.15) выделим полюс, близкий к ω_2 ($\omega_2 \sim 2\omega_1$ в случае 2^+ уровней), а именно полюс, соответствующий рождению невзаимодействующих двух первых уровней с частотой ω_1 , все остальные графики будут в \mathcal{D}_0 :



$$\text{Diagram: } \textcircled{S} \text{---} \textcircled{S} = \textcircled{S} \text{---} \textcircled{S} + \textcircled{S} \text{---} \textcircled{Wavy Line} \text{---} \textcircled{S} \text{---} \textcircled{S} \quad (\text{II.25})$$

$$Q \mathcal{D} Q = \frac{QQ}{\mathcal{D}_0^{-1} - (T \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 T) \omega'}$$

где

$$\mathcal{D}_1(\omega) = \frac{2\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (\text{II.25}')$$

Используя условия полюса при $\omega \rightarrow \omega_2$:

$$QDQ = \frac{QQ}{(T\mathcal{D}, \mathcal{D}, T)_{\omega_2} - (T\mathcal{D}, \mathcal{D}, T)_{\omega}} \quad (\text{II.26})$$

При $\omega \rightarrow \omega_2$:

$$QDQ \rightarrow \frac{\omega_1^2 2\omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

Из (II.20, II.26) получим при ($\gamma = 1$)

$$T = \frac{\omega}{2} \mathcal{D}_1(\omega_2 - \omega_1) K_2(\omega_2) K_1(\omega_2 - \omega_1) K_1(\omega_1). \quad (\text{II.27})$$

Следовательно, подставив T в (II.21), мы получим выражения для A_{12} , Q_{11} и Q_{22} через ω_1 и ω_2 . Отметим, что полученная таким образом связь A_{12} , Q_{11} , Q_{22} с ω_1 и ω_2 будет справедлива только, если $\omega_2 \approx 2\omega_1$ ($\eta \ll 1$)

Выпишем эти соотношения:

$$Q_{ss} = \beta \langle LM \rangle \frac{2V(0)}{\omega} \frac{K_s(\omega_s)}{K_{s'}(\omega_s') \mathcal{D}_1(\omega_2 - \omega_1) K_1(\omega_2 - \omega_1)}$$

где V , \mathcal{D} и K определены выше.

Литература.

1. А.В.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства ядер. "Наука", 1965.
2. А.Б.Мигдал. Метод квазичастиц в теории ядра. "Наука", 1967.
3. З.Е.Саперштейн, В.А.Ходель. ЯФ, 4, 701 (1966).
4. В.И.Осадчиев, М.А.Троицкий. ЯФ, 6, 961 (1967).
5. A.B.Migdal, A.A.Lushnikov, D.F.Zaretsky.
Nucl. Phys. • 66, 198 (1965).
6. М.А.Троицкий, В.А.Ходель. ЯФ, I, 205 (1965).

Содержание

стр.

I. Введение	2
2. Графики Фейнмана	4
3. Квазичастицы	9
4. Функция Грина квантовомеханической системы	10
5. Одночастичная функция Грина	12
5а. Одночастичная функция Грина в случае спаривания....	19
6. Вычисление средних	23
7. Функция Грина во внешнем поле	25
8. Уравнение для амплитуды рассеяния в бесконечной ферми-жидкости при малых передаваемых импульсах ...	27
9. Перенормировка уравнений для вершинной части. Эффективное поле, действующее на квазичастицы.....	35
10. Уравнение для амплитуды рассеяния в канале частица-частица	36
II. Вклад дальнодействия в матричные элементы ампли- туды взаимодействия квазичастиц	39
12. Анализ дальнодействующих частей амплитуды	48
13. Перенормировка двухканальной системы уравнений для Г	55
14. Магнитные моменты ядер	64
14а. Магнитные моменты ядер. Учет отражений квазичас- тиц от границ системы	72
15. Основные задачи. Перспективы развития	76
Приложение I. Квадрупольные моменты и вероятности возбуждения низколежащих 2^+ состоя- ний в четных ядрах	79
Литература	91
Л-61342. Подписано к печати 25/III-1971 г. Зак.441. Тир. 200.	