

539.1
B.85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике.
1^я сессия ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ
ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЭНЕРГИЯХ
(конспекты лекций)

И. М. НАРОДЕЦКИЙ

УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ ПРОЦЕССЫ
В СИСТЕМЕ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

(кластерная структура интегральных уравнений
для системы многих нуклонов)

МОСКВА — 1971

1 сессия

539,

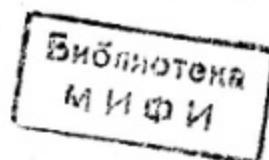
B.85

Народецкий И. М.
Упругие и неупругие процессы....
В В Е Д Е Н И Е

В настоящее время накоплен большой вычислительный опыт по расчетам свойств трехнуклонных систем /1/. В ближайшем будущем следует ожидать появления расчетов для ядерных систем, более сложных, чем тритон. Такие системы интересны тем, что в них существует большое число возбужденных состояний, лежащих как правило в непрерывном спектре, природа которых не вполне ясна. Подробные сведения об уровнях в легких ядрах можно найти в обзорах /2-5/. Наиболее поразительной чертой в схеме расположения уровней является тот факт, что уровни группируются вблизи соответствующих порогов. Другими словами, каждый порог распада ядра генерирует вблизи состояние, которое может быть как возбужденным (уровни в α -частице, состояния $3/2^+$ в He^5 и Li^5 и др.), так и основным (уровни $3/2^-$ в He^5 и ..., уровень 0^+ в Be^8 и др.). Некоторые из пороговых уровней представлены в таблице I.

Расчет такого рода уровней обычно производится с помощью метода резонирующих групп частиц /6/, теоретическая основа которого не выяснена. В последнее время был предложен другой метод расчета около пороговых состояний, основанный на полосном приближении в интегральных уравнениях для систем многих нуклонов /7/. Поясним кратко сущность

562 468



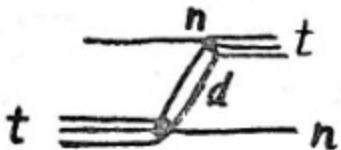
этого метода I).

Интегральные уравнения записываются для амплитуд рассеяния систем A частиц, причем ядра этих уравнений выражаются для амплитуды рассеяния для подсистем с меньшим числом частиц. Полюса в ядрах уравнений связаны с порогами раз渲ала системы на несколько подсистем. Рассмотрим состояние системы A частиц, энергия которых близка к соответствующему порогу. В такой ситуации имеет смысл оставить из всех ядер только ту амплитуду, которая имеет полюс, совпадающий с данным порогом, а саму амплитуду аппроксимировать соответствующим полюсным членом. При этом приближение должно быть самосогласованным. Это означает, что если в результате решения уравнений в полюсном приближении получается связное или резонансное состояние, находящееся на расстоянии ΔE от порога, то необходимым условием самосогласованности будет $|\Delta E| \ll |\Delta E'|$, где $\Delta E'$ -расстояние до следующего порога. Особенно чистая ситуация возникает, по-видимому, в случае $3/2^-$ уровня в ядрах He^5 и Li^5 , лежащих на расстоянии $\sim 1-2 mev$ от порога раз渲ала на $\alpha + N$, в то время как следующий порог лежит на расстоянии $\sim 16.5 mev$, и для 0^+ уровня Be^8 , который находится

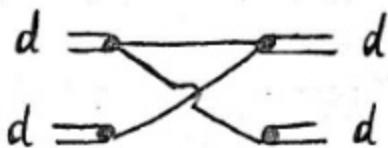
-
- I) Отметим, что впервые на возможность существования у ядер пороговых состояний было указано Базем в 1959 году /8/. Его рассмотрение основывалось на формальной теории ядерных реакций. Мы отсылаем читателя к последним работам //9,10/, где систематизирован экспериментальный материал в области атомных номеров $A = 16-32$.

на расстоянии 0.895 mev от порога $\alpha + \alpha$ и на расстоянии $\sim 17 \text{ mev}$ от следующего порога $p + Li^7$. В полюсном приближении взаимодействие двух кластеров при малых энергиях определяется эффективным потенциалом, который зависит от волновых функций отдельных кластеров и не требует введения дополнительных подгоночных параметров.

Интересная интерпретация возбужденных состояний возникает, если рассмотреть фейнмановские графики для взаимодействия двух кластеров при малых энергиях. Рассмотрим, например, α -частицу. Если учесть только порог $\alpha \rightarrow t + p$, то в полюсном приближении взаимодействие нуклона с тритоном описывается графиками



Другие графики, возникающие при учете разреза в амплитуде nd -рассеяния предполагаются малыми. Если учесть только порог $\alpha \rightarrow d + d$, то взаимодействие описывается графиками



Для возбужденного состояния 0^+ в α -частице основной вклад, по-видимому, вносят графики первого типа, для других возбужденных состояний в He^4 следует ожидать заметный вклад взаимодействия, отвечающего графикам второго типа. В первом случае приведенная ширина в канал nt будет подавляющей (порядка Вигнеровского предела), во втором случае она

сравнима с парциальной шириной распада в канал dd . Наглядно можно представить взаимодействие между нуклоном и тритоном таким образом, что один нуклон каждый раз вылетает из тритона, а его место занимает другой нуклон. При этом основным моментом является тождественность частиц, т.е. тот факт, что любые три нуклона могут образовывать связанное состояние (мы отвлекаемся здесь от спиновых и изотопспиновых эффектов). Можно сказать, что возникает своеобразное обменное взаимодействие между кластерами. Ясно, что величина этого взаимодействия определяется числом топологически эквивалентных диаграмм (т.е. диаграмм, полученных перестановкой частиц), которое зависит от полного числа частиц и от вершинных функций распада. Последние определяются в основном радиусами кластеров.

С теоретической точки зрения проблема описания околовпороговых состояний состоит в написании уравнений для системы A нуклонов, в которых выделение кластерной структуры может быть произведено наиболее естественным образом. В настоящее время хорошо известны интегральные уравнения для системы трех нуклонов /II, I2/. Существует несколько схем обобщения уравнений Фаддеева на случай произвольного числа частиц. Один из вариантов был предложен Якубовским /I3/, который доказал эквивалентность полученных уравнений уравнению Шредингера. Хотя выделение кластерной структуры в уравнениях Якубовского и возможно, практически такое выделение сопряжено с большими трудностями, связанными с детальной классификацией ядер. Даже в простейшем случае 4-х частиц полносное приближение оказывается здесь нетривиаль-

ным²⁾. Другая схема была предложена Вейнбергом^{/I4/} и использовалась в работах^{/I5/,/I6/}. Общей особенностью уравнений такого типа является то, что ядра этих уравнений содержат амплитуды, соответствующие связным графикам трехмерной нерелятивистской теории возмущений. Эквивалентность этих уравнений уравнению Шредингера не была доказана, более того, Федербушем^{/I7/} был приведен пример существования нефизического решения для уравнений Вейнберга.

Уравнения^{/I4/,/I5/,/I6/} по разным причинам оказываются неудобными для выделения кластерной структуры. Поэтому мы рассмотрим вариант Δ -частичных уравнений, предложенный в работе^{/7/}, в которых легко может быть произведено выделение кластерной структуры. Эти уравнения отличаются от уравнений Омнеса и Розенберга способом классификации амплитуд, а по структуре близки к этим уравнениям. Из вывода ясно, что все решения уравнения Шредингера являются решениями используемых уравнений. Мы не обсуждаем вопроса о возможности существования нефизических решений этих уравнений. Можно, однако, ожидать, что такого рода "лишние" решения, если они существуют, не проявятся в конкретных физических расчетах.

2) В уравнениях Якубовского ядра содержат несвязные амплитуды, включающие парные Т-матрицы. В полюсном приближении в этих уравнениях следует оставить парные Т-матрицы, а связные части ядер аппроксимировать полюсными членами. Итерируя получающиеся при этом уравнения и используя уравнения Фаддеева, можно исключить парные Т-матрицы. Такое преобразование приводит к уравнениям

I. Интегральные уравнения для системы A нуклонов.

При выводе интегральных уравнений для амплитуд рассеяния мы исходим из уравнения для функции Грина $G(z)$:

$$G(z) = (z - H)^{-1} \quad (1)$$

где $H = H_0 + V$.

H_0 — оператор кинетической энергии, $V = \sum_{i < j}^A V_{ij}$ — потенциал взаимодействия.

Уравнение для $G(z)$ имеет вид

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG(z) = G_0(z) + G(z)VG_0(z) \quad (2)$$

где

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$$

Оператор рассеяния $T(z)$ связан с $G(z)$ соотношениями

$$T(z) = V + VG(z)V, \quad G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z) \quad (3)$$

и удовлетворяет уравнению

$$T(z) = V + VG_0(z)T(z) \quad (4)$$

Из (2) и (3) следует формула

$$T(z)G_0(z) = VG(z) \quad (5)$$

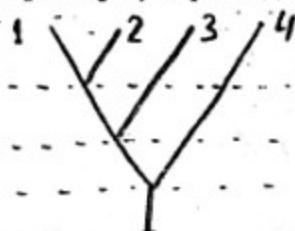
которую мы используем ниже.

Для классификации амплитуд нам понадобятся понятия

разбиения и цепочки разбиений. Разбиением назовем некоторый способ разделения системы A частиц на K групп.

Различные разбиения на K групп будем обозначать через a_k, b_k . Записать разбиение удобно, помещая в скобки номера частиц, входящих в одну группу, например,

$a_3 = (135)(24)(6)$ - одно из возможных разбиений 6 частиц на 3 группы. Запись $b_k < a_k$ или $a_k > b_i$ ($i > k$) означает, что разбиение b_i получается из a_k делением его групп на части. Последовательность разбиений $\alpha_i = (a_{A-1}, a_{A-2}, \dots, a_{i+1}, a_i)$ где $a_i > a_{i+1} > \dots > a_{A-1}$ назовем цепочкой разбиений. Цепочку $\alpha_2 (a_{A-1}, \dots, a_2)$ назовем полной. Полную цепочку разбиений можно изобразить деревом, в котором на каждом уровне соединяются только две ветви. Такое дерево будем называть упорядоченным. Соответствие между цепочкой разбиений и деревом легко видеть из примера, приведенного на рис. I для задачи 5 частиц.



$$a_4 = (12)(3)(4)(5)$$

$$a_3 = (12)(3)(45)$$

$$a_2 = (123)(45)$$

Рис. I

Связь дерева с нерелятивистскими трехмерными графиками теории возмущений (см. /14/) видна из рис. 2, на котором приведена одна из диаграмм, соответствующая дереву рис. I.

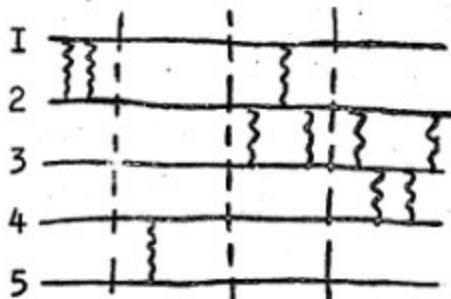


Рис. 2.

Каждому разбиению a_i можно сопоставить задачу A частиц, где предполагается, что отличные от нуля только потенциалы взаимодействия между частицами внутри групп. Суммарный потенциал такой системы обозначим через V_{a_i} .

Например, для разбиения $a_3 = (135)(24)(6)$

$V_{a_3} = V_{13} + V_{15} + V_{35} + V_{24}$ Операторы G и T для такой задачи будем обозначать через G_{a_i} и T_{a_i} , причем

$$G_{a_1} = G; T_{a_1} = T, G_{a_A} = G_0; T_{a_A} = 0$$

Отметим, что $V_{a_{A-1}} = V_{ij}$, где ij -пара частиц, входящих в одну группу разбиения a_{A-1} .

Для G наряду с (12) имеет место уравнение

$$G = G_{a_k} + G_{a_k} (V - V_{a_k}) G \quad (6)$$

Перейдем к выводу интегральных уравнений. Введем амплитуды /18, 19/

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{a_i}^{a_{i+1}} &\equiv \tilde{T}_{a_i}^{a_{A-1}, \dots, a_{i+1}} = V_{a_{A-1}} G_{a_{A-1}} (V_{a_{A-2}} - V_{a_{A-1}}) \dots \\ &\dots G_{a_{i+1}} (V_{a_i} - V_{a_{i+1}}) G_{a_i} (z - H_0) \end{aligned}$$

При $i=1$ будем обозначать $T_{a_1}^{\alpha_2}$ через \tilde{T}^{α_2} .

В случае задачи четырех частиц мы используем обозначения $\tilde{T}^{ij, ik, kl}$ и $\tilde{T}^{ij, ik, kl}$ вместо $\tilde{T}^{(ij)(ik)(kl)}$ и \tilde{T}^{ijkl} .

Докажем формулу кластерного разложения

$$T = \sum_{i=1}^A \sum_{a_{i+1}} \tilde{T}_{a_i}^{a_{i+1}} \left(\tilde{T}_{a_{A-1}}^{\alpha_A} \equiv T_{a_{A-1}} \right) \quad (8)$$

Отметим, что каждый график теории возмущений содержится в одной амплитуде в сумме (8); тем самым с точки зрения суммирования диаграмм формула (8) является очевидной.

Дадим алгебраический вывод этой формулы. Рассуждение проведем на примере 4-х частиц. Аналогичные рассуждения справедливы для любого числа частиц.

Рассмотрим произведение

$$T G_0 = V G = \sum_{i < j}^A V_{ij} G = \sum_{i < j}^A T^{ij} G_0 \quad (9)$$

где

$$T_{ij} = V_{ij} + V_{ij} G_0 T \quad (10)$$

для $T^{ij} G_0$ имеем:

$$\begin{aligned} T^{ij} G_0 = V_{ij} G &= V_{ij} G_{ij} + V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{il} + \\ &+ V_{jk} + V_{je} + V_{ek}) G \end{aligned} \quad (II)$$

Выделим в правой части (II) слагаемые типа ($V_{a_{n-2}} - V_{a_{n-1}}$).

Эти слагаемые дополняют потенциал задачи двух частиц

$V_{ij} = V_{a_{n-1}}$ до потенциалов $V_{a_{n-2}}$ более сложных задач трех частиц и двух пар частиц. Имеем

$$\begin{aligned} T_{ij} G_0 &= V_{ij} G_{ij} + V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{jk}) G + \\ &+ V_{ij} G_{ij} (V_{il} + V_{je}) G + V_{ij} G_{ij} V_{kl} G \end{aligned} \quad (12)$$

Для $A = 4$ число различных слагаемых вида $V_{0A-2} - V_{0A-1}$ равно трем, для произвольного A числа таких слагаемых равно $A-2 + C_{A-2}^2$. Для функции Грина G , стоящей после множителя $(V_{0A-2} - V_{0A-1})$ используем уравнение (6) с ядром $G_{0A-2}(V - V_{0A-2})$:

$$\begin{aligned} T_{ij} G_0 &= \left(V_{ij} G_{ij} + V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{jk}) G_{ijk} \right) G_{ijk} + \\ &+ V_{ij} G_{ij} (V_{il} + V_{je}) G_{ijl} + V_{ij} G_{ij} V_{kl} G_{ijkl} + \\ &+ V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{jk}) G_{ijk} (V_{ie} + V_{je} + V_{ke}) G + \\ &+ V_{ij} G_{ij} (V_{il} + V_{je}) G_{ijl} (V_{ik} + V_{jk} + V_{ek}) G + \\ &+ V_{ij} G_{ij} V_{kl} G_{ijkl} (V_{ik} + V_{ie} + V_{jk} + V_{je}) G \end{aligned} \quad (I3)$$

о.

Для четырех частиц на этом доказательство (8) заканчивается. Действительно, объединяя суммы (9) и (I3) и домножая справа на $(Z - H_0)^{-1}$ получим

$$T = \sum_{i < j}^A T^{ij} \quad (I4)$$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= T_{ij} + \tilde{T}_{ijk}^{ij} + \tilde{T}_{ijl}^{ij} + \tilde{T}_{ijkl}^{ij} + \tilde{T}_{ijkl}^{ij,ijk} + \\ &+ \tilde{T}_{ijkl}^{ij,ijl} + \tilde{T}_{ijkl}^{ij,kil} \end{aligned} \quad (I5)$$

где в соответствии с общим определением (7)

$$\tilde{T}_{ijk}^{ij} = V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{jk}) G_{ijk} / (Z - H_0) \quad (I6)$$

$$\tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} = V_{ij} G_{ij} V_{k\ell} G_{ij,k\ell} (z-H_0) \quad (I7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{ij,ij\ell} &= V_{ij} G_{ij} (V_{ik} + V_{jk}) G_{ij\ell} (V_{i\ell} + V_{j\ell} + V_{k\ell}), \\ &\times G(z-H_0) \end{aligned} \quad (I8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{ij,k\ell} &= V_{ij} G_{ij} V_{k\ell} G_{ij,k\ell} (V_{ik} + V_{i\ell} + V_{jk} + \\ &+ V_{j\ell}) G(z-H_0) \end{aligned} \quad (I9)$$

Сумма (I4) с учетом (I5) совпадает с формулой (8) для задачи 4-х частиц.

Для числа частиц $A > 4$ вывод на этом этапе не заканчивается, т.к. ($V - V_{a_{A-2}}$) не совпадает с ($V_{a_{A-3}} - V_{a_{A-2}}$). Следующим этапом должно быть разбиение ($V - V_{a_{A-2}}$) на сумму слагаемых ($V_{a_{A-3}} - V_{a_{A-2}}$) и использование для функции Грина уравнения (6) с ядром . Вывод заканчивается на том этапе, когда ($V_{a_{K-1}} - V_{a_K}$) совпадает с ($V - V_{a_K}$).

Нашей задачей является формулировка уравнений для амплитуд $\tilde{T}^{a_i a_j}$ задачи A частиц. Амплитуды $\tilde{T}_{a_i}^{a_i+1}$ при $i \neq 1$ находятся из решения задач меньшего числа частиц и предполагаются известными.

Сформулируем уравнения для $A = 4$. Эти уравнения непосредственно следуют из определений (I6), (I7), (I8), (I9) и формулы (9).

$$\tilde{T}^{ij,ij\ell} = \tilde{T}_{ij\ell}^{ij} G_0 (T^{i\ell} + T^{j\ell} + T^{k\ell}) \quad (20)$$

$$\tilde{T}^{ij,k\ell} = \tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} G_0 (T^{ik} + T^{jk} + T^{il} + T^{jl}) \quad (21)$$

В правых частях амплитуды \tilde{T}^{ij} должны быть выражением через T^{ij} , $\tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij}$, $\tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij}$, $T^{ij,kl}$ и $\tilde{T}^{ij,k\ell}$ по формуле (15). В результате получаем систему неоднородных уравнений для амплитуд $\tilde{T}_{ij,ijk}^{ij}$, $\tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij}$.

В общем случае A частиц уравнения имеют вид

$$\tilde{T}^{a_{A-1}, \dots, a_2} = \tilde{T}_{a_2}^{a_{A-1}, \dots, a_3} G_0 \sum_{b_{A-1} \neq a_2} T^{b_{A-1}} \quad (22)$$

где

$$T^{b_A} = \sum_{i=1}^{A-1} \sum_{b_i, b_{i+1}, \dots, b_{A-2}} \tilde{T}_i^{b_{A-1}, \dots, b_{i+1}} \quad (23)$$

Так же, как и в случае четырех частиц уравнения (22) представляют систему неоднородных интегральных уравнений для амплитуд \tilde{T}^{a_2} .

Уравнения (22) получены для наиболее детальной классификации A -частичных амплитуд. Произведя частичное суммирование этих уравнений, можно получить уравнения для амплитуд с менее детальной классификацией. Полная классификация соответствует упорядоченному дереву. Суммирование по упорядоченным деревьям, отличающимся порядком включения взаимодействия в различных ветвях, приводит к уравнениям, предложенным Омнесом /16/. Суммирование по всем деревьям с фиксированным первым взаимодействием приводит к уравнениям,

предложенным Розенбергом для амплитуд T^{ij} /15/.

Нашей целью является получение уравнений, наиболее приспособленных для выделения кластерной структуры. Детальная классификация амплитуд в уравнениях (22) и почти столь же детальная классификация амплитуд в уравнениях Омнеса затрудняет построение ядер этих уравнений в полюсном приближении, т.к. для их построения нужно знать не только волновые функции отдельных кластеров, но и функции Грина различных подсистем, входящих в эти кластеры. Уравнения Розенберга также мало приспособлены для полного приближения. Наиболее удобными для выделения кластерной структуры, по нашему мнению, являются уравнения для амплитуд

$$T^{a_{A-1}, a_2} = \sum_{a_{A-1}, a_{A-2}, \dots, a_3} (\tilde{T}^{a_{A-1}, a_{A-2}, \dots, a_3, a_2} + \tilde{T}_{a_2}^{a_{A-1}, a_{A-2}, \dots, a_3}) \quad (24)$$

Эти уравнения получаются суммированием (22) и имеют вид

$$T^{a_{A-1}, a_2} = \tilde{T}_{a_2}^{a_{A-1}} + \tilde{T}_{a_2}^{a_{A-1}} G_0 \sum_{\beta_{A-1} \neq a_2} T^{\beta_{A-1}} \quad (25)$$

где

$$\tilde{T}_{a_i}^{a_{A-1}} = \sum_{a_{A-2}, \dots, a_{i+1}} \tilde{T}^{a_{A-1}, a_{A-2}, \dots, a_{i+1}} \quad (26)$$

$$\tilde{T}^{\beta_{A-1}} = \sum_{\beta_2} \tilde{T}^{\beta_{A-1}, \beta_2} + \sum_{i=3}^{A-2} \sum_{\beta_i} \tilde{T}_{\beta_i}^{\beta_{A-1}} + T_{\beta_{A-1}} \quad (27)$$

В случае $A=4$ амплитуды (24) имеют вид:

$$\begin{aligned} T^{ij,ijk} &= \tilde{T}_{ijk}^{ij} + \tilde{T}^{ij,ijk} \\ T^{ij,k\ell} &= \tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} + \tilde{T}^{ij,ijk\ell} \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения для этих амплитуд отличаются от (20), (21) наличием в правых частях дополнительного свободного члена:

$$T^{ij,ijk} = \tilde{T}_{ijk}^{ij} + \tilde{T}_{ijk}^{ij} G_0 (T^{i\ell} + T^{j\ell} + T^{k\ell}) \quad (29)$$

$$T^{ij,k\ell} = \tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} + \tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} G_0 (T^{ik} + T^{i\ell} + T^{jk} + T^{j\ell}) \quad (30)$$

Удобство уравнений (25) заключается в том, что в полносном приближении ядро определяется функциями

$$f_{a_2}^{a_{A-1}} = V_{a_{A-1}} \Psi_{a_2} \quad (31)$$

где Ψ_{a_2} волновая функция кластера. В ряде случаев, используя уравнение Шредингера, можно исключить потенциал из выражения (28) и получить ядро, которое целиком определяется экспериментальными величинами (формфакторами кластеров).

Обсудим связь между уравнениями (29), (30) и уравнениями Якубовского для четырех частиц. Последние также записываются для амплитуд $T^{ij,ijk}$, $T^{ij,k\ell}$ и имеют вид:

$$T^{ij,ijk} = \tilde{T}_{ijk}^{ij} + \sum_a M_{ijk}^{ij,a} G_o R^{a,ijk} \quad (32)$$

$(a = ij, kj, ik)$

$$T^{ij,k\ell} = \tilde{T}_{ij,k\ell}^{ij} + \sum_B N_{ij,k\ell}^{ij,B} G_o S^B \quad (33) \quad (B = ij, k\ell)$$

где

$$\begin{aligned} R^{ij,ijk} &= T^{jk,i\ell} + T^{ki,kil} + T^{jk,il} + T^{ki,jl} \\ R^{ki,ijk} &= T^{ij,ij\ell} + T^{kj,kjl} + T^{ij,k\ell} + T^{kj,il} \\ R^{jk,ijk} &= T^{ij,ljl} + T^{ki,kil} + T^{ij,k\ell} + T^{ki,jl} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} S^{ij} &= T^{k\ell,ij\ell} + T^{k\ell;k\ell j}, \\ S^{k\ell} &= T^{ij,ij\ell} + T^{ij,ij\ell} \end{aligned} \quad (35)$$

В формулах (32), (33) амплитуды $M_{ijk}^{aa'}$ и $N_{ij,k\ell}^{BB'}$ определены соотношениями:

$$M_{ijk}^{aa'} = T_a \delta_{aa'} + T_a G_o \sum_{a'' \neq a} M_{ijk}^{a''a'} = \quad (36)$$

$$= T_a \delta_{aa'} + \sum_{a'' \neq a} M_{ijk}^{a'a''} G_o T_{a''} \quad (37)$$

$$N_{ij,k\ell}^{BB'} = T_B \delta_{BB'} + T_B G_o N_{ij,k\ell}^{B'B'} \quad (B'' \neq B)$$

Отмети, что

$$\sum_{a'} M_{ijk}^{aa'} = T_a + \tilde{T}_{ijk}^a \quad (38)$$

$$\sum_{b'} N_{ij,k\ell}^{bb'} = T_b + \tilde{T}_{ij,k\ell}^b \quad (39)$$

Покажем, что из уравнений (32), (33) следуют уравнения (29), (30). Рассмотрим, например, уравнение для $T^{ij,ijk}$, которое перепишем в виде:

$$T^{ij,ijk} = \tilde{T}_{ijk}^{ij} + \\ + (M_{ijk}^{ij,j} + M_{ijk}^{j,jk}) G_0 (T^{jk,jk\ell} + T^{jk,ik\ell}) + \\ + (M_{ijk}^{ij,ij} + M_{ijk}^{ii,jk}) G_0 (T^{ki,ik\ell} + T^{ki,jk\ell}) + \\ + (M_{ijk}^{ij,ki} + M_{ijk}^{ij,jk}) G_0 (T^{lj,lj\ell} + T^{lj,ik\ell}) \quad (40)$$

Далее воспользуемся соотношениями вида

$$T^{jk,jk\ell} = T_{jk} G_0 (T^{j\ell} + T^{k\ell}), \quad (41)$$

$$T^{ik,ik\ell} = T_{ik} G_0 T^{i\ell}$$

Подставляя эти соотношения в правую часть уравнения (40), используя (36), (37), получим уравнение (29). Аналогичным образом из уравнения (33) можно получить уравнение (30). Отметим, что использование соотношений (41) эквивалентно некоторой интерации исходных уравнений (32), (33).

2. Простейшие одноканальные уравнения

В этом разделе мы получим уравнения, описывающие в полюсном приближении рассеяние нуклонов на тритии (классическое приближение $4=3+1$), двух дейтонов ($4=2+2$) и нуклонов на ядрах, содержащих произвольное число частиц (в приближении $A = (A-1) + 1$). В заключении мы рассмотрим уравнения, которые возникают при учете различных полюсов в трехчастичной T -матрице, — пример, имеющий непосредственное отношение к реальному случаю Nt рассеяния.

Рассеяние нуклонов на тритии

В приближении $4=3+1$ в точных уравнениях (29), (30) предыдущей главы следует оставить только амплитуды $T_{ij,ijk}^{ij}$, а ядра вида \tilde{T}_{ijk}^{ij} в уравнениях для этих амплитуд аппроксимировать полюсным членом.

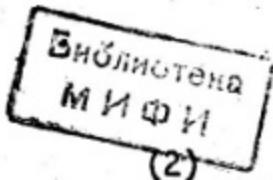
Пусть частица с номером ℓ рассеивается на связанном состоянии частиц ijK . Соответствующую асимптотическую волновую функцию обозначим Φ_ℓ

$$\Phi_\ell = \Psi_{ijk} (\vec{K}_{ij}, \vec{P}_{ijk}) \delta(\vec{q}_\ell - \vec{q}_0) \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) \quad (1)$$

где Ψ_{ijk} — нормированная на единицу волновая функция связанного состояния.

Мы используем координаты Якоби:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 \vec{P}_m ; \quad K_{ij} = \frac{1}{12} (\vec{p}_i - \vec{p}_j) \quad (2)$$



$$\vec{P}_{ijk} = \frac{\vec{p}_i + \vec{p}_j - 2\vec{p}_k}{\sqrt{6}} ; \quad q_\ell = \frac{\vec{p}_i + \vec{p}_j + \vec{p}_k - 3\vec{p}_\ell}{\sqrt{12}}$$

Закон сохранения импульса означает, что все величины в задаче содержат множитель $\delta(\vec{P} - \vec{P}_0)$, где $2\vec{P}_0$ - полный импульс. Переходом к системе центра масс зависимость от \vec{P} исключается из рассмотрения, при этом $q_\ell = \frac{2P_\ell}{\sqrt{3}}$. Для удобства приведем выражения для импульсов P_m через координаты (2):

$$\begin{aligned}\vec{P}_{ij} &= \pm \frac{1}{12} K_{ij} + \frac{1}{16} \vec{P}_{ijk} + \frac{1}{2\sqrt{3}} q_\ell + \frac{1}{2} \vec{P} \\ \vec{P}_k &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \vec{P}_{ijk} + \frac{1}{2\sqrt{3}} q_\ell + \frac{1}{2} P \\ \vec{P}_\ell &= -\frac{\sqrt{3}}{2} q_\ell + \frac{1}{2} \vec{P}\end{aligned}\quad (3)$$

В координатах Якоби $\sum P_m^2 = K^2 + p^2 + q^2 + \rho^2$

В формуле (I) $-\frac{\sqrt{3}}{2} q_0$ - импульс налетающей частицы.

Полная энергия в системе равна

$$E = \frac{q_0^2}{2m} - \frac{\alpha^2}{2m}$$

где $\alpha^2 = 2mW > 0$, W - (положительная) энергия связи в системе трех частиц.

В случае тождественных частиц следует использовать симметризованную волновую функцию.

$$\Phi^S = \sum_{\ell=1}^6 \varphi_\ell \quad (4)$$

Волновая функция $\Psi(E)$ равна

$$\Psi(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G(E+i\varepsilon) \Phi^S(E) \quad (5)$$

Представим $\Psi(E)$ в виде

$$\Psi(E) = \sum_{i \leq j} \Psi^{ij}(E) \quad (6)$$

где в указанном приближении функции Ψ^{ij} равны

$$\Psi^{ij} = \Psi^{ij,ijk} + \Psi^{ij,ije} \quad (?)$$

причем функции $\Psi^{ij,ijk}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \Psi^{ij,ijk} &= \Phi_\ell^{ij} + G_0 [\tilde{T}_{ijk}^{ij}]_{\text{нов}} \\ (\Psi^{il,jjl} + \Psi^{jl,ljl} + \Psi^{kl,kll} + \Psi^{il,ikl} + \Psi^{lj,jkl} + \Psi^{kl,jlm}) \end{aligned} \quad (8)$$

Для вывода этого уравнения нужно воспользоваться соотношением (I.3), связывающим функцию Грина с оператором рассеяния и переписать уравнение (I.29) в виде уравнения для функции Грина, а затем использовать уравнение (5). Поясним возникновение свободных членов в уравнении (8). Свободные члены возникают в том случае, когда при действии функции Грина на асимптотическую функцию возникает множитель $\frac{1}{i\varepsilon}$, который затем сокращается с $i\varepsilon$ в формуле (5), равен нулю. Легко проверить, что

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon G_0(E + i\varepsilon) \Phi_m &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \tilde{G}_{ijk}^{ij}(E + i\varepsilon) \Phi_m &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \tilde{G}_{ijk}^{ij}(E + i\varepsilon) \Phi_m &= 0 \end{aligned} \right\} m - \text{любое} \quad (9)$$

(напомним, что $i \neq j \neq k \neq \ell$; $i, j, k, \ell = 1, 2, 3, 4$).

В том случае, когда $\ell = m$; $\tilde{G}_{ijk}^{ij} \Phi_\ell$ содержит множитель $\frac{1}{\ell \varepsilon}$. Этот множитель возникает из полюсного члена в функции Грина

$$[G_{ijk}^{ij}]_{\text{пол}} = \frac{\Psi_{ijk}^{ij}(\vec{k}_{ij}, \vec{p}_{ijk}) \Psi_{ijk}^{jk}(\vec{k}_{ij}, \vec{p}_{ijk})}{E + \frac{d^2}{2m} - q_e^2 + i\varepsilon} \delta(\vec{q}_e - \vec{q}'_e) \quad (I0)$$

где Ψ_{ijk}^{ij} функция, через которую посредством симметризации выражается функция Ψ_{ijk}^{jk}

$$\Psi_{ijk}^{jk} = \Psi_{ijk}^{ij} + \Psi_{ijk}^{jk} + \Psi_{ijk}^{ik} \quad (II)$$

Таким образом, свободный член Φ_ℓ^{ij} в формуле (8) равен

$$\Phi_\ell^{ij} = \Psi_{ijk}^{ij}(\vec{k}_{ij}, \vec{p}_{ijk}) \delta(\vec{q}_e - \vec{q}_o) \quad (I2)$$

Оператор $G_o(E)$ в (8) является оператором умножения на функцию

$$\frac{2m}{\hbar^2} (q_o^2 - d^2 - k_{ij}^2 - p_{ijk}^2 - q_e^2)^{-1} \quad (I3)$$

а полюсной член в \tilde{T}_{ijk}^{ij} равен

$$[\tilde{T}_{ijk}^{ij}]_{\text{пол}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Phi_{ijk}^{ij}(\vec{k}_{ij}, \vec{p}_{ijk}) \Psi_{ijk}^{jk}(\vec{k}_{ij}, \vec{p}_{ijk})}{q_o^2 - q_e^2} \delta(\vec{q}_e - \vec{q}'_e) \quad (I4)$$

где функции f_{ijk}^{ij}, g_{ijk} отличаются от $\psi_{ijk}^j, \psi_{ijk}^i$ множителем

$$-(K_{ij}^2 + P_{ijk}^2 + d^2)$$

Функции ψ_{ijk}^j будем искать в виде

$$\psi_{ijk}^j(K_{ij}, P_{ijk}, \bar{q}_e) = \frac{f_{ijk}^j(K_{ij}, P_{ijk}) C_e(\bar{q}_e)}{q_0^2 - d^2 - K_{ij}^2 - P_{ijk}^2 - \bar{q}_e^2} \quad (15)$$

где $C_e(\bar{q}_e)$ - функция, подлежащая определению. В силу тождественности частиц функции все функции вида f_{ijk}^j выражаются через одну функцию $f(\bar{E}, \bar{P})$, точно так же

$g_{ijk}(K_{ij}, P_{ijk}) = g(\bar{E}, \bar{P})$ и $C_e(\bar{q}_e) = C(q)$. Кроме того функции f, g , а следовательно и ψ , четны при замене $\bar{E} \rightarrow -\bar{E}$.

Таким образом 12 уравнений вида (8) сводятся к одному уравнению для функции с (\bar{q}) .

Для вывода этого уравнения рассмотрим, например, первые два члена в правой части уравнения (8). Имеем

$$C(\bar{q}_e) = \delta(\bar{q}_e - \bar{q}_0) + \frac{1}{q^2 - q_0^2} \int q(K'_{ik}, P'_{ijk}) \delta(\bar{q}_e - \bar{q}'_e) \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{ije}^{ij}(K'_e; P'_{ij})}{K'^2_{ie} + P'^2_{ije} + q^2 + d^2 - \bar{q}_e^2} + \\ + \frac{f_{ije}^{ji}(K'_e; P'_{je})}{K'^2_{je} + P'^2_{je} + q^2 + d^2 - \bar{q}_e^2} \end{array} \right\} C(q'_k) + \text{з (фазовый объем)} + \text{остальные члены.} \quad (16)$$

В качестве переменных интегрирования удобно выбрать переменные

$$\tilde{s}_{ijk}^i = \begin{pmatrix} \bar{q}'_k \\ \bar{p}'_{ijk} \\ K'_{ij} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Легко проверить, что $\vec{\zeta}'_{\ell ijk} = P_{j\ell} P_{ij} \vec{\zeta}_{ijk}$

$$\vec{\zeta}'_{j\ell ik} = P_{i\ell} P_{ij} \vec{\zeta}_{ijk} \quad (18)$$

причем в базисе $\begin{pmatrix} P_{ij\ell} \\ K_{ij} \end{pmatrix}$ действия операторов $P_{ij}, P_{j\ell}, P_{i\ell}$
задается матрицами

$$P_{ij} = \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad P_{i\ell} = \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$P_{j\ell} = \Lambda_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Наконец, переменные $\vec{\zeta}_{ijk\ell}$ выражаются через $\vec{\zeta}'_{ijk\ell}$
посредством перестановки $P_{k\ell}$. В базисе $\vec{\zeta}'_{ijk\ell}$

$$P_{k\ell} = C_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Опуская индексы у переменных интегрирования, имеем:

$$\delta(\vec{q}_e - \vec{q}'_e) = \delta(\vec{q} + \frac{1}{3}\vec{q}' - \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{P}') = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int^3 \delta(\vec{p}' - \frac{3\vec{q} + \vec{q}'}{2\sqrt{2}}) \quad (21)$$

$$\vec{P}'_{ijk\ell} = \vec{q} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \vec{q}'$$

Таким образом, подинтегральное выражение в формуле (I6)
имеет вид

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^3 \int d\vec{k} d\vec{q} \left(k^2 + \frac{9}{8} q^2 + \frac{9}{8} q'^2 + \frac{3}{4} \vec{q} \cdot \vec{q}' + \alpha^2 - q_0^2 \right)^{-1} \quad (22)$$

$$\left\{ g\left(\vec{k}, q + \frac{3\vec{q}'}{2\sqrt{2}}\right) \left[f\left(\Lambda_2, \Lambda_1, \left(\vec{k}, \vec{q}' + \frac{3\vec{q}'}{2\sqrt{2}}\right)\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + f\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \left(\vec{k}, \vec{q}' + \frac{3\vec{q}'}{2\sqrt{2}}\right)\right) \right] \right\} C(\vec{q}') + \dots$$

Запись $f[\Lambda_2, \Lambda_1, (\vec{K}, \vec{P})], f[\Lambda_3, \Lambda_1, (\vec{K})]$ означает:

$$f[\Lambda_2, \Lambda_1, (\vec{K}, \vec{P})] = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{P} - \frac{1}{2}\vec{K}, -\frac{1}{2}\vec{P} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{K}\right)$$

$$f[\Lambda_3, \Lambda_1, (\vec{K}, \vec{P})] = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{P} - \frac{1}{2}\vec{K}, -\frac{1}{2}\vec{P} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{K}\right) \quad (23)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} f[\Lambda_2, \Lambda_1, (\vec{K}, \vec{P})] &= f[\Lambda_2(-\vec{K}, \vec{P})] = \pm f[\Lambda_3(\vec{K}, \vec{P})] \\ f[\Lambda_3, \Lambda_1, (\vec{K}, \vec{P})] &= f[\Lambda_3(-\vec{K}, \vec{P})] = \pm f[\Lambda_2(\vec{K}, \vec{P})] \end{aligned} \quad (24)$$

где знак + (-) относится к четной (нечетной) относительно замены $K \rightarrow -K$ функции $f(\vec{K}, \vec{P})$

Учет каждой из оставшихся двух пар слагаемых в (8) приводит к такому же результату. В результате имеем

$$C(\vec{q}) = \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{1}{q^2 - q_0^2} \int V(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) C(\vec{q}') d^3 q' \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{где } V(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) &= 3 \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^3 \int d^3 K \left(K^2 + \frac{9}{8} q^2 + \right. \\ &\left. + \frac{9}{8} q'^2 + \frac{3}{4} \vec{q} \cdot \vec{q}' + \omega^2 - q_0^2 \right)^{-1} g(E, q + \frac{3\vec{q}'}{2\sqrt{2}}) \times \end{aligned} \quad (26)$$

$$\times \left\{ f[\Lambda_2(K, \frac{\vec{q}'+3\vec{q}}{2\sqrt{2}})] + f[\Lambda_3(K, \vec{q}'+\frac{3\vec{q}}{2\sqrt{2}})] \right\}$$

Ограничимся далее простейшим случаем, когда $f(E, \vec{P})$ зависит только от переменной $\mathcal{U}^2 = K^2 + P^2$. В координатном пространстве это означает, что волновая функция трех

частиц зависит только от переменной ρ .

Из расчетов по методу K - гармоник мы знаем, что волновая функция трития с точностью 90% действительно зависит только от ρ , поэтому приближение $f(\vec{k}, \vec{p}) = f(u)$ является разумным.

Легко видеть, что в этом случае $f(u) = \frac{1}{3} g(u)$ и для потенциала в формуле (26) получаем

$$V(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) = 4\pi \cdot 2 \int k^2 dk \frac{g(u_1)g(u_2)}{\mathcal{D}(q_0)} \quad (27)$$

где

$$u_1^2 = k^2 + \frac{9}{8} q^2 + \frac{1}{8} q'^2 + \frac{3}{4} qq'x; \quad (28)$$

$$u_2^2 = k^2 + \frac{9}{8} q'^2 + \frac{1}{8} q^2 + \frac{3}{4} qq'x;$$

$$\mathcal{D}(q_0) = k^2 + \frac{9}{8} q^2 + \frac{9}{8} q'^2 + \frac{3}{4} qq'x + \alpha^2 - q_0^2$$

Вводя амплитуду рассеяния $A(\vec{q}, \vec{q}_0)$

$$C(\vec{q}, \vec{q}_0) = \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{1}{2\pi^2} \frac{A(\vec{q}, \vec{q}_0)}{q^2 - q_0^2} \quad (29)$$

получим для парциальной амплитуды уравнение Липпмана-Швингера

$$Ae(0, q_0) = Ve(q, q_0 | q_0) + \frac{2}{\pi} \int \frac{Ve(u, q' | q_0) Ae(u' | q_0) q'^2 dq'}{q'^2 - q_0^2} \quad (30)$$

$$Ve(q, A' | q_0) = 8\pi^3 \left(\frac{3}{2V^2}\right)^3 \int k^2 dk \int dx \frac{g(u)g(u')f(x)}{\mathcal{D}(q_0)} \quad (31)$$

Парциальная амплитуда в (30) нормирована условием:

$$A_e(g_0, g_0) = \frac{1}{g_0^2} \sin \delta_e(g_0) e^{i \delta_e(g_0)} \quad (32)$$

Формулы (30), (31) (дополнительные с учетом спиновых и изотопспиновых переменных) решают в рассматриваемом приближении задачу о рассеянии нуклонов на ядрах H^3 и He^3 . Результаты численных расчетов мы рассмотрим в следующей главе.

Рассеяние дейтонов

В приближении 4=2+2 в уравнениях (I.29) и (I.30) следует оставить амплитуды $\tilde{T}_{ij,ke}$, а ядра $\tilde{T}_{ij,ke}$ в уравнениях для этих амплитуд аппроксимировать полюсным членом. Выражение для полюсного члена легко получить, выразив амплитуду $\tilde{T}_{ij,ke}$ через функцию Грина $G_{ij,ke}$:

$$T_{ij,ke}^{ij} = V_{ij} G_{ij,ke} (V_{ij} + V_{ke}) - T_{ij} \quad (32)$$

и воспользовавшись спектральным представлением для $G_{ij,ke}$

$$G_{ij,ke}(z) = \delta(\vec{q} - \vec{q}') \sum_{\alpha, \beta} \frac{|\Psi_{ij}^\alpha \Psi_{ke}^\beta \rangle \langle \Psi_{ke}^\beta \Psi_{ij}^\alpha|}{z - \frac{\hbar^2}{2m} q'^2 - E_\alpha - E_\beta} \quad (33)$$

В формуле (33) \vec{q}' - относительный импульс. $\{\Psi_{ij}^\alpha\}$, $\{\Psi_{ke}^\beta\}$ - полные наборы функций для подсистем ij и ke . Символ S означает суммирование по дискретным состояниям и интеграл по непрерывному спектру.

Другой способ определения функции $G_{ij,kl}(z)$ заключается в вычислении свертки функции Грина $g_{ij}(z)$ и $g_{kl}(z)$

$$G_{ij,kl}(z) = \delta(q-q') \frac{1}{2\pi i} \oint g_{ij}\left(z - \frac{\hbar^2}{2m} q^2 - \tilde{z}\right) g_{kl}(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (34)$$

где контур интегрирования \oint производится так, что он окружает особенности $g_{kl}(\tilde{z})$, в то время как все особенности функции $g_{ij}\left(z - \frac{\hbar^2}{2m} q^2 - \tilde{z}\right)$ остаются снаружи. Полезно убедиться в эквивалентности обоих определений.

Действительно, запишем спектральное представление для функций Грина g_{ij} и g_{kl}

$$\begin{aligned} g_{ij}(s-\tilde{z}) &= \sum_n \frac{|\Psi_{ij}^n\rangle \langle \Psi_{ij}^n|}{s-\tilde{z}-E_{ij}^n} + \int_0^\infty dE'_{ij} \frac{|\Psi_{ij}(E'_{ij})\rangle \langle \Psi_{ij}(E'_{ij})|}{s-\tilde{z}-E'_{ij}} \\ g_{kl}(\tilde{z}) &= \sum_m \frac{|\Psi_{kl}^m\rangle \langle \Psi_{kl}^m|}{\tilde{z}-E_{kl}} + \int dE'_{kl} \frac{|\Psi_{kl}(E'_{kl})\rangle \langle \Psi_{kl}(E'_{kl})|}{\tilde{z}-E'_{kl}} \end{aligned} \quad (35)$$

где $|\Psi_{ij}^n\rangle, |\Psi_{kl}^m\rangle$ - волновые функции связанных состояний, $|\Psi_{ij}(E_{ij})\rangle, |\Psi_{kl}(E_{kl})\rangle$ - волновые функции непрерывного спектра, E_{ij}^n, E_{kl}^m - отрицательные энергии связи $\tilde{z} = z - \frac{\hbar^2}{2m}$, контур \oint в формуле (34) состоит из окружностей C_m окружающих полоса $\tilde{z} = E_{kl}^m$, и контура γ_r , окружающего разрез. Подставляя (35) в интеграл (34), получим

$$\begin{aligned}
 G_{ij,kl}(z) &= \delta(\vec{q}-\vec{q}') \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_n |\Psi_{ij}^n\rangle \langle \Psi_{ij}^n| \phi g_{ij}(s-z) \frac{dz}{z-E_{kl}^n} \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\infty dE'_{kl} |\Psi_{kl}(E'_{kl})\rangle \langle \Psi_{kl}(E'_{kl})| \int dz \frac{g_{ij}(s-z)}{z-E'_{kl}} \right\} = \\
 &= \delta(\vec{q}-\vec{q}') \left\{ \sum_m |\Psi_{kl}^m\rangle \langle \Psi_{kl}^m| g_{ij}(s-E_{kl}^m) + \right. \\
 &\quad \left. + \int dE'_{kl} |\Psi_{kl}(E'_{kl})\rangle \langle \Psi_{kl}(E'_{kl})| g_{ij}(s-E'_{kl}) \right\}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Используя далее выражение (35), снова приходим к представлению $G_{ij,kl}$ в виде (34).

Обозначив через ω_d волновое число дейтона, запишем полюсной член в амплитуде $\tilde{T}_{ij,kl}^{ij}$ в виде:

$$\begin{aligned}
 [\tilde{T}_{ij,kl}^{ij}]_{\text{пол}} &= \frac{\hbar^2}{2m} (k_{ij}^2 + \omega_d^2) \Psi_{ij}(k_{ij}) \Psi_{kl}(p_{ij}) \times \\
 &\quad \times \Psi_{ij}(k'_{ij}) \Psi_{kl}(p'_{ij}) \frac{(k'^2 + p_{ij}^2 + 2\omega_d^2)}{q_0^2 - q_{ij}^2 + i\xi} \delta(q_{ij} - q'_{ij}) \tag{38}
 \end{aligned}$$

Здесь импульсы $\vec{k}_{ij}; \vec{p}_{ij}; \vec{q}_{ij}$ определены соотношениями³⁾

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_{ij} &= \frac{\vec{p}_i - \vec{p}_j}{\sqrt{2}}; \quad \vec{p}_{ij} = \frac{\vec{p}_k - \vec{p}_l}{\sqrt{2}}; \quad \vec{q}_{ij} = \frac{\vec{p}_i + \vec{p}_j - \vec{p}_k - \vec{p}_l}{2} = \\
 &= \vec{p}_i - \vec{p}_j \tag{39}
 \end{aligned}$$

3) Выражение импульсов через координаты (39) следующее:

$$\vec{p}_{ij} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}_{ij} + \frac{1}{2} \vec{q}_{ij} + \frac{1}{2} \vec{P}$$

$$\vec{p}_{kl} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{k}_{kl} - \frac{1}{2} \vec{q}_{kl} + \frac{1}{2} \vec{P}$$

(в системе центра масс), $2\vec{q}_0$ - относительный импульс дейтонов, ψ - волновая функция дейтона.

Асимптотическое состояние, описывающее свободное движение дейтонов $i_j, k\ell$ обозначим $\Phi_{ij, k\ell}$

$$\Phi_{ij, k\ell} = \psi(\vec{k}_{ij}) \psi(\vec{p}_{ij}) \delta(\vec{q}_{ij} - \vec{q}_0); E = \frac{\hbar^2}{2m} (q_0^2 - 2\omega_d)_{(40)}$$

Далее удобно определить функции

$$F^{ij, k\ell} = \psi^{ij, k\ell} + \psi^{k\ell, ij}$$

В приближении 4=2+2 уравнение для $F^{ij, k\ell}$ имеет вид

$$F^{ij, k\ell} = \Phi_{ij, k\ell} + G_0 [T_{ij, k\ell}^{ij} + \tilde{T}_{ij, k\ell}^{k\ell}] \\ [F^{ik, j\ell} + F^{il, kj}] \quad (41)$$

Полосной член в (41) имеет вид аналогичный (38) с той лишь разницей, что множитель $K_{ij}^2 + \omega_d^2$ нужно заменить на $K_j^2 + p_{ij}^2 + 2\omega_d^2$. Полагая

$$F^{ij, k\ell} = \frac{(K_j^2 + p_{ij}^2 + 2\omega_d^2) \psi(\vec{k}_{ij}) \psi(\vec{p}_{ij}) C_{ij}(\vec{q}_{ij})}{q_0^2 - 2\omega_d^2 - K_{ij}^2 - p_{ij}^2 - q_{ij}^2} \quad (42)$$

$$C(\vec{q}) = \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{1}{2\pi^2} \frac{A(\vec{q}, \vec{q}_0)}{q_0^2 - q^2} \quad (43)$$

для амплитуды рассеяния получим уравнение Липпмана-Шингера с потенциалом

$$V(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) = 4\sqrt{2} \int \frac{4(\vec{k} + \frac{\vec{q}'}{\sqrt{2}}) \psi(-\vec{k} + \frac{\vec{q}'}{\sqrt{2}}) \psi(\vec{k} + \frac{\vec{q}'}{\sqrt{2}})}{2k^2 + q^2 + q'^2 + 2\omega_d^2 - q_0^2} \times \\ \times \psi(-\vec{k} + \frac{\vec{q}}{\sqrt{2}}) (q^2 + 2k^2 + 2\omega_d^2) (q'^2 + 2k^2 + 2\omega_d^2)$$

Рассеяние нуклонов на ядрах. Приближение

В приближении $A = (A-1) + 1$ в точных уравнениях (I.25) оставим только те амплитуды, которые отвечают разбиениям C_2 $(i, \dots, j)(m)$. Обозначим соответствующие волновые функции через $\Psi^{i,j,m} \equiv \Psi^{a_{A-1}, C_2}$ ($i \neq j \neq m$) .

Асимптотические функции, описывающие рассеяние частицы с номером m на связанном состоянии $A-1-\tilde{n}$ частиц имеют вид

$$\Phi_m^{ij} = \Psi_m(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_{A-2}) \delta(\vec{q}_m - \vec{q}_0) \quad (45)$$

где $\Psi_m(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-2})$ волновая функция кластера, а δ -функция описывает свободное движение m частицы. Мы предполагаем, что в качестве переменных $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-2}$, \vec{q}_m выбраны координаты Яоби

$$\vec{k}_l = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\sum_{j=1}^l \vec{p}_j - l \vec{p}_{l+1} \right); \quad l = 1, 2, \dots, A-2$$

$$\vec{q}_m = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \left(\sum_{j=1}^{A-2} \vec{p}_j - (A-1) \vec{p}_m \right) \quad (j \neq m)$$

Следует отметить, что такой выбор переменных не является наиболее удобным для кластеров, содержащих число частиц

$A \geq 4$

Волновая функция

$\Psi(E)$

$$\Psi^{ij} = \sum_{i>j; m \neq i,j} \Psi^{ij,m}$$

(46)

а функции $\Psi^{ij,m}$ удовлетворяют системе (A-1)(A-2) уравнений

$$\Psi^{ij,m} = \Phi_m^{ij} + G_0 [\tilde{T}_m^{ij}]_{\text{нов}} \sum_{l,n} \Psi^{lm,n} \quad (47)$$

где Φ_m^{ij} - функции, через которые посредством симметризации выражаются функции Φ_m . Полосной член в амплитуде \tilde{T}_m^{ij} выражается через f_m^{ij}, g_m по формулам, аналогичным (I4). Полагая

$$\Psi^{ij,m} = \frac{f_{A-1}^{ij}(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_{A-2}) C_m(\vec{q}_m)}{q_0^2 - \alpha^2 - k_1^2 - \dots - k_{A-2}^2 - q_m^2} \quad (48)$$

где α - волновое число кластера, получим для функции уравнение Шредингера с эффективным потенциалом $V(\vec{q}, \vec{q}' / q_0)$. Ниже мы приведем выражение для этого потенциала в том простейшем случае, когда функции

$$f_{A-1}^{ij}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-2})$$

зависят только от переменной $\mathcal{U}^2 = k_1^2 + \dots + k_{A-2}^2$

Следует отметить, однако, что функции такого вида имеют смысл первого приближения только для кластеров типа трития и α -частицы. Учет принципа Паули приводит к тому, что для более тяжелых кластеров волновая функция в первом при-

ближении равна $f(u) \mathcal{V}(u)$ где $\mathcal{V}(u)$ -гармонический полином в 3A-3 мерном пространстве, не сводящийся к постоянной.

Для вывода рассмотрим вклад от члена $[T_m^{ij}]_{\text{пол}} \psi^{lm,n}$ который имеет вид:

$$-\frac{1}{q_m^2 - q_0^2} \int \frac{\varphi_m(\bar{K}_1^{(m)}, \dots, \bar{K}_{A-2}^{(m)}) f_n(\bar{K}_1^{(n)}, \dots, \bar{K}_{A-2}^{(n)})}{\bar{K}_1^{(m)2} + \dots + \bar{K}_{A-2}^{(m)2} + \alpha^2 - q_0^2} \times \\ \times \delta(\bar{q}_m - \bar{q}'_m) C_n(\bar{q}'_n) d\bar{K}_1^{(m)} d\bar{K}_2^{(m)} \dots d\bar{K}_{A-2}^{(m)} d\bar{q}'_n \quad (49)$$

где через $\bar{K}_1^{(m)}, \dots, \bar{K}_{A-2}^{(m)}$ и $\bar{K}_1^{(n)}, \dots, \bar{K}_{A-2}^{(n)}$ обозначены разные наборы Якобиевых переменных. Удобно координаты $\bar{K}_{A-2}^{(m,n)}$ и $\bar{q}_{m,n}$ выбрать следующим образом:

$$\bar{K}_{A-2}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{(A-2)(A-1)}} \left| \sum_{j=1}^{A-2} \bar{p}_j - (A-2) \bar{p}_m \right| \quad (j \neq m, n) \quad (50)$$

$$\bar{K}_{A-2}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{(A-1)(A-2)}} \left| \sum_{j=1}^{A-2} \bar{p}_j - (A-2) \bar{p}_m \right| \quad (j \neq m, n) \quad (51)$$

$$\bar{q}_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \left| \sum_{j=1}^{A-1} \bar{p}_j - (A-1) \bar{p}_m \right| \quad (j \neq m) \quad (52)$$

$$\bar{q}_n = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \left| \sum_{j=1}^{A-1} \bar{p}_j - (A-1) \bar{p}_n \right| \quad (j \neq n) \quad (53)$$

а остальные A-3 пары координат $\bar{K}^{(m)}$ и $\bar{K}^{(n)}$ выбрать произвольными и совпадающими. В качестве переменных интегрирования выберем переменные $\bar{K}^{(n)}, \bar{q}^{(n)}$. Переменные $\bar{q}_m, \bar{K}_{A-2}^{(m)}, \bar{K}_{A-3}^{(m)}$ выражаются через $\bar{q}_n, \bar{K}_{A-2}^{(n)}, \bar{K}_{A-3}^{(n)}$ посредством матрицы

$$C_{A-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A-1} & \frac{\sqrt{A(A-2)}}{A-1} & 0 & \dots \\ \frac{\sqrt{A(A-2)}}{A-1} & \frac{1}{A-1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \quad (54)$$

частным случаем которой при $A=4$ является матрица C_3 в формуле (20). Легко видеть, что подинтегральное выражение в формуле (49) равно

$$\frac{2\pi^{\frac{3A-9}{2}}}{\Gamma(\frac{3A-9}{2})} \left(\frac{A-1}{\sqrt{A(A-2)}} \right)^3 \int d\vec{q}' \int k^{3A-10} dk f(u_1) g(u_2) \times \times C(T') \left[\frac{1}{2} + \frac{(A-1)^2}{A(A-2)} (q'^2 + q^2 + \frac{2}{A-1} \vec{q} \cdot \vec{q}' + \omega^2 - q_0^2) \right]^{-1} \quad (55)$$

где

$$u_1^2 = k^2 + \frac{1}{(A-2)A} \left[(A-1)^2 q'^2 + q^2 + 2(A-1) \vec{q} \cdot \vec{q}' \right] \quad (56)$$

$$u_2^2 = k^2 + \frac{1}{A(A-2)} \left[q'^2 + (A-1)^2 q^2 + 2(A-1) \vec{q} \cdot \vec{q}' \right]$$

Учет остальных членов в уравнении (48) приводит к появлению дополнительного коэффициента $(A-1)x(A-2)$. Таким образом, для амплитуды рассеяния получаем снова уравнение (30), где

$$V_e(q, q' | q_0) = \frac{4\pi^{\frac{3A-5}{2}}}{\Gamma(\frac{3A-9}{2})} \left(\frac{A-1}{\sqrt{A(A-2)}} \right)^3 \int_0^\infty k^{3A-10} dk \times \times \int_{-1}^1 dx \frac{g(u_1) g(u_2) P_e(x)}{k^2 + \frac{A-1}{A(A-2)} (q^2 + q'^2 + \frac{2}{A-1} \vec{q} \cdot \vec{q}' x + \omega^2 - q_0^2)}$$

В формуле (57) мы положили

$$g(u) = \frac{(A-1)(A-2)}{2} f(u)$$

Пример двухканальных уравнений

Рассмотрим рассеяние протона на тритоне, Кулоновское взаимодействие между частицами приводит, во-первых, к тому, что между частицами в начальном и конечном состоянии действует дальнедействующий потенциал, а, во-вторых, к тому, что появляется расщепление порогов $p_{H^3} + p_{He^3}$, вызванное разницей масс ядер H^3 и He^3 . Эта разница равна 0.765 mev . Учет кулоновского взаимодействия в методе интегральных уравнений сопряжено с большими трудностями. Эти трудности связаны с тем, что кулоновская T -матрица имеет особенность, поэтому уравнения оказываются нефредгольмовыми и требуют дальнейшей перестройки. Ниже рассмотрены уравнения, в которых учтена лишь разница порогов, а кулоновским взаимодействием в начальном и конечном состоянии пренебрегается. Рассмотрим рассеяние протонов на тритии. Пусть частицы 1, 2 являются протонами, а частицы 3-4 нейтронами.

В приближении $4=3+1$ волновая функция состоит из 12 слагаемых:

$$\Psi^{I2,I23}, \Psi^{I3,I23}, \Psi^{23,I23}, \Psi^{I2,I24}, \Psi^{I4,I24}, \Psi^{24,I24},$$
$$\Psi^{34,234}, \Psi^{34,234}, \Psi^{I3,I34}, \Psi^{I4,I34}, \Psi^{34,I34},$$
$$\Psi^{32,234}$$

С учетом симметризации по протонам и нейtronами имеем только две различные функции, например, $\Psi_{12,123}$ и $\Psi_{13,134}$. Уравнение для $\Psi_{13,134}$ содержит свободный член, а уравнение для $\Psi_{12,124}$ свободного члена не содержит. Далее, полюсной член в ядре для $\Psi_{12,124}$ равен

$$\frac{f_{124}^{12}(\vec{k}, \vec{p}) g_{12,4}(\vec{k}, \vec{p})}{g_0^2 - d_t^2 + d_u^2 + d_u^2 - q^2} \delta(\vec{q} - \vec{q}') \quad (58)$$

а полюсной член в ядре для $\Psi_{13,134}$ равен

$$\frac{f_{134}^{13}(\vec{k}, \vec{p}) g_{134}(\vec{k}, \vec{p})}{g_0^2 - q^2} \delta(\vec{q} - \vec{q}') \quad (59)$$

где d_t - волновое число тритона, d_h - волновое число He^3 . Отметим, что волновые функции ядер H^3 и He^3 с хорошей точностью можно считать совпадающими. Поэтому различие между g_{1234} и g_{123} заключается в множителе $(k^2 + p^2 + d_{t,h}^2)$.

$$\text{Положим } \Psi_{12,123} = \frac{f_{123}^{12}(\vec{k}, \vec{p}) C_h(\vec{q})}{g_0^2 - d_t^2 - k^2 - p^2 - q^2} \quad (60)$$

$$\Psi_{23,234}^{34,234}(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = \frac{f_{234}^{34}(\vec{k}, \vec{p}) C_h(\vec{q})}{g_0^2 - d_t^2 - k^2 - p^2 - q^2} \quad (61)$$

Функции $\Psi_{13,123}, \dots, \Psi_{21,124}$ имеют вид (60), а функции $\Psi_{23,234}, \Psi_{24,234}$ имеют вид (61). Ниже мы ограничимся случаем, когда $f(\vec{k}, \vec{p}) = f(u)$, тогда

$$f_{123}^{12}(\vec{k}, \vec{p}) = \frac{1}{3} (k^2 + p^2 + d_h^2) g(u);$$

$$f_{234}^{34}(\vec{k}, \vec{p}) = \frac{1}{3} (k^2 + p^2 + d_t^2) \Psi(u);$$

Система уравнений для $C_n(\vec{q}), C_t(\vec{q})$

имеет вид

$$C_t(\vec{q}) = \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{1}{q^2 - q_0^2} \int [V^{tt}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) C^t(\vec{q}') + V^{th}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) C^h(\vec{q}')] d\vec{q}' \quad (62)$$

где $C_h(\vec{q}) = \frac{1}{q^2 - \Delta^2 - q_0^2} \int [V^{ht}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) C^t(\vec{q}') +$

$$+ V^{hh}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) C^h(\vec{q}')] d\vec{q}' ; \Delta^2 = \omega_h^2 - \omega_t^2 ;$$

$$V^{tt} = 4\pi \frac{2}{3} \int k^2 dk \frac{(u_1^2 + \omega_t^2)(u_2^2 + \omega_t^2)}{\mathcal{D}(q_0)} \Psi(u_1) \Psi(u_2) \quad (63)$$

$$V^{th} = 4\pi \frac{4}{3} \int k^2 dk \frac{(u_1^2 + \omega_t^2)(u_2^2 + \omega_h^2)}{\mathcal{D}(q_0)} \Psi(u_1) \Psi(u_2)$$

$$V^{ht} = 4\pi \frac{4}{3} \int k^2 dk \frac{(u_1^2 + u_h^2)(u_2^2 + \omega_t^2)}{\mathcal{D}(q_0)} \Psi(u_1) \Psi(u_2)$$

$$V^{hh} = 4\pi \frac{2}{3} \int k^2 dk \frac{(u_1^2 + \omega_h^2)(u_2^2 + \omega_h^2)}{\mathcal{D}(q_0)} \Psi(u_1) \Psi(u_2)$$

$u_1, u_2, \mathcal{D}(q_0)$
Полагая далее

определенны по формулам (28)

$$C_t(\vec{q}) = \delta(\vec{q} - \vec{q}_0) + \frac{A^{tt}(\vec{q}, \vec{q}_0)}{q^2 - q_0^2} \frac{1}{2\pi^2} \quad (64)$$

$$C_h(\vec{q}) = \frac{A^{ht}(\vec{q}, \vec{q}_0)}{q^2 - q_0^2 - \Delta^2} \frac{1}{2\pi^2}$$

получим систему уравнений для амплитуд перехода:

$$A^{tt}(\vec{q}, \vec{q}_0) = 2\pi^2 V^{tt}(\vec{q}, \vec{q}_0 | q_0) + \int \frac{V^{tt}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0)}{q'^2 - q_0^2} \times \\ \times A^{tt}(\vec{q}, \vec{q}_0) d\vec{q}' + \int \frac{V(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) A^{ht}(\vec{q}', q_0)}{q'^2 - \Delta^2 - q_0^2} d\vec{q}' \quad (65)$$

$$A^{ht}(\vec{q}, \vec{q}_0) = 2\pi^2 V^{ht}(\vec{q}, \vec{q}_0 | q_0) + \\ + \int \frac{V^{ht}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) A^{tt}(\vec{q}', \vec{q}_0) d\vec{q}'}{q'^2 - q_0^2} + \\ + \int \frac{V^{hh}(\vec{q}, \vec{q}' | q_0) A^{ht}(\vec{q}', \vec{q}_0) d\vec{q}'}{q'^2 + \Delta^2 - q_0^2}$$

3. Учет изотопических переменных

Формулы, полученные в предыдущем разделе должны быть дополнены с учетом спиновых и зарядовых переменных. Предварительно напомним, каким образом из данных по рассеянию нуклонов на ядрах He^3 и H^3 можно извлечь информацию о взаимодействии с определенным изотопическим спином. Экспериментальная информация по взаимодействию нуклонов с трехчастичными ядрами заключается в угловом распределении и

поляризации нуклонов в реакциях упругого рассеяния pt, ph, nt, nh и перезарядки $pt \rightarrow hh; hh \rightarrow pt$.

Вместо 4-х состояний pt, ph, nt и nh можно рассмотреть состояния $|T\Gamma_2\rangle$ с определенным изотопспином и его проекцией на ось Z в изотопическом пространстве:

$$|0,0\rangle = \frac{|pt\rangle - |hh\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$|1,\downarrow\rangle = ph$$

$$|1,0\rangle = \frac{|pt\rangle + |hh\rangle}{\sqrt{2}} \quad |1,-1\rangle = nt$$

Если взаимодействие изотопически инвариантно, то амплитуда рассеяния равна

$$F = \frac{3 - \bar{T}_1 \bar{T}_2}{4} f_0 + \frac{1 + \bar{T}_1 \bar{T}_2}{4} f_1 \quad (2)$$

где f_0, f_1 — амплитуды рассеяния в состояниях с $T=0, T=1$

Множители перед f_0 и f_1 есть обычные проекционные операторы. Используя (1), (2) легко получить что

$$\frac{d^2}{d\Omega} (pt \rightarrow pt) = \frac{d^2}{d\Omega} (hh \rightarrow hh) = \frac{1}{4} Sp \frac{1}{2} (f_0 f_1^+ + f_1 f_0^+) \quad (3)$$

$$+ f_1 f_1^+ + f_0 f_1^+ + f_1^+ f_0) \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{d\Omega} (ph \rightarrow ph) = \frac{d^2}{d\Omega} (nt \rightarrow nt) = \frac{1}{4} Sp (f_1^+ f_1^+) \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{d\Omega} (pt \rightarrow nh) = \frac{d^2}{d\Omega} (hh \rightarrow pt) = \frac{1}{4} Sp \frac{1}{2} (f_0 f_0^+ + f_1 f_1^+ - f_0 f_1^+ - f_1 f_0^+) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4} Sp \frac{1}{2} (f_0 f_0^+ + f_1 f_1^+ - f_0 f_1^+ - f_1 f_0^+)$$

где $\Psi_{ijk}^{(a)}$ ($a=1,2,3$) координатные, Φ^a - спин-изоспиновые функции. Индексы у функций Φ^a указывают, по какому представлению группы S_3 - симметричному, антисимметричному или смешанному преобразуются эти функции при перестановках. Во избежание недоразумений подчеркнем, что индекс a у функций $\Psi_{ijk}^{(a)}$ не связан с трансформационными свойствами этих функций при перестановках. Определенными трансформационными свойствами обладают лишь функции $\Psi_{ijk}^{(b)}$, через которые выражается полностью антисимметричная функция связанного состояния 3-х частиц.

$$\Psi_{ijk} = -\Psi_{ijk}^{(s)} \Phi^a + \Psi_{ijk}^{(a)} \Phi^s + \Psi_{ijk}^{(1)} \Phi^2 - \Psi_{ijk}^{(2)} \Phi^1 \quad (8)$$

Функции $\Psi_{ijk}^{(a)}$ линейным образом выражаются через $\Psi_{ijk}^{(b)}$

$$\Psi_{ijk}^{(a)} = \Psi_{ijk}^{(s)(a)} + \Psi_{ijk}^{(1)(a)} + \Psi_{ijk}^{(2)(a)}$$

$$\Psi_{ijk}^{(a)} = \Psi_{ijk}^{(s)(a)} + \Psi_{ijk}^{(1)(a)} + \Psi_{ijk}^{(2)(a)} \quad (9)$$

$$\Psi_{ijk}^{(s)} = \Psi_{ijk}^{(s)(1)} - \frac{1}{2} [\Psi_{ijk}^{(s)(1)} + \Psi_{ijk}^{(s)(2)}] + \frac{\sqrt{3}}{2} (\Psi_{ijk}^{(s)(2)} - \Psi_{ijk}^{(s)(1)})$$

$$\Psi_{ijk}^{(1)} = \Psi_{ijk}^{(1)(1)} - \frac{1}{2} [\Psi_{ijk}^{(1)(1)} + \Psi_{ijk}^{(1)(2)}] - \frac{\sqrt{3}}{2} (\Psi_{ijk}^{(1)(2)} - \Psi_{ijk}^{(1)(1)})$$

Для 4-х частичного состояния с квантовыми числами

$S=T=0$ спиновые и изотопспиновые функции принадлежат к схемам Юнга

1	3
2	4

1	2
3	4

Спин-изоспиновые функции этого состояния обозначим через Φ^a

Множитель $1/4$ возникает при усреднении по спинам нуклонов и ядер ht . Аналогичные соотношения имеют место для дифференциальных сечений и поляризаций. Таким образом, сравнивая полные сечения взаимодействия nh или pt (ниже порога образования $d+d$) с реакциями (4) можно выделить вклад взаимодействия с $T=0$.

Отметим, что разница между f_0 и f_1 приводит, во-первых, к отличному от нуля сечению перезарядки, а во-вторых, делает различными сечения реакций $pt \rightarrow pt; nh \rightarrow nh$ с одной стороны и сечения $ph \rightarrow ph; ht \rightarrow hh$ с другой стороны.

Связь между различными сечениями, обусловленная изотопической инвариантностью, маскируется эффектами кулоновского взаимодействия, в частности, разницей масс h и t равной $0,765 \text{ MeV}$. Особенно велико влияние кулоновского взаимодействия при малых энергиях ($\approx 3 \text{ MeV}$) и при рассеянии на малые углы.

Отметим, что эксперимент указывает на значительное спинорбитальное расщепление: фазы с одинаковым $\pm \ell$ но с разными J сильно различаются. В нашем методе спинорбитальное взаимодействие получается при учете примеси D волн в волновой функции трития. Имея в виду рассмотрение состояния с $S=0$ мы будем пренебречь этой примесью.

Ниже получены простейшие уравнения для случая $S=T=0$

С учетом спиновых и изотопспиновых координат волновую функцию связанного состояния трех частиц с квантовыми числами $S=T=\frac{1}{2}$ запишем в виде

$$\Psi_{ijk}^{ij} = -\varphi_{ijk}^{i\delta(S)} \Phi^a + \varphi_{ijk}^{iS(a)} \Phi^{(s)} + \varphi_{ijk}^{ij(l)} \Phi^2 + \varphi_{ijk}^{i(l)} \Phi^1$$

($\alpha = s, a, 1, 2$). φ^s и φ^a преобразуются по симметричному и антисимметричному представлению группы Γ_2 по представлению S_4 . Матрицы этого представления равны:

$$P_{12} = P_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad P_{13} = P_{24} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_{14} = P_{23} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

С учетом спиновых и изотопспиновых переменных полосной член в амплитуде \tilde{T}_{ijk}^{ij} запишется в виде

$$\frac{1}{q_v^2 - q_e^2} \sum_{\lambda, \lambda'} |\tilde{f}_{ijk}^{ij}(\lambda \lambda')\rangle \langle \tilde{g}_{ijk}(\lambda \lambda')| \quad (II)$$

где суммирование производится по всем проекциям спина и изоспина трехчастичной подсистемы.

Волновая функция 4-х частиц равна

$$\underline{\Psi} = \sum_P (-1)^P P \underline{\Psi}(1234) \quad (I2)$$

$$\text{где } \underline{\Psi}(1234) = -\Psi^s(1234) + \Psi^a(1234) + \Psi'(1234) - \Psi^2(1234) \quad (I3)$$

Подставим выражения (7), (II), (I2), (I3) в уравнение () и выполним суммирование по $\lambda \lambda'$. Это суммирование легко выполнить с помощью формулы

$$\sum_{\lambda \lambda'} |\varphi^i\rangle \langle \varphi^k| \varphi^\ell = \delta_{k\ell} \varphi^i \quad (I4)$$

В результате получим

$$\Psi^a(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = \frac{f^\alpha(\vec{k}, \vec{p}) C(\vec{q})}{q_0^2 - \omega^2 - k^2 - p^2 - q^2} \quad (I5)$$

где $C(\vec{q})$ удовлетворяют уравнение Шредингера с потенциалом

$$V(\vec{q}, \vec{q}')|g_0\rangle = 3\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^3 \sum_\alpha C_\alpha \int \frac{d\vec{k} f^\alpha(\vec{k}, \vec{p}) [\Lambda_2 + \Lambda_3] g^*(\vec{k}, \vec{p}_1)}{\mathcal{D}(g_0)} \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \int d\vec{k} \frac{f^2(\vec{k}, \vec{p}) [\Lambda_2 - \Lambda_3] g'(\vec{k}, \vec{p}_2) - f'(\vec{k}, \vec{p}_1) [\Lambda_2 - \Lambda_3] g^2(\vec{k}, \vec{p}_1)}{\mathcal{D}(g_0)} \quad (I6)$$

$$C_S = C_A = 1; \quad C_1 = C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{q} + 3\vec{q}'}{2\sqrt{2}}, \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{q}' + 3\vec{q}}{2\sqrt{2}}$$

Как известно, с хорошей точностью связное состояние тритона описывается функциями f^S и f^2 ($f^a = f' = 0$), причем $|f^S| \gg |f^2|$. В этом случае второй член в (I6) равен нулю, а первый равен

$$3\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^3 \int d\vec{k} \frac{f^S(\vec{k}, \vec{p}) [\Lambda_2 + \Lambda_3] g^S(\vec{k}, \vec{p}_1)}{\mathcal{D}(g_0)} - \frac{1}{2} f^2(\vec{k}, \vec{p}_1) [\Lambda_2 + \Lambda_3] \\ \times g^2(\vec{k}, \vec{p}_2) \quad (I6)$$

Мы видим, что в выражении для потенциала симметричная функция не интерфеcирует с функцией смешанной симметрии. Попутно отметим, что учет функции смешанной симметрии приводит к ослаблению потенциала.

Приведем примеры простейших феноменологических функций титонов.

Функция Ирвинга.

В координатном пространстве

$$\Psi(\rho) \approx e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\rho}$$

В импульсном пространстве

$$\Psi(u) = \frac{45\alpha^4}{4} \sqrt{\frac{3}{10\pi^3}} \frac{1}{(u^2 + \frac{3}{4}\alpha^2)^{\frac{7}{2}}}$$

Гауссовская функция

$$\Psi(\rho) \approx e^{-\frac{3}{2}\alpha^2\rho^2}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{3\alpha^3\sqrt{3\pi^3}} e^{-\frac{u^2}{6\alpha^2}}$$

Значения α определяются из электромагнитных формфакторов трития и равны 1.27 для функции Ирвинга и 0.384 для гауссовой функции.

Результаты расчетов приведены в таблице

E/mev	0,00	0,003	0.3	0.4	0.6	2.0	7.0
$K \operatorname{ctg} \delta$	34,56	-3,753	-2,929	-2,469	-0,900	-0,362	
$\delta(E)$		178,17	177,28	176,07	160,97		

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящих лекциях сформулирован математический аппарат для расчета ядерных реакций вблизи порога на основе интегральных уравнений для системы многих нуклонов. Рассмотренные интегральные уравнения хотя и не являются с математической точки зрения столь же хорошими, как уравнения Якубовского (в том смысле, что для них не доказана эквивалентность уравнению Шреденгера), но обладают большой простотой и легко могут быть использованы в физических расчетах. Кластерная структура уравнений позволяет легко видеть, какие члены в уравнениях должны быть учтены в качестве первого приближения в различного рода двухкластерных ситуациях. Формулы для любых квазидвухчастичных процессов могут быть получены непосредственным обобщением результатов приведенных выше. В настоящее время опыт работы с такими уравнениями весьма невелики. Можно ожидать, однако, что в ближайшее время в этом направлении будут получены новые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Ситенко, В.Ф. Харченко УФН, 103, 469, 1971
2. А.И.Базь, В.И.Гольданский, Я.Б.Зельдович. УФН 35, 445, 1965.
3. P.E. Argan et al. Nuovo Cimento, Suppl. 3 №2 245, 1965
4. T. Lauritsen and F. Ajzenberg-Selov Nucl.P. 78, I, 1966
5. W.E. Meyerhof, T.A. Tombrello. Nucl.Phys. A109, 1, 1968
W.E. Meyerhof. Second Problem Symposium on
Nuclear Physics, Novosibirsk, USSR, June 12, 1970
6. Proc. of the Int. Conf. on clustering phenomena
in nuclei, Bochum, Germany, 1969
7. И.М.Народецкий, О.А.Якубовский. Препринт ИТЭФ № 814,
ЯФ, 13, № 2, 1971г.
8. A. Baz. Phil. Mag., Suppl., "Advances in Phys."
8, 349, 1959
9. А.И.Базь, В.И. Манько ЯФ 10, 78, 1969
10. А.И.Базь, Материалы 4-й зимней школы ФТИ им Иоффе
Ленинград, т.1, 73, 1969 г.
11. Г.В.Скорняков, К.А.Тер-Мартиросян, ДЭТФ, 31, 775, 1956
12. Л.Д.Фаддеев, ЖЭТФ, 39, 1459, 1960; Труды МИАН, 63, 1963
13. О.А.Якубовский, ЯФ, 5, 1312, 1967
14. S. Weinberg. Phys. Rev. 133, 232, 1963
15. L. Rosenberg. Phys. Rev. 140, B217, 1965
J. Weyers. Phys. Rev. 145, 1236, 1966
Y. Takahashi, N. Mishima. Progr. Theor. Phys.
34, 498, 1965
- C. Ian Winter. Kgl. Danske Videnskab. Saltskab.
Nat-Eys. Skrifter 2, №8, 1964, 2 №10, 1964

A.N. Mitra, J. Gillispie, R. Sugar, N. Pancajuren. Phys. Rev. 140, B 1336, 1965

- I6. R. Omnes. Phys. Rev. 165 I65, 1265, 1968.
I7. P. Eederbush. Phys. Rev. I48, 1551, 1966.
I8. W. Hunziker. Helv. Phys. Acta 39, 451, 1966.
I9. K. Hepp. Helv. Phys. Acta, 42, 425, 1969.