

539.1
B 85

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г. И. Кузнецов, Ю. А. Данилов

Всесоюзная школа по теоретической
деревней физике, XII Я

**ТОПОЛОГИЯ
В ФИЗИКЕ**

3. ИЮЛ 1985

МОСКВА 1981

539.1

В 85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

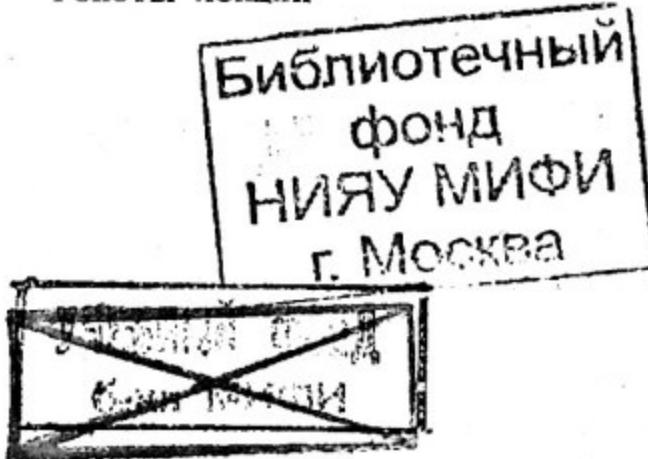
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г.И. Кузнецов, Ю.А. Данилов

Всесоюзная школа по коротковолновой
радиофизике, XII я

ТОПОЛОГИЯ
В ФИЗИКЕ

Тексты лекций



Москва 1981

Кузнецов Г.И., Данилов Ю.А. Топология в физике. —
Тексты лекций. — М.: Изд. МИФИ, 1981, 28 с.

Даются основные понятия теории гомотопии и гомологии, необходимые для исследования нелинейных уравнений и фейнмановских диаграмм. Рассмотрены некоторые решения нелинейных уравнений как топологических структур. Изучены особенности (пороговые, полюсные) фейнмановских диаграмм. Рассмотрена особая разновидность графов (деревья) теории угловых моментов и теории множественного рождения частиц.



Московский инженерно-физический институт, 1981 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость использования топологических методов в решении физических задач убедительно аргументирована, например, в лекциях [1]. Резюмируя суть изложенных в этих лекциях доводов, можно сказать, что топология необходима, во-первых, для восполнения дефицита квантовых чисел топологическими инвариантами многообразий, изучаемых в рассматриваемой теории и, во-вторых, для получения решений основных уравнений теории или их наиболее существенных характеристик.

Если оставить в стороне сложный алгебраический аппарат топологии, то выяснится, что в основе ее лежит понятие непрерывности. Ф. Клейн в "Эрланенской программе" определил геометрию, как науку об инвариантах движений. Следуя клейновскому определению, топологию можно определить, как науку об инвариантах взаимно-однозначных и взаимно-непрерывных преобразований, называемых гомеоморфными преобразованиями, или гомеоморфизмами. Два многообразия топологически эквивалентны, если одно из них переходит в другое под действием гомеоморфизма. Например, окружность и любая замкнутая кривая без самопересечений, сколь бы причудливой ни была ее форма, топологически эквивалентны, или гомеоморфны (рис.1). Кофейная чашка гомеоморфна бублику (что породило шутливое замечание о том, будто топологи — это математики, не умеющие отличать кофейную чашку от бублика).

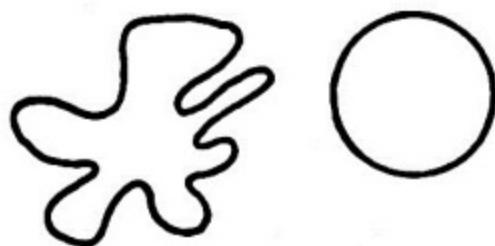


Рис. 1

Наглядно топологические преобразования можно представить как преобразования, производимые над многообразиями, выполненными из податливой, легко растяжимой, но прочной резины. Топологичность преобразования означает отсутствие разрывов и склеиваний.

Сфера с выколотой точкой гомеоморфна плоскости, а поскольку гомеоморфность — отношение симметричное (и является теоретико-множественным отношением эквивалентности), то плоскость гомеоморфна сфере с выколотой точкой. Гомеоморфизм между плоскостью и проколотой сферой можно задавать многими способами, в частности, при помощи стереографической проекции (рис. 2). Если выколотую точку считать северным полюсом единичной сферы, а плоскость совместить с касательной плоскостью к сфере, проходящей через южный полюс, то стереографическая проекция сопоставляет точке $P(\xi, \zeta)$ на поверхности сферы точку $M(x, y)$ на плоскости, где

$$x = \frac{\xi}{\xi - \zeta}, \quad y = \frac{\zeta}{\xi - \zeta}.$$

Формулы, которые понадобятся

нам в дальнейшем, представляют собой обобщение этих формул на случай сферы в четырехмерном пространстве с касательным трехмерным пространством.

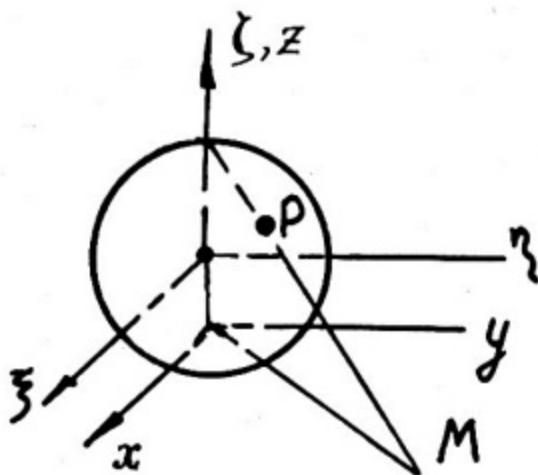


Рис. 2

Важным топологическим инвариантом поверхности (или многообразия) является так называемая эйлерова характеристика, по существу представляющая собой далеко идущее обобщение знаменитой теоремы Эйлера о многограннике. По этой теореме для всякого многогранника, поверхность которого гомеоморфна сфере, а каждая грань гомеоморфна кругу (например, для любого из пяти правильных платоновых тел), справедливо соотношение

$$B - P + F = 2,$$

где B — число вершин, P — число ребер и F — число граней.

Для поверхности, гомеоморфной сфере с ρ ручками и q дырами, согласно обобщенному варианту теоремы Эйлера справедливо соотношение

$$V - P + F = 2 - 2\rho - q.$$

Число $\chi = 2 - 2\rho - q$ называется эйлеровой характеристикой поверхности и сохраняется при топологических преобразованиях (гомеоморфизмах). Для самой сферы (с $\rho = 0$ ручками и $q = 0$ дырами) $\chi = 2 - 2 \cdot 0 - 0 = 2$, для плоскости (сферы с $\rho = 0$ ручками и $q = 1$ дырой) $\chi = 2 - 2 \cdot 0 - 1 = 1$ и для тора (сферы с $\rho = 1$ ручкой и $q = 0$ дырой) $\chi = 2 - 2 \cdot 1 - 0 = 0$.

Эйлерова характеристика многообразия тесно связана с качественной теорией динамических систем на нем. Рассмотрим на многообразии непрерывное векторное поле. Выбрав произвольную точку на многообразии, проведем вокруг нее замкнутый контур. В каждой точке контура задан вектор поля. При обходе контура векторы, "приложенные" к нему, успевают совершить целое число оборотов (по окончании обхода вектор совпадает с исходным), быть может, равное нулю. Это число называется индексом точки и сохраняется при гомеоморфизмах. Индекс регулярной точки равен нулю, индекс особой точки отличен от нуля. Для непрерывных векторных полей на многообразиях справедлива теорема, связывающая характер и число особых точек с эйлеровой характеристикой многообразия: сумма индексов всех особых точек непрерывного векторного поля на многообразии равна эйлеровой характеристике многообразия. Из этой теоремы следует, что невозможно задать на данном многообразии произвольное векторное поле, "не согласованное" с топологической структурой многообразия. Например, так как индексы особых точек аналитической функции отрицательны, а эйлерова характеристика сферы равна двум, то на комплексной сфере нельзя задать аналитическую функцию, отличную от постоянной. Эта теорема (и ее обобщения на бесконечномерный случай) находит применение в теории дифференциальных, интегральных уравнений и в физике [2 – 5]. Иногда ее формулируют в виде теоремы о еже, или причесывании многообразий: сферу нельзя причесать гладко (по крайней мере, два волоса всегда будут торчать, так как для сферы $\chi = 2$), тор можно причесать гладко, уложив волосы, например, по касательным к параллелям (или меридианам), так как для тора $\chi = 0$.

Многообразия (и не только многообразия) иногда удобно задавать в виде так называемых топологических произведений. Множество Z называется топологическим произведением множеств X и Y , если Z — множество всевозможных пар (x, y) , где $x \in X, y \in Y$ и точка (x, y) считается близкой множеству $N \subset Z$, если для любой окрестности точки x в X и любой окрестности точки y в Y найдутся соответственно точки u и v , такие, что $(u, v) \in N$. Например, плоскость — топологическое произведение двух прямых, тор — топологическое произведение двух окружностей, а сфера — не топологическое произведение окружности на отрезок (из-за сгущения меридианов вблизи полюсов нарушается однозначность).

Важной характеристикой каждого многообразия, рассматриваемого как топологическое пространство, является его фундаментальная группа, которая определяется следующим образом.

Выделим на многообразии любые две точки A и B и рассмотрим какой-нибудь путь S , ведущий из A в B . Непрерывно деформируя S , мы будем получать семейство путей, ведущих из A в B . Если путь S_2 получен из пути S_1 непрерывной деформацией, то пути S_1 и S_2 гомотопны ($S_1 \sim S_2$) (гомотопия — теоретико-множественное отношение эквивалентности: каждый путь гомотопен самому себе; если $S_1 \sim S_2$, то $S_2 \sim S_1$; если $S_1 \sim S_2$ и $S_2 \sim S_3$, то $S_1 \sim S_3$). В круге любые два пути гомотопны. В кольце $S_1 \sim S_2$, но каждый из путей S_1 и S_2 не гомотопен пути S_3 (рис. 3).

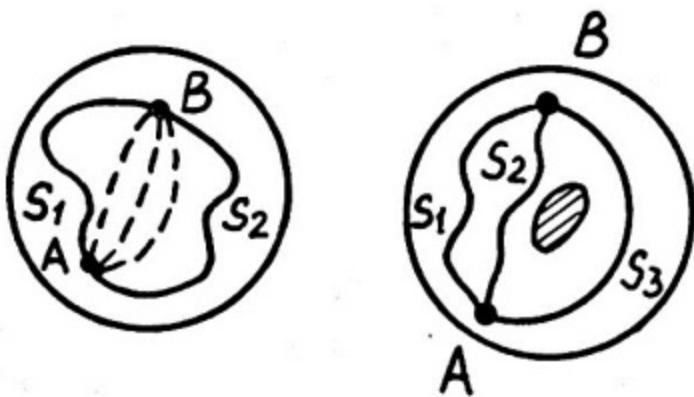


Рис. 3

Множество всех путей на многообразии можно разбить на непересекающиеся классы гомотопных путей.

Если путь S_1 ведет из A в B , а путь S_2 ведет из B в C , то сквозной путь S_3 , ведущий из A в C , составленный из S_1 и S_2 , называется произведением путей S_1 и S_2 . Умножение (последовательное прохождение путей) можно считать заданным на классах гомотопных путей: класс гомотопных путей произведения не зависит от выбора представителей классов гомотопных путей — сомножителей.

Множество классов гомотопных путей образует группу относительно умножения путей, называемую фундаментальной группой пространства. Единичным элементом фундаментальной группы является класс путей, стягиваемых в точку. Элементом, обратным данному, считается путь, проходимый в обратном направлении. Умножение классов гомотопных путей ассоциативно, т.е. $a(bc) = (ab)c$, но, вообще говоря, не коммутативно, т.е. $ab \neq ba$.

При построении фундаментальной группы мы исходили из некоторой произвольно выбранной начальной точки. Изменив начальную точку, получим фундаментальную группу, изоморфную первой. Более того, если связные многообразия гомеоморфны, то их фундаментальные группы изоморфны. Следовательно, фундаментальная группа — топологический инвариант топологического пространства.

Фундаментальные группы не гомеоморфных многообразий (пространств) не изоморфны.

В круге все пути гомотопны. Следовательно, фундаментальная группа круга тривиальна, т.е. состоит только из одного единичного элемента.

Фундаментальная группа сферы также тривиальна: любой путь на поверхности сферы непрерывной деформацией можно перевести в гладкий путь, не заполняющий всей сферы. Выколоть любую точку сферы, не принадлежащую гладкому пути, получим пространство, гомеоморфное внутренности круга, фундаментальная группа которого тривиальна, а фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.

Тривиальна также и фундаментальная группа плоскости, так как плоскость гомеоморфна сфере с выколотой точкой, а такая сфера обладает тривиальной фундаментальной группой.

Фундаментальная группа тора не тривиальна: это — свободная абелева группа с двумя образующими.

Помимо фундаментальной группы многообразия обладают важными топологическими инвариантами, которые называются группами гомологии.



Рис. 4

Замкнутую ориентированную кривую на многообразии (или поверхности, не являющейся многообразием) или комбинацию таких кривых назовем циклом. Например, параллель и меридиан на поверхности тора — циклы. Объединение их "меридиан + поверхность" — также цикл (рис. 4). Более того, любая комбинация из m раз пройденного меридиана и k раз пройденной параллели также образует цикл на поверхности тора.

Если разрезать поверхность по циклу, то поверхность либо распадется на куски (ограничивающий цикл), либо превратится в свою развертку, состоящую из одного куска (не ограничивающий цикл). Например, на плоскости и на сфере каждый цикл — ограничивающий; на торе есть как ограничивающие, так и не ограничивающие циклы.

Два цикла будем считать несущественно отличающимися, если взятые вместе они образуют ограничивающий цикл. Например, на поверхности тора два меридиана, проходящие в противоположных направлениях, отличаются несущественно (рис. 5). Два несущественно отличающихся цикла называются гомологичными, а все ограничивающие циклы — гомологичными нулю. Таким образом, циклы гомологичны, если отличаются на цикл, гомологичный нулю. Множество циклов на каждой поверхности допускает разбиение на непересекающиеся классы гомологичных циклов (гомологичность — теоретико-множественное отношение эквивалентности). Классы гомологичных циклов образуют группу по сложению, называемую группой гомологий данного многообразия.



Рис. 5

Группа гомологий сферы и плоскости тривиальна, так как состоит только из "одного класса циклов, гомологичных нулю. Группа гомологий тора не тривиальна. Это — свободная (т.е. не имеющая определяющих соотношений) абелева (коммутативная) группа с двумя образующими (меридианом и параллелью).

2. СОЛИТОНЫ И ИНСТАНТОНЫ КАК ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

В этой части рассмотрим нелинейные уравнения синус-Гордон (вывод которого мы сделаем на примере простой механической модели) и Янга — Миллса (ρ^3) и покажем, как образуются топологические структуры в фазовом пространстве и как знание таких структур позволяет находить решения соответствующих уравнений.

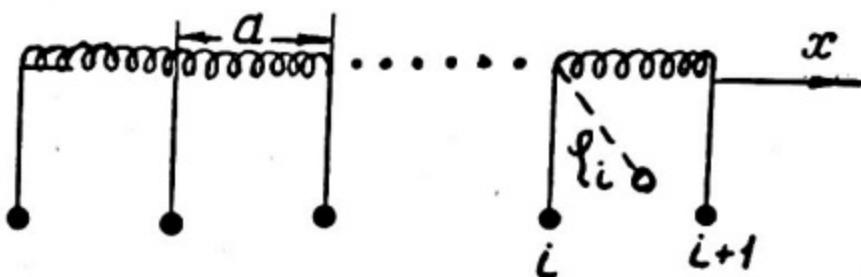


Рис. 6

1. Уравнение синус-Гордон. Пусть имеется линейная система, состоящая из N эквидистантно расположенных одинаковых маятников, находящихся в поле тяжести и соединенных упругими пружинами (рис. 6). Выражение для энергии такой системы, а следовательно, и лагранжиан, написать довольно просто:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left\{ I \dot{\varphi}_i^2 - mg\ell(1 - \cos \varphi_i) - \frac{1}{2}k(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right\}; \quad (2.1)$$

здесь I , m , ℓ , φ_i — момент инерции, масса, длина, угол отклонения i -го маятника, k — константа кручения пружин.

ны. Лагранжев формализм дает нам конечно-разностное дифференциальное уравнение

$$I \ddot{\varphi}_i = K(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) - mg\ell \sin \varphi_i. \quad (2.2)$$

Система, получившая какое-либо возмущение, будет иметь, в конце концов, на $\pm \infty$ отклонение, равное нулю, в противном случае необходима бесконечная энергия для поддержания конечных отклонений незакрепленных концов. Итак, $\varphi(\pm \infty) = 0 (\text{mod } 2\pi)$, поэтому можно образовать окружности, склеив концы ($\varphi_{-1} = \varphi_N$ и $\varphi_{N+1} = \varphi_1$). Переходя в (2.2) к непрерывному пределу и безразмерным переменным, получаем

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Рассмотрим решение уравнения

$$\varphi_{xx} = \sin \varphi, \quad (2.4)$$

т.е. (2.3) с $\varphi_{tt} = 0$, что эквивалентно переходу к переменной $\xi = x - vt$. Умножая (2.4) на φ_x и интегрируя по $d\varphi$, находим солитонное решение:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} = e^x. \quad (2.5)$$

Поскольку физические свойства системы эквивалентны по модулю 2π , то линии 2π и 0 на фазовой плоскости φ, x необходимо склеить (это дает цилиндр), а отождествление $\pm \infty$ дает тор. Таким образом, решение (2.5) уравнения (2.4) есть обмотка на торе рис. 7. Стабильность такого типа решений есть топологическая стабильность, а сами решения — топологические солитоны.



Рис. 7

2. Уравнение Янга — Миллса. В настоящее время работами Де Витта, Фейнмана, Фаддеева, Попова, Вельтмана, Тоофта теория янг-миллсовских полей поставлена на уровень квантовой электродинамики. Здесь рассмотрим лишь свободное уравнение Янга — Миллса в евклидовом пространстве:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \partial_\nu F_{\mu\nu} + [A_\nu, F_{\mu\nu}] = 0, \quad (2.6)$$

где, как обычно,

$$A_\mu = \frac{e A_\mu^\alpha \tau^\alpha}{2i}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{e F_{\mu\nu}^\alpha \tau_\alpha}{2i};$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

τ^α — матрицы Паули группы $SU(2)$, причем при $|x| \rightarrow \infty$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow 0, \quad A_\mu(x) \sim g^{-1}(x) \partial_\mu g(x). \quad (2.7)$$

Таким образом, поля $A_\mu(x)$ при $x \rightarrow \infty$ определяются лишь калибровкой $g(x)$, которая имеет значения на групповом многообразии $SU(2)$, являющемся трехмерной сферой S^3 . Из формулы (2.7) видно, что $A_\mu(x)$ принадлежат $S^3 \times S^3 \rightarrow S^n$ (S^n — n -мерная сфера в $(n+1)$ -мерном пространстве). Заметим также, что лагранжиан Янга-Миллса конформно инвариантен. Поэтому можно перейти от евклидова пространства R^4 к сфере S^4 , рассмотрев R^4 как стереографическую проекцию S^4 . А так как $A_\mu(x)$ — функция со значениями в $S^3 (S^3 \subset S^4)$, то, используя формулы стереографического проектирования, сразу можем написать:

$$A_\mu(x) \sim \frac{x_\mu}{x^2 + x_5^2}, \quad x^2 = \sum_{\mu=1}^4 x_\mu^2. \quad (2.8)$$

Действительно, такое решение допускает уравнение (2.6), которое находится при помощи подстановки

$$A_\mu(x) = i G_{\mu\nu} \partial_\nu \log \rho(x), \quad (2.9)$$

где $G_{\mu\nu}$ — генераторы группы O_4 , построенные из матриц Паули σ^i ;

$$G^{\mu\nu} = \frac{\gamma^{i\mu\nu} G^i}{2}, \quad \gamma^{i\mu\nu} = -\gamma^{i\nu\mu} = \begin{cases} \delta^{i\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3, \\ 0^{i\mu\nu}, & \nu = 4. \end{cases}$$

Для $\rho(x)$ получается нелинейное (ρ^3) уравнение

$$\partial_\mu^2 \rho(x) = c \rho^3(x). \quad (2.10)$$

Первое решение было получено Белавиным, Поляковым, Шварцем, Тюпкиным [6]:

$$\rho = \frac{1}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}, \quad A_\mu(x) = -\frac{2i\beta_{\mu\nu}(x - \alpha)_\nu}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}, \quad (2.11)$$

a_μ, λ – произвольные пять параметров. Это и есть инстантон.

3. К ИССЛЕДОВАНИЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФЕЙНМАНОВСКИХ АМПЛИТУД ГОМОЛОГИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

3.1. Введение

Фейнмановские интегралы представляют собой новый класс специальных функций, для которых в отличие от классических специальных функций мы не имеем дифференциальных уравнений, представлений при помощи рядов и не знаем связей с представлениями классических групп, и аналогичны связям гиперсферических функций, функций Бесселя, полиномов Эрмита с группами вращений, трансляций, унитарными группами.

Французские физики Фам, Фруассар, Ласку и Фотиади предложили исследовать аналитические свойства фейнмановских интегралов гомологическими методами. Новый метод заменяет громоздкие аналитические выкладки изучением топологических характеристик дополнения. Хотя изложение гомологической техники можно найти в книгах Фама [7], Хуа и Тэплица [8], а теорию гомологий в книге Хилтона и Уайли [9], тем не менее тео-

рия гомологий остается пока еще экзотической среди физиков. И дело здесь не в лени, а в том, что многие вопросы, в частности, не простые "пинчи", требуют своего детального изучения, описания и развития.

Сформулируем основные определения и перечислим факты, необходимые для понимания дальнейшего. При этом мы, разумеется, пренебрегаем строгостью, необходимой для математических работ, и ограничиваемся, по возможности, наглядными представлениями.

Рассмотрим выпуклый n -мерный полиэдр Δ^n и снабдим его ориентацией \mathcal{E} , т.е. упорядочим определенным образом множество его вершин. Ориентацию любой из его $(n-1)$ -мерных граней будем выбирать так, чтобы она была согласована с \mathcal{E} . Для этого вычеркнем из упорядоченного (в соответствии с \mathcal{E}) полного набора вершин Δ^n те, которые не принадлежат рассматриваемой грани. Оставшиеся вершины зададут в ней индуцированную ориентацию (согласованную с \mathcal{E}). Переход от ориентированного полиэдра Δ^n к сумме всех его $(n-1)$ -мерных граней, снаженных индуцированными ориентациями, назовем взятием границы и будем обозначать его символом ∂ .

Элемент n -мерной цепи \mathcal{G} определим как n -мерный выпуклый ориентированный полиэдр Δ^n . Сумма конечного числа таких элементов, взятых с целыми коэффициентами, называется n -мерной цепью γ :

$$\gamma = \sum_{i=1}^k n_i \mathcal{G}_i.$$

Граница цепи $\partial(\gamma)$ определяется по формуле

$$\partial\gamma = \sum_{i=1}^k n_i \partial(\mathcal{G}_i).$$

Доказывается, что $\partial^2 \mathcal{G} = 0$ для любой цепи \mathcal{G} . Цепь с нулевой границей называется циклом:

$$\partial C = 0.$$

Например, рассмотрим плоскость с дыркой (рис. 8). Цепи C_1, C_2, C_3 — циклы. Цепь $C_1 + C_2$ не является циклом, поскольку содержит границы α, β . Сумма $C_2 + C_3$ — цикл, дважды окружающий отверстие. Разность $C_2 - C_3$ является границей кольцевой площадки между ними. Два цикла называются гомологичными (эквивалентными) друг другу, если их разность является границей. Цикл C_2 гомологичен циклу C_3 :

$$C_2 \sim C_3.$$

Может случиться так, что некоторая n -мерная цепь A служит границей $(n+1)$ -мерной цепи B :

$$A = \partial B.$$

В этом случае цепь A называется точной. Точная цепь всегда имеет нулевую границу:

$$\partial A = \partial(\partial B) = \partial^2 B = 0$$

и, следовательно, является циклом.

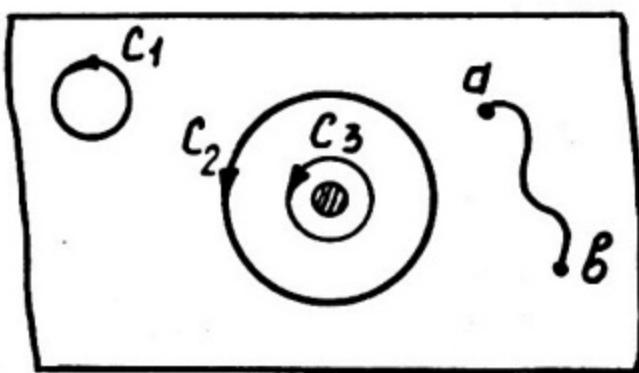


Рис. 8

Циклы размерности n (сокращенно n -циклы) можно умножать на целые числа и складывать. Они образуют абелеву группу Z_n (группу n -циклов). Множество точных цепей образует в Z_n подгруппу границ B_n . Фактор-группа $H_n = Z_n / B_n$ называется n -мерной группой гомологий рассматриваемого пространства. Если пространство K -мерно, то n может принимать значения от 0 до K . Факторизация по границам — это выключение из игры циклов типа C_1 . Нас будут интересовать группы относительных гомологий. Это означает, что разбивая циклы на классы, будем считать эквивалентными (гомологичными) не только такие циклы, разность которых служит границей цепи на единицу большей размерности, но и циклы, разность которых принадлежит некоторым выделенным многообразиям (в данном случае поверхностям Ландау; см. рис. 9). Так как $L \subset K$, то $C_p(L) \subset C_p(K)$. Относительная группа цепей $C(K, L)$ для K по модулю L определяется следующим образом:

$$C_p(K, L) = \frac{C_p(K)}{C_p(L)}.$$

Группа относительных циклов $H_p(K, L)$ определяется как

$$H_p(K, L) = \frac{Z_p(K, L)}{B_p(K, L)}.$$

$Z_p(K, L)$ и $B_p(K, L)$ показаны на рис. 10.

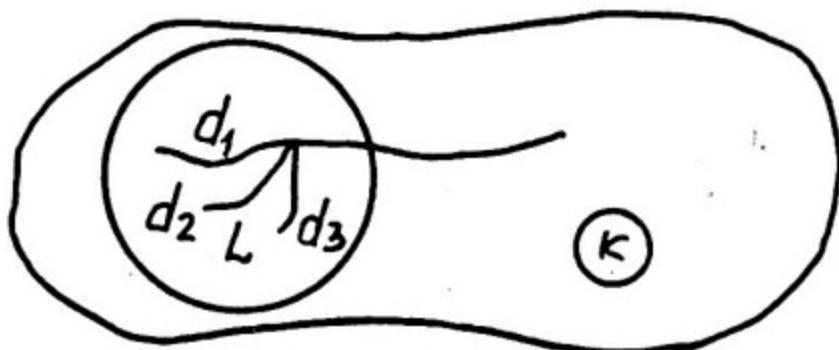


Рис. 9

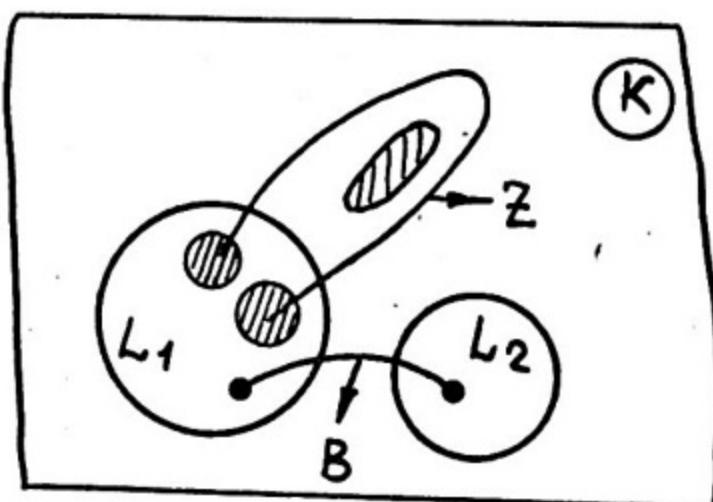


Рис. 10

Помимо граничного оператора ∂ , понижающего размерность цепи на единицу, нам понадобится так называемый кограничный оператор ∂^* , повышающий размерность на единицу. Наглядно действие ∂^* можно представить следующим образом. Если ℓ — одномерная цепь (ориентированная прямая), то ∂^* сопоставляет ей поверхность кругового цилиндра, ось которого совпадает с ℓ , а ориентация в любом поперечном сечении (направление обхода) образует с ориентацией ℓ правый винт. Оператор ∂^* позволяет значительно упростить вычисление групп гомологий (теорема Фруассара). Введенные выше понятия оказываются весьма естественными для качественного описания свойств интегралов от функций многих комплексных переменных.

Какие из особенностей подынтегральной функции могут стать особенностями интеграла? Известно, что для осуществления такой возможности многообразия особенностей должны зажать цепь, по которой производится интегрирование ("пинч"), а некоторые из циклов (они называются исчезающими) должны стянуться в точку. Информацию о возможных сингулярностях интеграла мы получим, изучив пересечения цепи интегрирования с исчезающими циклами в терминах так называемых индексов Кронекера, или индексов пересечения.

Пусть M_1 и M_2 — два ориентированных многообразия размерности k и ℓ в N -мерном (для простоты, евклидовом) пространстве, пересекающиеся лишь в конечном числе точек. Размерности k и ℓ удовлетворяют равенству $k + \ell = N$. В каждой из точек пересечения M_1 и M_2 находятся в общем положении, т.е. касательные гиперплоскости, проведенные к ним в точке пересечения, нигде более не пересекаются. Если M_1 и M_2 — одномерные кривые на плоскости, то общее положение для них означает, что в точке пересечения касательные (а следовательно, и нормали) не коллинеарны.

Будем говорить, что во всех точках пространства заданы стандартные согласованные реперы, если от одного из них к другому можно перейти при помощи параллельного переноса и однородного линейного преобразования с положительным определителем. Рассмотрим подокрестности U_1 и U_2 точки пересечения O , лежащие в M_1 и M_2 . Пусть $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ — набор из k линейно независимых векторов, касательных к M_1 в точке O , определяющий в U_1 ориентацию, согласующуюся с заданной (многообразия M_1 и M_2 ориентированы). Далее, пусть $\{V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_N\}$ — набор из ℓ линейно

независимых векторов, касательных к M_1 в точке O , определяющий в U_2 ориентацию, согласованную с заданной. Поскольку M_1 и M_2 в точке O находятся в общем положении, объединение наборов $\{V_1, V_2, \dots, V_k, V_{k+2}, \dots, V_n\}$ задает репер во всем пространстве. Если этот репер согласуется со стандартным в точке O , то индекс Кронекера KI в точке O равен +1, в противном случае $KI = -1$. Если M_1 и M_2 в данной точке не пересекаются, то KI , по определению, полагается равным нулю. Индекс Кронекера полного пересечения (состоящего, по определению, из конечного числа точек) равен сумме индексов в отдельных точках. Зная индексы Кронекера KI для пересечения цепи интегрирования с исчезающими циклами, при помощи теоремы Пикара — Леффшера можно ответить на вопрос о том, что происходит с цепью интегрирования при обходе того или иного особого многообразия.

3.2. Простейшие интегралы

Известно, что интегралы Фейнмана суть интегралы от рациональных функций $R(\rho, q) = P(\rho, q)/Q(\rho, q)$, где P и Q — некоторые полиномы. Причем $Q(\rho, q)$ обычно представляется произведением функций типа $q_i^2 - m_i^2$. В этой связи нам кажется целесообразным понять сущность гомологического метода на простом примере.

Рассмотрим функцию $F(t)$, определяемую интегралом

$$F(t) = \int_a^\beta \frac{dx}{x^2 - t},$$

где $\beta > \alpha > 0$. Изучим ее аналитические свойства: а) прямым интегрированием, б) методом деформации контура, в) при помощи гомологического метода.

a)

$$F(t) = \int_a^\beta \frac{dx}{x^2 - t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \ln \frac{(\alpha + \sqrt{t})(\beta - \sqrt{t})}{(\alpha - \sqrt{t})(\beta + \sqrt{t})}, \quad (3.1)$$

при $t = \alpha^2, \beta^2$ — логарифмические точки ветвления. Точка $t=0$ является корневой точкой ветвления на всех листах римановой поверхности, за исключением главного листа логарифма.

ма. Действительно, при малых $|t|$ в выражении (3.1) $\ell_n(\dots) = 2(\alpha^{-1} - \beta^{-1})\sqrt{t} + 2\pi i n$, где $t = |t|e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, n — целое число, $n=0$ — главный лист логарифма.

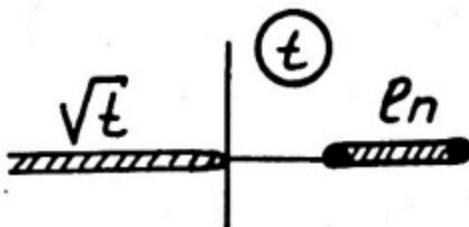


Рис. 11

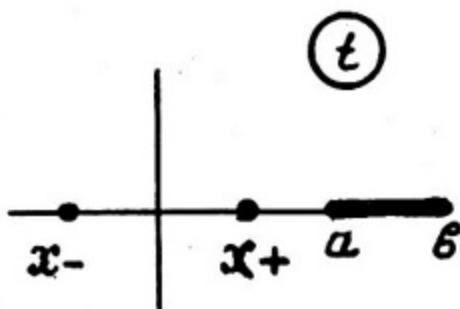


Рис. 12

б) При $0 < t < \alpha$ для получения главной ветви интегрируем по прямой (рис. 11). Когда $t \rightarrow 0$, то x_+, x_- , равные $x_t = \pm \sqrt{t}$, совмещаются, не зажимая контур ab (рис. 12). Следовательно, на рассматриваемом листе сингулярность типа квадратного корня не появляется. Если же t брать по пути A (рис. 13), то контур ab превращается в C_A (рис. 14 и 15), и мы выходим на второй лист логарифма. При $t \rightarrow 0$ здесь уже есть "пинч".

Если продолжить t по пути B (рис. 16), то контур от положения C_A переходит к положению C_B (рис. 17). Разность этих контуров дает контур $C_1 + C_2$ (рис. 18), интеграл, по которому есть скачок на логарифмическом разрезе функции $F(t)$, т.е.

$$\Delta F(t) = \oint_{C_1 + C_2} \frac{dx}{(x+\sqrt{t})(x-\sqrt{t})} = \frac{2\pi i}{\sqrt{t}}. \quad (3.2)$$

(Интеграл вычислен на основании теоремы о вычетах.) Полученное значение согласуется с пунктом а) при $\pi = 1$.

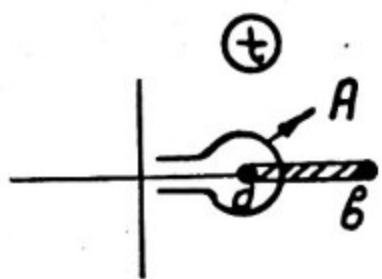


Рис. 13

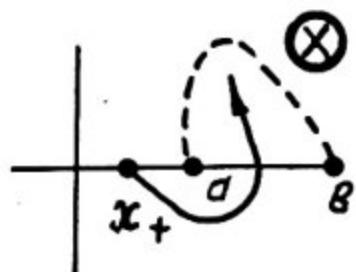


Рис. 14

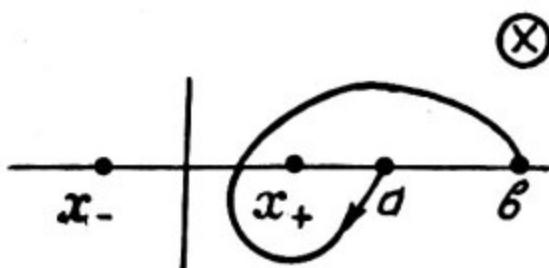


Рис. 15

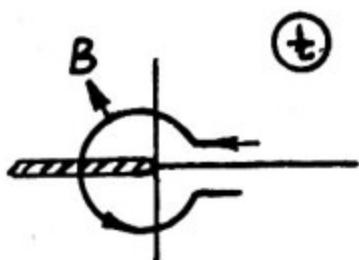


Рис. 16

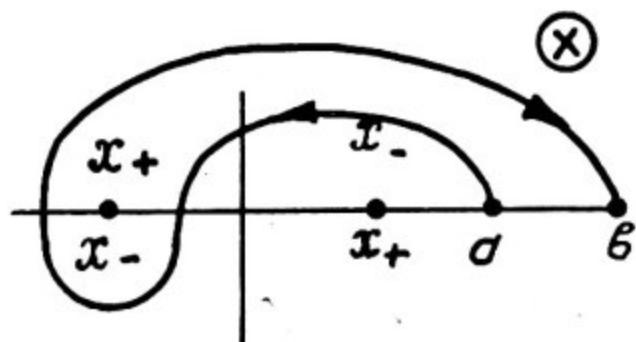


Рис. 17

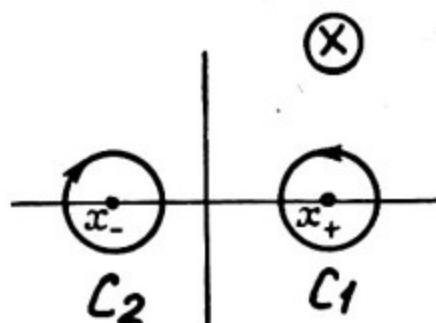


Рис. 18

в) Рассмотрим сингулярности подынтегрального выражения, если $x_{\pm} = \pm \sqrt{t}$: Отрезок $x_+ - x_-$ исчезает при $t \rightarrow 0$, а x_+ совмещается с x_- , т.е. $x_+ - x_-$ можно рассматривать как исчезающий цикл и порождающий элемент группы относительной гомологии: $H_1(C; x_+ \cup x_-) = Z$, $H_0(C; x_+ \cup x_-) = 0$, $H_2(C; x_+ \cup x_-) = 0$, где Z — аддитивная группа целых чисел.

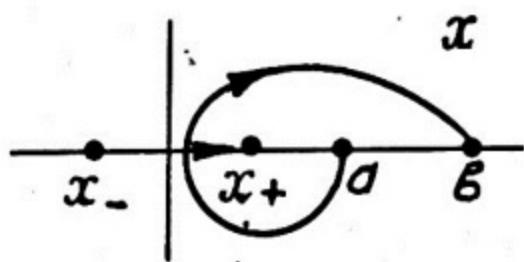


Рис. 19

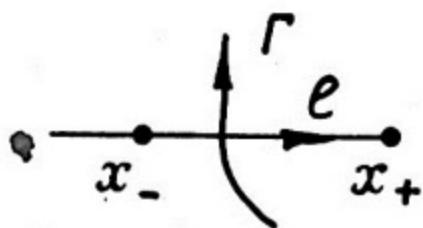


Рис. 20

На главном листе логарифма контур интегрирования Γ есть просто направленный отрезок ab (см. рис. 12). На втором листе контур становится уже другим (рис. 19). Исчезающий цикл $e, (C; x_+ \cup x_-)$ пересекает контур Γ . Для того чтобы контур захватывался особенностями, число таких пересечений не должно равняться нулю. (Оно, как мы знаем, называется индексом Кронекера.) Направленные отрезки исчезающего цикла и контура интегрирования образуют в точке пересечения репер (рис. 20). Индекс $KI = +1$, если движение от e к Γ осуществляется в положительном направлении, и $KI = -1$ для отрицательного направления (рис. 21). Для пересечений типа рис. 22 $KI = +1 - 1 = 0$.

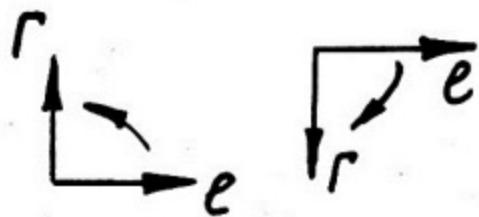


Рис. 21

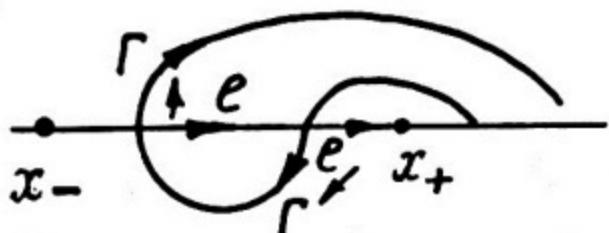


Рис. 22

Рассмотрим контур $\Gamma = C_1 + C_2$ (см. рис. 18). Уже известно, что при обходе по пути B' контур $\Gamma \rightarrow \Gamma + \Gamma'$. Дополнительный контур Γ' нетрудно построить. Граница $\partial e(C, x_+ \cup x_-)$ исчезающего цикла $e(C, x_+ \cup x_-)$ равна $x'_+ - x_-$. Для любой точки P в C выражение δP означает окружность с ориентацией вокруг P . Откуда

$$\Gamma' = \delta \partial e(C, x_+ \cup x_-) = \delta(x_+) - \delta(x_-) \quad (3.3)$$

или

$$\Gamma \rightarrow \Gamma + K I[e(C, x_+ \cup x_-), \Gamma] \delta \partial e(C, x_+ \cup x_-) \quad (3.4)$$

Формула (3.4) представляет собой содержание теоремы Пикара — Лефшеца. Эта теорема позволяет находить новые контуры интегрирования, появляющиеся при обходе сингулярностей, алгебраическим методом. С другой стороны, из рассмотренного примера видно, что циклы заданной размерности можно получать при помощи действия операторов ∂ и δ на исчезающие циклы относительных гомологий, т.е. циклы $H_e(C - m\mathcal{S})$ в дополнении $C - m\mathcal{S}$ ($m\mathcal{S}$ -объединение сигнумарностей) будут совокупностью циклов $H(C)$ и $\delta \partial H(C, \mathcal{S})$ — теорема Фруассара. Две эти теоремы и позволяют ответить на вопрос о характере сингулярностей и числе функций (числе независимых контуров), задаваемых интегралом. Если при обходе сингулярности n раз дополнительный контур $\tilde{\Gamma}$ обращается в нуль, то мы имеем дело с корневой особенностью n -го порядка, если же $\tilde{\Gamma} \rightarrow n\Gamma$, то — с логарифмической особенностью. В случае $\ell = m - 1$ (ℓ — размерность пространства, m — число пропагаторов) контур $H_\ell(C - m\mathcal{S})$ при обходе сингулярности переходит сам в себя. Сингулярность в этом случае есть полюс. При $\ell < m - 1$ происходят сложные зацепления [10] контуров и простого "пинча" нет.

Интуитивно чувствуется, что для применения вышеназванных теорем и понятий к интегралам необходимо записывать эти интегралы в особой форме. Такой формой является стандартная форма интегралов.

$$I(t) = \int \frac{\omega(x, t)}{\prod_i \mathcal{S}_i(x, t)} -$$

интеграл стандартного вида, если:

— $\forall t \in T$ (пространство параметров) уравнения $S_i(x, t) = 0$ задают в n -мерном комплексном многообразии X компактные аналитические подмножества, аналитически зависящие от t :

— $\omega(x, t)$ — регулярная внешняя n -форма на X , гомоморфная при $t \in T$,

— Γ — компактный n -мерный цикл, $\Gamma \subset X - U S$,

— X — компактно, а многообразия $S_i(x, t) = 0$ находятся в общем положении.

Поверхности Ландау, на которых функция, задаваемая интегралом, имеет особенности, определяются уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i \alpha_i \frac{\partial S_i(x, t)}{\partial x_k} = 0, \quad k=1, 2, \dots, \ell+2, \\ S_i(x, t) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \end{array} \right.$$

где m — число пропагаторов; ℓ — размерность начально-го пространства (до компактификации). Учитывая, что $S_i(x, t)$ суть преобразованные (после стереографического проектирования) пропагаторы $P_i(P, q)$, уравнения для особенностей Ландау $L(t)$ можно записать как $\det(P_i P_k) = 0$.

Поскольку определитель может обратиться в нуль вследствие равенства нулю миноров, то $L(t) = \cup L_{\{\beta\}}(t)$, причем $L_i(t)$ — диагональные элементы, $L_{ijk}(t)$ — определитель матрицы 2×2 , $L_{ijK}(t)$ — 3×3 и т.д. Для пятиугольной диаграммы (см. п. 2) $L_i(t)$ и $L_{ijk}(t)$ имеют логарифмическую осо-бенность, $L_{ik}(t)$ — (пороговые особенности) и $L_{ijk\epsilon}(t)$ име-ют особенности типа квадратного корня, поверхность $L_{12345}(t)$ со-ответствует полюсной особенности. При рассмотрении нер-лятивистских диаграмм характер особенностей $L_{\{\beta\}}(t)$ как бы "сдвигается" [12].

4. ДЕРЕВЬЯ

Деревья (разновидность графов) представляют собой це-лый раздел топологии. Они находят обширное применение в ал-гебре, теории вероятностей, химии, биологии, теории информа-ции и, естественно, в физике. Приведем лишь два примера их использования в физике: 1) в теории угловых моментов и 2) в теории множественного рождения частиц.

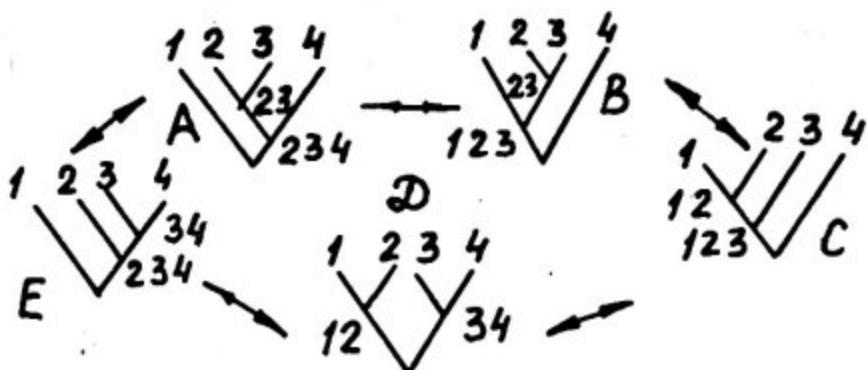


Рис. 23

1. Известно [13], что схему сложения моментов количества движения можно представить в виде некоторого дерева, а переход от одного дерева к другому как некоторую пересадку веток, причем пересадке одной ветки соответствует b_j -символ. В случае сложения четырех моментов при одинаковом порядке расположения моментов можно нарисовать пять различных деревьев. Все они представлены на коммутативной диаграмме, изображенной на рис. 23. Осуществляя переход от дерева *A* к дереву *C* по часовой стрелке и против нее, получаем, что однократная сумма произведений трех b_j -символов сводится к произведению двух b_j -символов. Это так называемое тождество Биденхарна — Эллиота. Графическое представление позволило произвести суммирование произведений трех гипергеометрических функций автоматически.

2. Большая часть данных в теории множественного рождения частиц при высоких энергиях может быть объяснена с привлечением мультипериферической и мультиреджионной моделей. Фейнмановские диаграммы, используемые в этих моделях, имеют вид рис. 24. С точки зрения теории графов диаграммы такого типа суть дерева. В этой связи возникает вопрос: "А не существует ли каких-либо ограничений на структуру деревьев при заданной множественности, либо при заданном числе вершин взаимодействия, а тем самым и на множественность взаимодействий?" Число исходящих из вершины линий называется степенью вершины. На рис. 25 представлены вершины степени 1, 2, 3, 4. Известно, что число деревьев с n помеченными вершинами равно $C_n = n^{n-2}$. Наиболее изящное доказательство этой теоремы дал Прюфер. Теперь можно спросить: сколько вершин степени *d* у "типичного" дерева с n вершинами?

Ответ: $\frac{n}{e(d-1)!}$, т.е. n/e вершин степени 2, $n/2e$ степени 3, $n/6e$ вершин степени 4 и т.д. [14]. Откуда число вершин степени 3 (двухчастичные взаимодействия) в 3 раза больше числа вершин степени 4 (трехчастичные взаимодействия). Тем самым из статистической теории деревьев получаем ограничения на множественность взаимодействия.

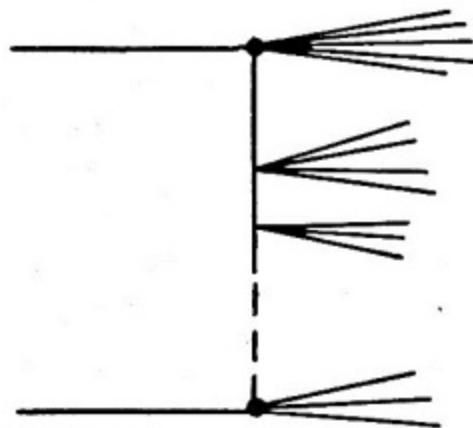


Рис. 24

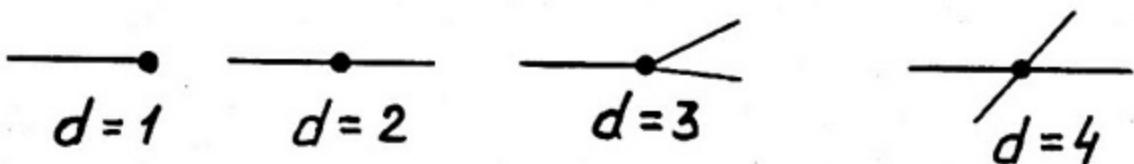


Рис. 25

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели лишь немногие примеры применения топологических методов в физике, далеко не исчерпывающие список решенных задач, однако и их достаточно, чтобы понять мощь и красоту топологических методов. В каком бы направлении ни пошло дальнейшее развитие теоретической физики, топология займет достойное место в ее математическом арсенале.

Литература

1. Шапиро И.С., Ольшанецкий М.А. Лекции по топологии для физиков. Элементарные частицы. Вып. 4. — М.: Атомиздат, 1979.
2. Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. — М.: Гостехиздат, 1955.
3. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
5. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. — М.: Наука, 1977.
6. *Belavin A.A. Polyakov A.M. Schwartz A.S. Tyurkin Yu.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations Letters, 1975, 59B, 85-89.*
7. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. — М.: Мир, 1970.
8. Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы. — М.: Мир, 1969.
9. Хилтон П., Уайли С. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. — М.: Мир, 1966.
10. Кузнецов Г.И. Собственные сингулярности однопетлевых n -угольных диаграмм Фейнмана. — ЯФ, 1972, т. 15, с. 846—848.
11. *Danilov Yu. A., Kuznetsov G.I., Smorodinsky Ya. A. Study of analytical properties of pentagon Feynman graph by homological method. Preprint JINR E2-4716, Dubna, 1969.*
12. Кузнецов Г.И. О характере сингулярностей некоторых однопетлевых нерелятивистских диаграмм. — ЯФ, 1971, т. 13, с. 212—220.
13. Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. К теории $3n_j$ -коэффициентов. — ЯФ, 1975, т. 21, 1135—1143.
14. Болотников Ю.Ю. Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам величин $\mu_z(n)$ в классической задаче о дробинках. — В сб.: Теория вероятностей и ее применение. 1968, т. XIII, вып. 1, с. 39—50.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
2. Солитоны и инстантоны как топологические структуры	9
3. К исследованию аналитических свойств фейнмановских амплитуд гомологическим методом	12
3.1. Введение	12
3.2. Простейшие интегралы	17
4. Деревья	22
5. Заключение	24
Литература	25

Геннадий Иванович Кузнецов
Юлий Александрович Данилов

ТОПОЛОГИЯ В ФИЗИКЕ

Редактор Н.Н. А н т о н о в а
Техн. редактор Н.М. Г е н к и н а
Корректор Т.В. С т а ф е р о в а

77-86084

Подписано в печать 16/IV-1981г. Формат 60 x 84 1/16
Объем 1,75 п.л. Уч.-изд. л. 1,5 Тираж 800 экз. Цена 7коп.
Изд. № 046—1 Заказ 612

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 1