



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО - ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. П. Гореславский Н. Б. Нарожный

ЭЛЕКТРОН  
В НЕОДНОРОДНОМ СВЕТОВОМ  
ПОЛЕ



ВСЕСОЮЗНАЯ  
ШКОЛА ПО  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ  
им. В. М. ГАЛИЦКОГО

МОСКВА 1989

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР  
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ  
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

С.П. Гореславский Н.Б. Нарожный

ЭЛЕКТРОН  
В НЕОДНОРОДНОМ СВЕТОВОМ ПОЛЕ

Текст лекции

Москва 1989

Гореславский С. П., Нарожный Н. Б.  
Электрон в неоднородном световом поле: Текст  
лекции. М.: МИФИ, 1989. - 24 с.

Рассматривается классическая и квантовая  
динамика нерелятивистского электрона в силь-  
ном, неоднородном, нестационарном световом по-  
ле. Обсуждаются наблюдаемые эффекты, обуслов-  
ленные градиентной силой и конечным временем  
взаимодействия электрона с полем.



Московский  
инженерно-физический  
институт, 1989 г.

## Введение

Эксперименты по взаимодействию световых потоков большой интенсивности ( $I > 10^{12}$  Вт/см $^2$ ) с электронами и атомами выполняются с импульсным ( $T \sim 10^{-14} - 10^{-11}$  с), сильно фокусированным излучением ( $R \sim 10^{-3}$  см). Теоретическое описание физических явлений в таких условиях должно учитывать, что электромагнитное поле является, во-первых, сильным, а во-вторых, представляет собой волновой пакет. Сильному полю теоретики уделили и уделяют достаточно много внимания. Сошлемся на обзоры по нелинейной ионизации [1, 2] и вынужденному тормозному эффекту [3], в которых речь идет о нерелятивистских электронах. (О релятивистских проблемах в сильном поле см. [4].) Практически во всех работах сильное световое поле считалось пространственно однородным.

Предметом нашего рассмотрения будут особенности, отличающие взаимодействие нерелятивистского электрона с пакетом электромагнитного поля от взаимодействия с плоской волной, а также проявление этих особенностей в наблюдаемых величинах. С квантовой точки зрения сильное поле характеризуется большими числами заполнения фотонных состояний. Вследствие этого: 1) поле можно описывать классически; 2) вынужденные процессы преобладают над спонтанными.

Свободный электрон реально поглотить фотон не может. Взаимодействие с сильным полем для него определяется процессом вынужденного комптоновского (томсоновского) рассеяния квантов поля.

Поле плоской монохроматической волны состоит из строго одинаковых фотонов. Виртуально поглотив и излучив вынужденным образом одинаковые фотоны, электрон не изменяет свои импульс и энергию. Результат многократно повторяющихся виртуальных процессов проявляется как колебания электрона в поле, которые накладываются на равномерное перемещение в пространстве. Энергия "одетого" (взаимодействующего с полем) электрона

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + U \quad (1)$$

складывается из кинетической энергии поступательного движения и средней энергии колебаний в световом поле с амплитудой  $E$  и частотой  $\omega$  :

$$U = \frac{e^2 E^2}{4\pi\omega^2} = \frac{2\pi e^2 I}{C\pi\omega^2} . \quad (2)$$

Первое равенство в (2) записано для линейной поляризации. Связь  $U$  с интенсивностью  $I$  не зависит от поляризационных свойств поля. Энергия "одетого" электрона не может быть меньше  $U$ .

Поле волнового пакета состоит из фотонов с близкими, но различающимися волновыми векторами и частотами. Вынужденно поглотив фотон, электрон может вынужденно излучить фотон с другим волновым вектором и с другой частотой и в результате изменить свои импульс и энергию. Принципиальное отличие пространственно неоднородного, нестационарного светового поля от поля с постоянной амплитудой состоит в том, что электрон может обмениваться импульсом и энергией с полем. Колебательная энергия (вместе с амплитудой поля и интенсивностью) зависит от координат и времени  $U = U(\vec{r}, t)$ . Суммарный эффект много-кратного обмена импульсом и энергией с фотонами выглядит как результат действия на электрон градиентной силы

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = -\nabla U(\vec{r}, t). \quad (3)$$

В связи с соотношением (3) колебательную энергию (2) называют так же пондеромоторным потенциалом. Сила (3) выталкивает электрон из светового фокуса.

В 1987 г. поставлен прямой эксперимент, в котором наблюдалось отражение электронов от пондеромоторного барьера и эффект "серфинга", т.е. изменение энергии электрона при рассеянии на нестационарных фронтах лазерного импульса [5]. Адекватное описание экспериментально наблюдаемых угловых распределений и спектров надпороговой ионизации оказалось возможным только с учетом деформаций, вносимых градиентной силой на пути электрона от места рождения до детектора [2, 5, 6].

Чтобы установить связь динамических характеристик электрона в поле и вне его нужно исследовать процесс выхода электрона за пределы светового фокуса, или, более общо, — процесс прекращения взаимодействия электрона с полем. Попутно можно выяснить условия, при которых в сильном поле такой анализ можно заменять граничными условиями типа адиабатического или мгновенного включения поля.

С ограниченным в пространстве и времени световым полем электрон взаимодействует в течение конечного времени  $\tau_{int}$ . Взаимодействие прекращается или за время пролета  $R/v$  (скорость поступательного движения  $v$  определяется, вообще говоря, с учетом градиентной силы), или за счет того, что заканчивается световой импульс длительности  $\tau$ . Время взаимодействия определяется меньшей из этих величин

$$\tau_{int} = \min \left( \frac{R}{v}, \tau \right).$$

Движение электрона существеннейшим образом зависит от параметра  $R/v\tau$ . Названия возникающих предельных случаев исторически сложились так, как будто изменяется только  $\tau$ .

При  $R/v\tau \ll 1$  реализуется режим длинных импульсов. Электрон настолько быстро пересекает фокус, что распределение интенсивности не успевает измениться. В пределе  $R/v\tau \rightarrow 0$  поле светового пакета можно рассматривать как стационарный фокусированный луч. В этом случае градиентная сила не зависит от времени, и, следовательно, сохраняется энергия "одетого" электрона.

Обратное неравенство  $R/v\tau \gg 1$  выделяет режим ультракоротких импульсов. За время светового импульса электрон практически не смещается и силу (3) можно считать однородной  $f=f(r_0, t)$  ( $r_0$  – начальное положение).

Если в ультракоротком импульсе мало не только смещение, но и приращение скорости электрона под действием градиентной силы, т.е.

$$v\tau \ll R ; \frac{U}{R}\tau \ll mv, \quad (4)$$

взаимодействие можно рассматривать как адиабатическое прохождение светового импульса над электроном. Длина волны для представляющих в экспериментах интерес электронов с энергиями выше долей электронвольта значительно меньше размеров фокуса. Поэтому движение электронов можно рассматривать в рамках нерелятивистской классической механики, а в квантовом подходе – использовать квазиклассическое приближение. Ниже используются атомные единицы  $\hbar = m = e = 1$ .

### Метод усреднения

Если электромагнитное поле описывается классически, представление о пондеромоторном потенциале и градиентной силе воз-

никает в результате применения метода усреднения по быстрому движению (метода П.А. Капицы) в уравнениях движения электрона в световом поле. Применим этот метод к классическим уравнениям Гамильтона. Преимущество гамильтонового формализма, во-первых, в том, что пондеромоторный потенциал оказывается просто равным среднему значению  $A^2$  – члена гамильтониана, и, во-вторых, результаты сравнительно легко переносятся в квантовую механику. Для простоты движение предполагается одномерным и происходит вдоль оси  $x$ , совпадающей с направлением поляризации и направлением неоднородности поля. (Волна распространяется вдоль оси  $x$ , зависимость от  $y$  в задаче вообще отсутствует). В дипольном приближении гамильтониан электрона в световом поле равен

$$H = \frac{1}{2} \left( P - \frac{E(x,t)}{\omega} \sin \omega t \right)^2. \quad (5)$$

Координату  $X$  и обобщенный импульс  $\mathcal{P}$  представим в виде суммы медленного (поступательного) и быстрого (осцилирующего) слагаемых:

$$X = x + \xi, \quad \mathcal{P} = p + p_\xi. \quad (6)$$

Средние за период  $2\pi/\omega$  значения быстрых слагаемых равны нулю:  $\langle \xi \rangle = \langle p_\xi \rangle = 0$ .

Условие применимости метода, или условие эффективного разделения колебательного и поступательного движений, состоит в том, что характерные для поступательного движения времена  $T_{int}$  и размер  $R$  велики, соответственно, по сравнению с периодом и амплитудой колебаний

$$\omega T_{int} \gg 1, \quad R \gg \xi. \quad (7)$$

Подставим в точные уравнения

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = P - \frac{E(x,t)}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{P} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8)$$

представление (6) и усредним по быстрому периоду, учитывая что условие  $R \gg \xi$  позволяет написать  $E(x,t) \approx E(x, t)$ . В результате находим уравнения медленного движения

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = - \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}. \quad (9)$$

Этим уравнениям соответствует гамильтониан, совпадающий с результатом усреднения точного гамильтониана

$$H_{tr} = \langle H \rangle = \frac{p^2}{2} + U(x, t). \quad (10)$$

Вычитая из уравнений (8) их медленные части (9) и отбрасывая малые по параметрам (7) члены, получаем систему уравнений быстрого движения

$$\dot{p}_x = 0, \dot{x} = p_x + \frac{E(x, t)}{\omega} \sin \omega t. \quad (11)$$

При интегрировании уравнения (11) нужно считать  $E(x, t) = \text{const}$ , что с учетом нулевых средних дает

$$p_x = 0, \dot{x} = -\frac{E(x, t)}{\omega^2} \cos \omega t. \quad (12)$$

Обращение в ноль быстрой добавки к импульсу означает, что в рассматриваемом приближении обобщенный импульс в неоднородном поле совпадает с импульсом поступательного движения. Результат  $p_x = 0$  следовало ожидать, так как сохраняющийся в поле постоянной амплитуды обобщенный импульс в слабо неоднородном поле перестает быть интегралом движения и медленно изменяется.

В совокупности уравнения (9) и (12) описывают взаимное влияние поступательного и колебательного движений в неоднородном световом поле. Присутствие пондеромоторного потенциала  $U(x, t) = \langle \frac{1}{2} \dot{x}^2 \rangle$  в (9) учитывает эффективное изменение поступательного движения под влиянием быстрых колебаний. Из (12) видно, что колебания определяются локальным значением амплитуды поля около центра колебаний. При перемещении электрона вдоль траектории поступательного движения  $x = x(t)$  колебания адиабатически следуют за изменяющимся полем.

Применяя метод усреднения к уравнениям Ньютона, нужно соблюдать известную осторожность, так как необходимо, вообще говоря, усреднять полную силу Лоренца  $f_L$  (несмотря на то, что магнитная часть содержит малость  $v/c \ll 1$ ). Только при этом условии получается правильный результат  $\langle f_L \rangle = -\nabla U$ . Покажем это на примере движения электрона в поле волны, поляризованной перпендикулярно направлению неоднородности

$$A = \left\{ 0, -\frac{cE(x)}{\omega} \sin \omega(t - \frac{x}{c}), 0 \right\}.$$

В неплоской волне поля имеют большие компоненты  $E_y$  и  $H_x$ , а магнитное поле имеет еще и малую продольную компоненту  $H_z$ , существование которой необходимо для выполнения условия по-перечности  $\nabla \times H = 0$ . Быстрое движение электрона под действием компонент  $E_y$  и  $H_x$  происходит в плоскости  $x = \text{const}$ , так что электрон "не чувствует" неоднородность. Вращение, вызываемое проекцией  $H_z$ , выводит электрон из плоскости, в которой амплитуда поля постоянна, что и приводит к возникновению градиентной силы. Сказанное следует формально из рассмотрения медленного уравнения

$$\ddot{x} = \frac{1}{c} \langle v_y H_z \rangle = - \frac{\partial U}{\partial x},$$

где при усреднении достаточно учесть осциллирующую часть  $v_y$ , которая определяется компонентой  $E_y$ .

### Томсоновское излучение

На простом примере пересечения электронного пучка со стационарным световым лучом (длинным импульсом) покажем некоторые проявления градиентной силы в физических явлениях.

Во-первых, электронный поток рассеивается лучом. Сечение находится стандартными методами теории рассеяния, если известно распределение интенсивности, т.е. вид  $U(r)$ . Для электронов с подбарьерной энергией  $\xi < U_0$  возможно отражение от светового луча, которое наблюдалось экспериментально [5].

Во-вторых, изменяется излучение электрона в световом поле. Энергия томсоновского излучения электрона, рассеиваемого световым лучом в одномерной модели равна

$$\Delta E = 2 \int_{x_{\min}}^{\infty} \frac{2}{3c^3} E^2(x) \frac{dx}{\sqrt{2(\xi - U(x))}}, \quad (13)$$

где  $x_{\min} = 0$  для надбарьерных электронов, а при  $\xi < U_0$  нижний предел совпадает с точкой поворота  $x_0$ , определяемой условием (рис. 1)

$$U(x_0) = \xi. \quad (14)$$

Если электроны быстрые (или поле слабое) под знаком корня можно пренебречь  $U(x)$  и считать пролет равномерным. Торможение потенциальным барьером увеличивает время нахождения электрона в поле и, следовательно, увеличивает излученную энергию. Для надбарьерных электронов излученная энергия пропорциональна

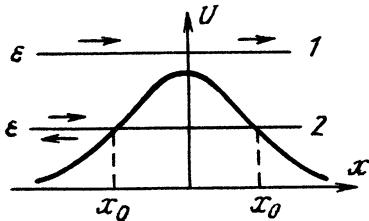


Рис. 1. Движение в пондеромоторном потенциале: 1 - надбарьерное; 2 - подбарьерное;  
 $x_0$  - точка поворота

Оно не зависит от максимальной интенсивности в центре светового луча, хотя положение точки поворота зависит от  $E^2(0)$ .

Излученная энергия как функция скорости налетающего электрона имеет максимум при  $\xi \approx V_0$ . Спектр излучения уширен на величину обратного времени пролета.

### Прохождение фронта

Обратимся к нестационарной модельной задаче о взаимодействии электрона с фронтом фокусированного светового импульса, или, другими словами, к задаче о включении сильного неоднородного поля. Пример интересен тем, что наглядно показывает ограниченность представления об адиабатическом включении поля и демонстрирует эффект ограничения интенсивности в нестационарных условиях.

Пусть пондеромоторный потенциал имеет треугольную форму:

$$U(x,t) = U_0 f(t) (1 - |x|/R), \quad |x| \leq R, \quad (16)$$

а временная огибающая соответствует включению с эффективным временем  $T$

$$f(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{t}{\pi T}\right)^{\pi} & -\pi T < t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

В пределе  $\pi \gg 1$  включение экспоненциальное.

нальна максимальной интенсивности светового луча:  $\Delta \xi \sim E^2(0)$ .

Замедление электронов с  $\xi < U_0$  тоже имеет место, но для них более существенным является эффект ограничения интенсивности, обусловленной тем, что подбарьерный электрон не проникает в центр светового луча. Максимальное поле, с которым взаимодействует подбарьерный электрон, достигается в точке поворота и равно

$$E^2(x_0) = 4\omega^2 \xi. \quad (15)$$

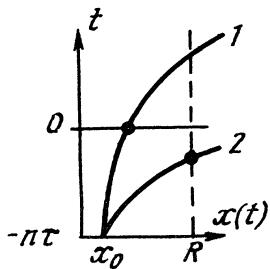


Рис. 2. Траектории электрона при включении поля:  
1 – слабое; 2 – сильное поле

менится, если принять во внимание действие градиентной силы в процессе включения поля. Сила, определяемая (16), от координат не зависит, и уравнения движения интегрируются элементарно. В зависимости от силы поля (т.е. от  $U_0$ ) возможны движения двух типов (рис. 2). В слабом поле (кривая 1) за время включения электрон приобретает под действием градиентной силы скорость и смещение, равные

$$\dot{x}(0) = \frac{\tau U_0}{R} \frac{\pi}{\pi+1}, \quad x(0) - x_0 = \frac{U_0 \tau^2}{R^2} \frac{\pi^2}{(\pi+1)(\pi+2)} < R.$$

Дальнейшее движение потенциально и вне поля электрон имеет энергию

$$E_f = \frac{\dot{x}^2(0)}{2} + U(x(0), 0) = U(x_0, 0) - \frac{1}{2} \left( \frac{U_0 \tau}{R} \right)^2 \frac{\pi^3}{(\pi+2)(\pi+1)^2}. \quad (17)$$

Последнее слагаемое в (17) объединяет вклады от кинетической энергии и смещения в потенциальном поле. Энергия (17) мало отличается от величины, рассчитанной с адиабатическим включением, только в достаточно слабом поле

$$U_0 \ll \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\tau} \right)^2 \quad \text{или} \quad I \left( \frac{B_T}{\text{см}^2} \right) \ll 3 \cdot 10^{13} \frac{R^2}{\tau_p^2}. \quad (18)$$

Второе неравенство записано для частоты  $N_d$  лазера. Для движения вдоль линии 1 характерная скорость равна  $v = \sqrt{2U_0}$ , и

Рассматривать будем частный случай начального условия, когда до начала взаимодействия электрон покоится в точке  $x_0$  ( $0 < x_0 < R$ ). Обычное заклинание: "поле включается адиабатически" – предполагает, что состояние движения электрона не изменяется, т.е. электрон остается неподвижным, и во включенном поле ( $f=1$ ) приобретает энергию  $U(x_0, 0)$ . При  $t > 0$  движение потенциальное и, скатившись с барьера, электрон покидает поле с кинетической энергией  $E_f = U(x_0, 0)$ .

Посмотрим, как этот результат из-

условие (18) эквивалентно тому, что адиабатическое включение должно происходить быстро;  $v\tau \ll R$ . В пределе требованию адиабатичности удовлетворяет мгновенно включаемое поле ( $\tau \rightarrow 0$ )!

Сильным можно назвать поле, когда неравенство (18) сменяется обратным:

$$U_0 \gg \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\tau} \right)^2.$$

В этом случае движение происходит вдоль линии 2 на рис. 2: электрон выходит за пределы фокуса и перестает взаимодействовать с полем, до того как поле включится полностью. Сильный световой импульс не может "пройти над первоначально покоящимся (медленным) электроном"; электрон выталкивается из фокуса на переднем фронте. Момент выхода  $t_R$  определяется условием  $x(t_R) = R$ . Определив скорость  $\dot{x}(t_R)$ , находим кинетическую энергию свободного электрона, вылетевшего из фокуса:

$$\epsilon_f = \frac{\dot{x}^2(t_R)}{2} = \frac{U_0^2 \tau^2 n^2}{2 R^2 (\pi+1)^2} \left[ \left(1 - \frac{x_0}{R}\right) \frac{R^2 (\pi+1)(\pi+2)}{U_0 \tau^2 n^2} \right]^2 \frac{\pi+1}{\pi+2} \quad (19)$$

Максимальную энергию получают электроны, находившиеся вблизи центра луча ( $x_0 \ll R$ ). Если включение линейное ( $n=1$ ), максимальная энергия оказывается малой по сравнению с  $U_0$ :

$$\epsilon_{max} \sim U_0 \left( \frac{R^2}{U_0 \tau^2} \right)^{1/3} \ll U_0,$$

но значительно превышает "критическую" энергию  $\frac{1}{2}(R/\tau)^2$ . При экспоненциальном включении вместо (19) имеем

$$\epsilon_f = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\tau} \right)^2 \left(1 - \frac{x_0}{R}\right)^2,$$

так что максимальная энергия оказывается независящей от интенсивности поля. Ускорение электронов, выталкиваемых из фокуса градиентной силой на переднем фронте светового импульса, может оказаться определяющим фактором в формировании спектра фотоэлектронов в полях с напряженностью порядка атомной и выше.

### Спектр ионизации

Процесс взаимодействия электрона с атомом в присутствии светового поля можно с хорошей точностью разделить на элемен-

тарный акт электрон-атомного взаимодействия и движение невзаимодействующего с атомом электрона в световом поле. Элементарный акт (ионизация, рассеяние) происходит в локально-однородном поле, так как взаимодействие электрона с атомом разыгрывается на временах и расстояниях атомного масштаба. На стадии движения в световом поле динамические характеристики электрона, возникшие в элементарном акте, изменяются под действием градиентной силы. Учет этого обстоятельства необходим для адекватного описания физических экспериментов.

Более детально остановимся на процессе ионизации. Пусть атом, расположенный в точке  $x_0$ , в момент времени  $t_0$  находившийся в связанным состоянии с энергией  $-\mathcal{E}_0$ , ионизуется, поглощая  $\pi$  фотонов. В закон сохранения энергии входит локальная энергия "одетого" электрона

$$\frac{p^2(x_0, t_0)}{2} + U(x_0, t_0) = \pi\omega - \mathcal{E}_0. \quad (20)$$

Все фотоэлектроны, родившиеся в  $\pi$ -фотонном канале, в момент рождения имеют одинаковую полную энергию и различные кинетические энергии. Наличие пондеромоторного потенциала (колебательной энергии) в левой части (20) эквивалентно повышению потенциала ионизации. При  $U(x_0, t_0) > \pi\omega - \mathcal{E}_0$  для атома в точке  $x_0$   $\pi$ -фотонный канал закрыт. Предполагая, что насыщение ионизации не происходит, элементарный акт будем описывать вероятностью в единицу времени  $w_\pi$ . Зависимость  $w_\pi$  от интенсивности при  $\pi \gg 1$  очень резкая (о различных моделях см.[1, 2]). В дальнейшем эту зависимость либо не конкретизируем, либо используем  $w_\pi \sim I^\kappa$ . По пути от места рождения до детектора электрон рассеивается нестационарным потенциалом, и его импульс и энергия изменяются. Решение уравнений движения (9) с начальными условиями ( $t_0, x_0, p_0 = p(x_0, t_0)$ ) определяет временную зависимость поступательного движения  $x(t), p(t)$ . Асимптотическое (при  $t-t_0 \gg T_{\text{пл}}$ ) значение импульса  $p$  дает кинетическую энергию, с которой электрон регистрируется в детекторе. Результирующее изменение кинетической энергии можно записать в виде работы градиентной силы вдоль траектории движения

$$\frac{p^2}{2} - \frac{p_0^2}{2} = A(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f(x(t), t) v(t) dt. \quad (21)$$

Трудности при решении уравнений (9) и нахождении работы (21) связаны с неконсервативностью зависящей от времени градиентной силы.

Из (20) и (21) следует, что в детекторе электрон имеет энергию

$$\mathcal{E} = \pi\omega - \xi_0 - U(x_0, t_0) + A(x_0, t_0), \quad (22)$$

которая зависит не только от места и момента рождения, но и от движения в более поздние моменты времени, так как последний член в (22) имеет интегральный характер. Разброс по энергиям возникает как за счет неоднородности потенциала, так и за счет различия в работе.

### Длинные импульсы

В стационарном луче движение в световом поле происходит с сохранением энергии "одетого" электрона. Непосредственно из (20) видно, что в этом приближении в спектре детектируемых электронов имеется бесконечно узкий пик при энергии  $\xi_{\pi} = \pi\omega - \xi_0$ , образованный электронами, возникшими в результате  $\pi$ -фотонного перехода.

Чтобы определить энергию электрона, покинувшего фокус, с учетом поправок по параметру  $R/v\tau \ll 1$ , разложим силу в ряд по второму аргументу:

$$f(x, t) = f(x, t_0) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \Big|_{t_0} (t - t_0) + \dots,$$

а работу (21) вычислим, воспользовавшись зависимостью  $x(t)$ , найденной для потенциального движения. После интегрирования по частям получается

$$A(x_0, t_0) = U(x_0, t_0) + \delta A^{(1)}(x_0, t_0),$$

где первое слагаемое отвечает стационарному лучу, а второе – учитывает нестационарность поля в течение времени выхода

$$\delta A^{(1)}(x_0, t_0) = \int_{x_0}^{\infty} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t_0} \frac{dx}{\sqrt{2(\xi_{\pi} - U(x, t_0))}}. \quad (23)$$

По порядку величины (обозначение:  $v_{\pi} = \sqrt{2(\xi_{\pi} - U_0)}$ )

$$\delta A^{(1)} \sim \frac{R}{v_{\pi} \tau} U_0 \ll U_0. \quad (24)$$

Знак нестационарной добавки определяется знаком  $\frac{\partial U}{\partial t}$  в момент рождения фотоэлектрона. На переднем фронте ускорение больше, чем в потенциальном движении, так как сила возрастает по величине. Наоборот, электроны, рожденные на заднем фронте, детектируются с энергией меньше  $\mathcal{E}_\pi$ . Изменение энергии электрона, пересекающего фокус на фронтах светового импульса наблюдалось экспериментально [5].

Если насыщение ионизации не наступает, электроны рождаются в течение всего лазерного импульса. Наибольшее число их появляется в момент  $t_0 = 0$ , когда интенсивность максимальна. Но в этот момент  $\frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0$  и, следовательно,  $\delta A^{(1)}(x_0, 0) = 0$ .

За счет электронов, родившихся раньше и позже момента  $t_0 = 0$ , электронный пик симметрично уширяется около своего положения  $\mathcal{E}_\pi$ . Для определения наблюдаемой ширины пика помимо разброса по энергии нужно принимать во внимание неравномерное распределение по  $(x_0, t_0)$  рожденных электронов, т.е. зависимость  $w_\pi(x_0, t_0)$ . Так, в случае гауссовой (по  $x$  и  $t$ ) огибающей и  $w_\pi \sim I^\pi$  с  $\pi > 1$  основная доля электронов в надбарьерном канале ( $\mathcal{E}_\pi > U_0$ ) рождается в узкой эффективной области около максимума интенсивности

$$|x_0| \lesssim \frac{R}{\sqrt{\pi}} ; |t_0| \lesssim \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad (25)$$

где в производной  $\frac{\partial U}{\partial t}$  содержится малый множитель  $\frac{t_0}{\tau} \lesssim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ll 1$ . В результате ширина надбарьерного пика в длинном импульсе (сравните с (24))

$$\Gamma_\pi \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{v_\pi \tau} U_0. \quad (26)$$

Зависимость (26) хорошо согласуется [6] с результатами измерений, выполненных в условиях, когда несущественна роль насыщения ионизации и объемного заряда. Влияние насыщения на форму спектра надпороговой ионизации может оказаться важным и требует особого рассмотрения. Можно ожидать, что в сильном поле, когда насыщение наступает на переднем фронте светового импульса, электронный пик будет асимметричным, с преобладанием электронов с энергиями больше  $\mathcal{E}_\pi$ .

### Ультракороткие импульсы

В ультракоротком импульсе электрон практически не смещается. Вычисляя работу, полагаем  $f(x(t), t) \approx f(x_0, t)$ , после чего формула (21) преобразуется к очевидному выражению

$$A(x_0, t_0) = \frac{(p_0 + \Delta p)^2}{2} - \frac{p_0^2}{2}, \quad (27)$$

где  $p_0 = p(x_0, t_0)$  — начальный импульс из (20), а

$$\Delta p = \int_{t_0}^{\infty} f(x_0, t) dt -$$

его приращение за время взаимодействия с полем. По сравнению с  $U_0$  работа (27) первого порядка по параметру  $\varepsilon T / R \ll 1$ .

Если в энергии свободного электрона (22) работа не существенна и ею можно пренебречь, то это означает, что наблюдаемой величиной является распределение по начальным кинетическим энергиям. Для этого случая рассмотрим каналы, которые остаются надбарьерными в течение всего лазерного импульса (формы огибающих и  $U_n$  те же, что в разделе "Длинные импульсы"). Имеем вместо (22)

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \pi\omega - \varepsilon_0 - U_0 + \delta U(x_0, t_0); \\ \delta U(x_0, t_0) &\approx U_0 - U(x_0, t_0). \end{aligned} \quad (28)$$

В эффективной области (25) разброс по энергиям составляет  $\delta U \sim U_0/\pi \ll U_0$ . Ширина пика  $\Gamma_n \approx U_0/\pi$  для ультракороткого импульса близка к измеренной. Из (28) видно, что надбарьерные пики сдвинуты в сторону меньших энергий на величину  $U_0$  относительно своего положения в длинных импульсах. Нижний из надбарьерных каналов попадает в интервал энергий  $0 < \mathcal{E} < \omega$ , где в длинных импульсах и слабых полях находился пороговый канал, соответствующий поглощению минимального числа фотонов. Условие того, что наблюдается спектр фотоэлектронов, не искаженный пондеромоторным ускорением,  $A \ll \delta U$ , сводится к требованию

$$\frac{\tau U_n}{R} \ll \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (29)$$

которое является более жестким, чем условие, определяющее ультракороткие импульсы. Обсуждение экспериментальных результатов, а также ширин и сдвигов, когда условие (29) нарушено, проведено в работе [6].

### Подбарьерные каналы

Обратимся к рассмотрению подбарьерных ( $\xi_n = \pi\omega - \xi_0 < U_0$ ) каналов в длинных и коротких импульсах. Если световой импульс с плавной пространственно-временной огибающей заменить для оценок прямоугольным, с высотой, равной максимальной интенсивности, то подбарьерные каналы, в соответствии с законом сохранения энергии для элементарного акта (20), полностью отсутствуют.

В поле фокусированного импульса при любой интенсивности некоторое количество электронов в подбарьерном канале рождается, так как канал открыт в пространственно-временных точках, для которых  $U_0 > \xi_n > U(x_0, t_0)$ . На периферии фокуса канал остается открытым в течение всего импульса, а в центре фокуса — на фронтах, пока интенсивность не слишком велика. Максимальная интенсивность  $I_n$ , при которой еще возможно рождение электронов в  $\pi$ -фотонном канале, достигается в окрестности точки поворота  $\xi_n = U(x_0, t_0)$ . Она определяется выражением (15) и, как уже говорилось, не зависит от максимальной интенсивности светового импульса  $I_0$ . Из-за высокой нелинейности ( $\pi \gg 1$ ) вероятность ионизации быстро падает при уменьшении интенсивности, поэтому большинство электронов в подбарьерном канале рождается в окрестности точки поворота (при постоянной интенсивности  $I_n < I_0$ ). Отсюда следует, что число электронов в подбарьерном канале, во-первых, слабо зависит от  $I_0$  и, во-вторых, много меньше числа электронов в надбарьерном канале. Различие в числе электронов определяется, грубо говоря, фактором  $(I_n/I_0)^\pi$  с  $\pi \gg 1$ . Число электронов в подбарьерном канале очень быстро падает при уменьшении номера канала: их отношение для двух соседних каналов  $\sim \left(\frac{I_n}{I_{n+1}}\right)^\pi = \left(\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right)^\pi \ll 1$ .

Для надбарьерных каналов эффективная интенсивность, при которой рождается большинство электронов, одинакова и совпадает с максимальной интенсивностью импульса (см. формулу (25)). Поэтому, если вероятность элементарного акта обладает свойством  $w_\pi > w_{\pi+1}$ , число электронов в надпороговом канале убывает с ростом  $\pi$ . Убывание это сравнительно плавное, так как отношение  $w_{\pi+1}/w_\pi$  (при одной интенсивности) не содержит высоких степеней числа, меньшего единицы.

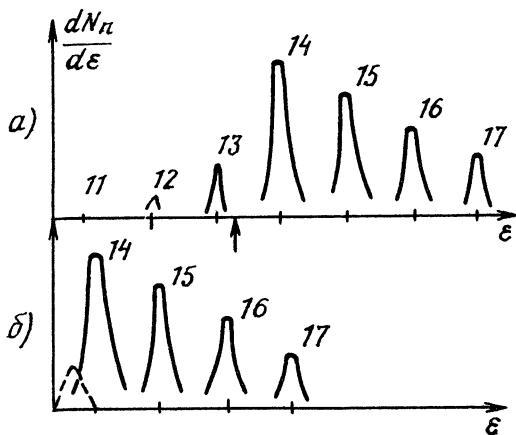


Рис. 3. Спектр надпороговой ионизации в длинных (а) и ультракоротких (б) импульсах. Цифры обозначают номера каналов,  $N_0 = 11$  – пороговое число квантов в слабом поле, стрелка на (а) отмечает положение  $U_0$ , пунктир на (б) – суммарный вклад каналов  $\pi = 11, 12, 13$

В длинных импульсах  $\pi$ -фотонному каналу ионизации соответствует пик в спектре при энергии  $\epsilon_{\pi}$  (рис. 3, а). В ультракоротких импульсах надбарьерные пики сдвинуты в сторону меньших энергий на  $U_0$  (см. раздел "Ультракороткие импульсы"), а подбарьерные – накладываются друг на друга в окрестности нулевой энергии (рис. 3, б). Суммирование вкладов подбарьерных каналов происходит потому, что электроны рождаются около точек поворота с малыми кинетическими энергиями, а градиентная сила в ультракоротких импульсах не успевает их существенно ускорить.

В рассмотренном механизме формирования спектра надпороговой ионизации главную роль играют эффекты, обусловленные средним значением  $A^2$ -члена в гамильтониане электрона в неоднородном световом поле (т.е. пондеромоторным потенциалом, или, что то же самое, средней энергией колебаний). В настоящее время интенсивно разрабатываются модели, в которых форма спектра (высоты пиков) надпороговой ионизации обусловлена немонотонной зависимостью от  $\pi$ -вероятности элементарного акта ионизации [2].

## Волновые функции

Приближенные решения нерелятивистского уравнения Шредингера для электрона в поле фокусированного лазерного импульса в замкнутом виде удается получить в двух предельных случаях: 1) однородное, адиабатически включаемое поле и 2) стационарный луч. Приведем результаты, относящиеся к одномерному движению (раздел "Метод усреднения").

Если предположить, что амплитуда поля зависит только от времени, точным решением уравнения Шредингера будет волновое решение:

$$\Psi_p(x,t) = \exp \left\{ ipx - i \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \left( p - \frac{E(t)}{\omega} \cos \omega t' \right)^2 dt' \right\}. \quad (30)$$

Квантовое число  $p$  совпадает с импульсом свободного электрона до начала (и после окончания) взаимодействия с полем. Сохранение импульса является естественным следствием предположения об однородности поля, которое заведомо исключает эффект ускорения градиентной силой. Поэтому область применимости решения (30) для описания движения электрона в поле реального светового импульса определяется условиями (4), которые позволяют считать поле однородным, а импульс электрона — сохраняющимся.

В пределе стационарного луча волновые функции можно получить, применяя метод разделения быстрого и медленного движений к уравнению Шредингера. В соответствии с адиабатической картиной, когда быстрые колебания происходят на фоне медленного поступательного движения, решение уравнения Шредингера для электрона в световом поле находится в виде

$$\Psi_p = \chi_p \cdot \psi_p \quad . \quad (31)$$

Функция

$$\chi_p = \sqrt{\frac{p}{p(x)}} \exp \left( -i \frac{p^2}{2} t + i \int p(x') dx' \right) \quad (32)$$

является решением уравнения Шредингера с гамильтонианом поступательного движения (10). Здесь  $p(x) = \sqrt{p^2 - 2U(x)}$ , а  $p$  — импульс электрона — вдали от светового поля. Множитель  $\psi_p$  описывает колебания и зависит от  $x$  только через амплитуду поля. Уравнение для него получается подстановкой (31) с учетом (32) в уравнение Шредингера в световом поле и отбрасыванием малых по параметрам (7) членов. Оно имеет вид

$$i \frac{\partial \psi_p}{\partial t} = (U(x) \cos 2\omega t + \cancel{\dot{x}} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \ln \chi_p) \psi_p \quad (33)$$

и легко интегрируется, так как логарифмическая производная равна  $p(x)$

$$\psi_p = \exp \left( -i \frac{U(x)}{2\omega} \sin 2\omega t - i \cancel{\dot{x}} p(x) \right). \quad (34)$$

Объединяя (32) и (34), находим искаженные волковские решения (ИВР), которые наряду с колебаниями в световом поле учитывают ускорение электрона в пондеромоторном потенциале

$$\Psi_p = \sqrt{\frac{p}{p(x)}} \exp \left\{ i \int p(x') dx' - i \int \frac{1}{2} \left( p(x) - \frac{E(x)}{\omega} \cos \omega t \right)^2 dt' \right\}. \quad (35)$$

Квантовое число  $p$  – импульс свободного электрона, не взаимодействующего с полем. Квазиэнергия ИВР равна  $\mathcal{E} = p^2/2$ . В малой ( $|x-x_0| \ll R$ ) окрестности классически доступной точки  $x_0$  функция (35) сводится к волковскому решению с квантовым числом  $\tilde{p} = p(x_0)$ , отсюда и название – ИВР.

Нахождение ИВР представляет собой промежуточный этап при получении квазиклассических волновых функций электрона в неоднородном световом поле. Из бегущих волн (35) нужно построить линейные комбинации, удовлетворяющие граничным условиям и условиям сшивки около точек поворота. Простейший способ состоит в том, что стандартными методами строятся состояния поступательного движения, удовлетворяющие указанным требованиям, т.е. состояния рассеяния  $\chi_p^+$  или состояния с определенной четностью (если  $U(x)=U(-x)$ ). После чего для каждой бегущей волны, на которые раскладывается, например,  $\chi_p^+$  вводится соответствующий множитель (34) и в результате получается  $\Psi_p^+$  – волновая функция электрона в неоднородном световом поле, удовлетворяющая граничным условиям задачи рассеяния на пондеромоторном потенциале. Существенная особенность состояний  $\Psi_p^+$  заключена в том, что при  $\mathcal{E} = p^2/2 < U_0$  они затухают под барьером, в классически недоступной области поступательного движения. Для квазиклассического барьера проницаемость экспоненциально мала, и состояние рассеяния с  $\mathcal{E} < U_0$  фактически сводится к стоячей волне с одной стороны барьера. По той же причине отражение налбарьерных электронов пренебрежимо мало, и состояние  $\Psi_p^+$  с  $\mathcal{E} > U_0$  совпадает с (35). Используя состояния  $\Psi_p^+$  можно выполнить квантовый расчет вероятностей, сечений

и т.д. различных физических процессов для электрона в поле стационарного светового луча.

Метод усреднения можно применить для нахождения волновой функции медленного (квазиклассического) электрона, взаимодействующего с кулоновским центром в присутствии световой волны. Поступательное движение в этом случае происходит в потенциале  $U(x_0+x) - \frac{\chi}{|x|}$ . Искомое решение определяется выражением (35), но с иным квазиклассическим импульсом

$$p_c(x) = \sqrt{2} \left( \epsilon - U(x_0+x) + \frac{\chi}{|x|} \right). \quad (36)$$

Здесь  $x$  отсчитывается от кулоновского центра, расположенного в точке  $x_0$ ;  $\epsilon$  — энергия свободного электрона. В исчезающем слабом поле такое решение переходит в кулоновскую квазиклассику, а при  $\chi \rightarrow 0$  — совпадает с ИВР в световом поле. Область применимости решения определяется условием применимости метода усреднения к кулоновскому полю и сводится к требованию  $|x| \gg \chi^{1/3} \omega^{-2/3}$ .

Сшивка с решениями, справедливыми на меньших расстояниях, позволила бы найти волновые функции во всем пространстве.

### Заключение

Описание физических явлений, в которых электрон взаимодействует с сильным световым полем необходимо проводить с учетом динамических проявлений пространственно-временной неоднородности поля, т.е. эффектов обусловленных градиентной силой. В диапазоне параметров излучения, используемых на сегодняшний день, имеется достаточное понимание проблемы. Переход к большим интенсивностям и дальнейшее уменьшение длительности световых импульсов требует анализа релятивистского движения (при  $U \gtrsim mc^2$ ) в неоднородном поле и выхода за рамки метода усреднения (т.е. концепции пондеромоторного потенциала) в условиях, когда время взаимодействия сравнимо с периодом поля.

### Список литературы

1. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Делоне Н. Б., Федоров М. В. УФН, 1989, т. 158, вып. 1.
3. Букин Ф. В., Казаков А. Е., Федоров М. В. УФН, 1972, т. 107, с. 559.

4. Труды ФИАН, т. 111. М.: Наука, 1979.
  5. *Freeman R.R., Bucksbaum P.H., McIlrath T.Y.*  
*IEEE J.Quant.El., 1988, v.24, p.1461.*
  6. Г о р е с л а в с к и й С. П., Ш е р б а ч е в О. В.  
ЖЭТФ, 1989, т. 95, с. 93.
-

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Метод усреднения.....	5
Томсоновское излучение.....	8
Прохождение фронта .....	9
Спектр ионизации.....	11
Длинные импульсы.....	13
Ультракороткие импульсы.....	14
Подбарьерные каналы.....	16
Волновые функции... .....	18
Заключение... .....	20
Список литературы.....	20

Сергей Павлович Гореславский  
Николай Борисович Нарожный

"ЭЛЕКТРОН В НЕОДНОРОДНОМ СВЕТОВОМ  
ПОЛЕ"

Редактор Е.Г. Станкевич  
Техн. редактор З.И. Хазова  
Корректор Е.А. Кораблева

Тем. план 1989 г., поз.ЗД

---

Л.-21013

Подписано в печать 24/IV-89г.

Формат 60x84 1/16      Объем 1,5 п.л.      Уч.-изд.л. 1,2  
Тираж 220 экз.      Изд. № 060-1      Цена 10 коп.

Заказ 831

---

Московский инженерно-физический институт. Типография МИФИ.  
115409, Москва, Каширское шоссе, 31