

На правах рукописи

Боровков Максим Валентинович

Математическое моделирование нормальных распределений
на группе $SO(3)$ и сфере S^2 методом Монте Карло

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2004

Работа выполнена в Московском инженерно-физическом институте (государственном университете)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук
профессор

Татьяна Ивановна
Савелова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
профессор
кандидат физико-математических наук

Ягола Анатолий
Григорьевич
Дмитрий Игоревич
Николаев

Ведущая организация:

Институт Металлургии РАН имени А.А. Байкова (ИМЕТ)

Защита состоится 9-го июня 2004 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Московском инженерно-физическом институте (государственном университете) по адресу:
115409, г.Москва, ул. Каширское шоссе, д.31

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МИФИ.

Автореферат разослан "21" июня 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета – доктор физико-математических наук профессор

Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Реферируемая диссертационная работа посвящена исследованию вопросов, связанных с рассмотрением свойств, методов моделирования, а также некоторых применений в текстурном анализе нормальных распределений (НР) на группе вращений евклидового пространства и сфере. Данный класс распределений играет исключительно важную роль в математической статистике и теории вероятностей, в силу наличия целого спектра характерных свойств. Теория и применения нормальных распределений в евклидовом пространстве является достаточно хорошо разработанной научной и инженерной областью, тогда как исследование указанных распределений на объектах несколько иной структуры таких, как компактная группа вращений $SO(3)$ и сфера S^2 связано с применением математического аппарата теории представлений компактных групп и характеристических функций, а также специализированных методов математической статистики и представляется актуальной научной проблемой. Даже непосредственное вычисление НР на группе $SO(3)$ и сфере S^2 является непростой вычислительной задачей и для ряда параметров данного класса распределений существующие методы расчета не являются достаточно эффективными. На основе определения и исследования свойств НР на группе $SO(3)$, а также применения центральной предельной теоремы (ЦПТ) на $SO(3)$ в данной работе разработан новый метод математического моделирования НР на основе построения выражений для статистических реализаций (метод Монте Карло), позволяющий с достаточной точностью моделировать указанные распределения в случае произвольных параметров. Проведено сравнение с уже существующими методами расчета на основе разложений Фурье (МРФ) и методом аналитических приближений (МАП).

Необходимо заметить, что в общемировой практике возрастает интерес к моделям Монте Карло в текстурном анализе. Указанные математические модели позволяют более адекватным образом описать процессы формирования и измерения текстуры, а также изучать статистические закономерности этих процессов. Основной задачей количественного текстурного анализа (КТА) является восстановление функции распределения ориентаций (ФРО), характеризующей распределение кристаллитов поликристаллического образца (ПО) в

ориентационном пространстве $SO(3)$, по набору экспериментально измеряемых полусных фигур (ПФ), которые являются функциями на сфере S^2 . В связи с этим актуальной является задача вычисления ФРО и ПФ. Существуют различные способы решения этой задачи. Одним из широко распространенных способов решения является аппроксимация ФРО и ПФ с использованием стандартных функций. В данной работе развивается подход к решению указанной задачи на основе использования в качестве стандартных функций нормальных распределений на $SO(3)$ и S^2 . Проводится построение статистической модели ПФ, соответствующей процессу экспериментального измерения этой величины. С применением данной модели проводятся вычисления ПФ и исследуются вопросы погрешностей вычислений ПФ.

Целью диссертационной работы являлось:

1. Разработка специализированного метода Монте Карло моделирования НР на $SO(3)$ на основе исследования свойства безграничной делимости и применения центральной предельной теоремы на группе $SO(3)$, позволяющего с произвольной точностью аппроксимировать любое распределение из указанного семейства. Обобщение построенного метода на случай группы $SO(m)$.
2. Сравнение разработанного метода Монте Карло расчета НР на $SO(3)$ с альтернативными методами путем проверки гипотезы о совпадении распределений, соответствующих некоторым проекциям НР.
3. Построение математической модели расчета ПФ, адекватной их экспериментальному измерению с использованием сеточно-вероятностного метода на основе алгоритма разработанного метода Монте Карло. Расчет ПФ для ряда значений параметров с помощью данной модели. Оценка погрешностей при расчете ПФ.

Научная новизна

На основе формулировки ЦПТ на группе вращений $SO(m)$ Партасарати разработана новая теория последовательностей вероятностных мер на группе $SO(m)$, сходящихся к нормальному распределению с произвольными параметрами (ЦПТ-последовательностей). Содержанием этой теории является описание вида и свойств таких последовательностей.

Данная теория включает в себя также доказательство некоторых утверждений о скорости сходимости таких последовательностей.

Впервые разработан специализированный метод моделирования НР на $SO(3)$ для произвольных значений параметров. Данный метод обобщен на случай группы вращений произвольной размерности $SO(m)$. Для случая группы $SO(m)$ при $m > 3$ альтернативных методов вычисления НР не существует. В случае $m = 3$ для широкой области параметров разработанный метод дает значительный вычислительный выигрыш по сравнению с альтернативными методами вычисления.

Впервые построен метод статистического моделирования полосных фигур, адекватный их экспериментальному измерению. Данный метод основан на применении вероятностно-сеточных методов с использованием равномерных и неравномерных сеток. ПФ интерпретируется при этом как функция плотности вероятности и моделируется методом Монте Карло. Затем вся совокупность реализаций проектируется на сетку разбиения верхней полусферы. В работе использованы несколько вариантов сеток разбиения, которые являются наиболее близкими к сетке экспериментального разбиения.

На защиту выносятся

1. Теоретическое исследование некоторых свойств последовательностей вероятностных мер на группе $SO(3)$ специального вида (ЦПТ-последовательностей), сходящихся к НР на $SO(3)$ с произвольными параметрами.
2. Метод Монте Карло математического моделирования НР с произвольными параметрами на группе $SO(3)$ на основе приближения данного класса распределений с помощью ЦПТ-последовательностей.
3. Статистическая модель ПФ, соответствующая их экспериментальному измерению.
4. Результаты математического моделирования ПФ с применением равномерных и неравномерных сеток в случае поликристаллического образца без симметрии и при наличии гексагональной симметрии составляющих кристаллитов; результаты математического моделирования погрешностей при вычислении ПФ.

Апробация и публикации

Основные результаты диссертации были доложены на научных сессиях МИФИ (Москва, 2001, 2002, 2003, 2004), конференции “Обратные и некорректно поставленные задачи” (Москва, 2001), конференции International Conference of Texture of Materials (Seoul, 2003). Результаты проведенных исследований изложены в 9 публикациях.

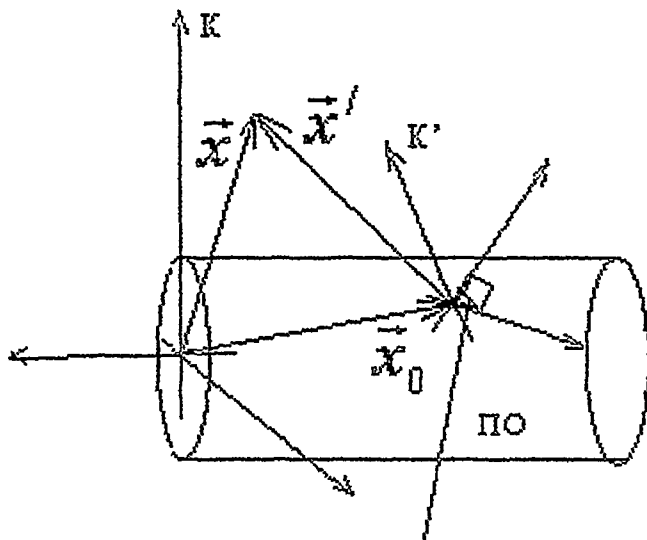
Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, 1 приложения и заключения. Работа изложена на 133 страницах. Включает 31 рисунок, 6 таблиц, 88 наименований литературы.

Содержание работы

В первой главе излагаются основные понятия количественного текстурного анализа такие, как параметризация ориентации отдельного кристаллита в поликристаллическом образце, ФРО и ПФ. Приводятся необходимые сведения о группе вращений $SO(3)$. Рассматривается формулировка основной задачи количественного текстурного анализа и приводится обзор основных методов ее решения. В заключение главы рассматриваются факторы погрешностей при экспериментальном восстановлении и математической обработке ФРО и ПФ, а также определение и классификация нормальных распределений на $SO(3)$.

В параграфе 1.1 рассмотрены существующие различные способы параметризации ориентации отдельного кристаллита в ПО. Данная величина характеризует поворот собственной системы координат, связанной с кристаллитом K' , относительно системы координат K , связанной с ПО в целом (рис.1).



КРИСТАЛЛИТ

Рис. 1. Параметризация ориентации кристаллита

Связь указанных выше систем координат в \mathbb{R}^3 (в предположении совмещения начал координат обеих систем) характеризуется элементом g группы вращений $SO(3)$ в соответствии с соотношением

$$K' = gK. \quad (1)$$

Группа $SO(3)$ является трехмерным многообразием и допускает различные виды параметризаций своих элементов

$$g = g(\varphi, \theta, \psi) = \{\alpha, \beta, \gamma\} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (2)$$

В параграфе 1.2 приведены необходимые сведения о компактной группе ортогональных матриц с определителем равным единице $SO(3)$ из теории представлений групп. Приведены выражения для инвариантной меры dg и матричных элементов $\{^l_{mn}(g)\}_{m,n=-l}^l$, $l = 0, 1, \dots, \infty$ системы представлений на группе. Система представлений на группе $SO(3)$ образует полный ортонормированный базис (ОНБ) пространства $L_2(SO(3))$. Таким образом, любая интегрируемая по модулю в квадрате функция $\int_{So(3)} |f(g)|^2 dg < \infty$ может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m,n=-l}^l C_{mn}^l t_{mn}^l(g), \quad (3)$$

где $t_{mn}^l(g) = \exp(im\varphi + in\psi) P_{mn}^l(\cos\theta)$ - матричные элементы

представлений $T^l(g)$; $C_{mn}^l = (2l+1) \int_{SO(3)} f(g) \overline{t_{mn}^l(g)} dg$ - коэффициенты Фурье;

$$P_{mn}^l(x) = \frac{(-1)^{l-m} i^{n-m} \sqrt{(l+n)!}}{2^l \sqrt{(l-n)!(l+m)!(l-m)!}} (1-x)^{\frac{n-m}{2}} (1+x)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}} (1-x)^{l-m} (1+x)^{l+m}.$$

В параграфе 1.3 рассмотрено определение ФРО $F(g)$ для поликристаллического образца. Данная величина является функцией плотности вероятности, характеризующей (рис. 2) объемную долю кристаллитов ПО, ориентации которых попадают в физически бесконечно малую окрестность $O(g)$ ориентации g

$$F(g) = \lim_{O(g) \rightarrow g} \frac{1}{\int_{O(g)} dg'} \frac{V_{O(g)}}{V} = \frac{1}{V} \lim_{O(g) \rightarrow g} \frac{V_{O(g)}}{\mu(O(g))}, \quad (4)$$

где $V_{O(g)}$ - объем кристаллитов ПО, ориентации которых принадлежат $O(g)$, V - объем ПО.

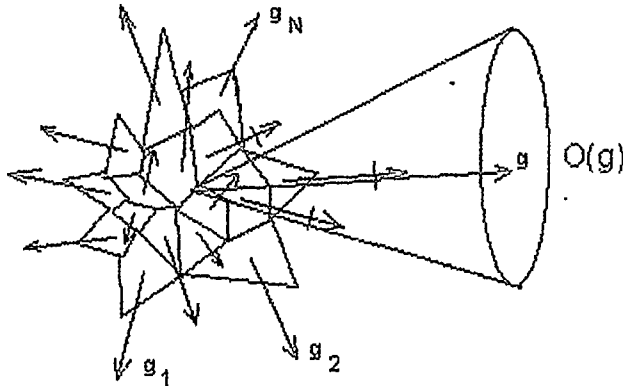


Рис. 2. Интерпретация ФРО

В параграфе 1.4 приведен обзор основных экспериментальных методик измерения текстуры поликристаллических материалов.

Существует два основных экспериментальных подхода. Первый подход состоит в измерении микроструктуры ПО, т.е. ориентаций отдельных участков на соответствующей пространственной сетке разбиения образца. Второй экспериментальный подход состоит в измерении интегральных величин, характеризующих распределение кристаллитов в ПО по ориентациям, связанных с ФРО. Данные интегральные величины получили название полюсных фигур. ПФ являются интегральными проекциями ФРО на сферу S^2 вида

$$P_{\vec{h}_i}(\vec{\gamma}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(F(\{\vec{h}_i, \gamma\}^{-1}\{\vec{\gamma}, 0\}) + F(\{\vec{h}_i, \gamma\}^{-1}\{-\vec{\gamma}, 0\}) \right) d\gamma, \quad i=1, 2, \dots, J, \quad (5)$$

где $\vec{h}_i = \{\beta, \alpha\} \in S^2$ - вектор кристаллографического направления, заданный в сферической системе координат; $\{\vec{h}_i, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \in SO(3)$ - обозначение вращения.

Наиболее распространенным экспериментальным методом измерения ПФ является текстурный дифракционный эксперимент, основанный на явлении брэгговской дифракции на кристаллографических плоскостях исследуемого ПО. В процессе эксперимента измеряется набор ПФ (5), соответствующий серии векторов кристаллографического направления $\vec{h}_i \in S^2, i=1, 2, \dots, J$. После чего ставится задача восстановления ФРО по данному экспериментальному набору. Данная задача является основной задачей КТА.

В параграфе 1.5 приведен обзор современных методов решения основной задачи КТА (5). Необходимо заметить, что по сути своей постановки данная задача принадлежит к классу некорректно поставленных задач, т.к. допускает бесконечное множество решений. Неединственность решения обратной задачи (5) связана с потерями информации при проектировании ФРО на сферу (теряется нечетная составляющая ПФ на S^2).

Основными методами решения основной задачи КТА на сегодняшний день являются:

- Гармонический метод, основанный на разложении ФРО в ряд по системе (3) при этом структура решения имеет вид

$$F(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m, n=-l}^l C_{mn}^l t_{mn}^l(g) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m, n=-l}^l C_{mn}^l t_{mn}^l(g), \quad (6)$$

где $O(2)$ обозначает суммирование по четным значениям индекса $0, 2, 4, \dots, \infty$; при этом первое слагаемое представляет собой ряд по четным l и называется четной частью ФРО, второе слагаемое представляет собой ряд по нечетным l и называется нечетной частью ФРО.

Нечетная часть ФРО не может быть принципиально восстановлена исходя из любого набора экспериментальных ПФ и подбирается в соответствии с некоторыми предположениями о виде текстуры.

- Векторный метод восстановления ФРО состоит в первоначальной дискретизации системы уравнений (5) и последующего решения системы линейных алгебраических уравнений с использованием итерационных алгоритмов.

- WIMV метод (Williams Inhof Mathies Vinei method) аппроксимации ПФ основан на использовании функций вида

$$\prod_{i=1}^l \prod_{m_i}^{M_i} \tilde{P}_{h_i}(g^{-1}h_{m_i}), h_{m_i} = \tilde{g}_b, h_i, \tilde{g}_b, \in G_b,$$

где $g, g_b, \in SO(3)$, G_b - подгруппа вращений точечной подгруппы симметрии кристаллитов.

Данный метод является итерационным сеточным методом аппроксимации ПФ.

- Метод стандартных функций (компонент). Сутью данного метода является аппроксимация ФРО в виде суммы распределений из некоторого семейства плотностей распределений с последующим восстановлением неизвестных параметров. Обычно данный метод восстановления применяется в случае текстур образцов имеющих вид нескольких разделяющихся компонент (максимумов). Первоначально подбираются параметры положения максимумов компонент, а потом остальные параметры распределений членов суммы.

В параграфе 1.6 рассмотрены основные источники погрешностей при экспериментальном измерении ПФ и восстановлении ФРО.

В параграфе 1.7 рассмотрено определение нормальных распределений на $SO(3)$ и их классификация [6]. Распределение вероятностей μ на $SO(3)$ является нормальным, если μ безгранично делимо, не является идемпотентной мерой и может быть представлено в виде:

$$\int_{SO(3)} T_g d\mu(g) = \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} A_i A_j + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i \right\}, \quad (7)$$

где T_g - произвольное представление группы $SO(3)$;
 $\exp\left\{\sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} A_i A_j + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i\right\}$ - функция матричной экспоненты;
 $A_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{v_i(t)} - E}{t}$ - инфинитезимальные операторы этого представления;
 $v_i(t)$ - система однопараметрических подгрупп $SO(3)$; α_{ij} - неотрицательно определенная симметричная матрица; α_i - действительные числа.

В дальнейшем будем обозначать НР μ на $SO(3)$ в виде $\mu \sim N(\|\alpha_{ij}\|, \alpha_i)$. Каноническое нормальное распределение (КНР) имеет диагональную матрицу параметр $\|\alpha_{ij}\|$ и нулевой вектор α_i . У центрального нормального распределения (ЦНР) в дополнение к перечисленным условия все диагональные элементы матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ равны.

Во второй главе рассмотрены свойства НР на $SO(3)$, математическая модель малых случайных вращений, приводящая к рассмотрению данных распределений и теоретическое доказательство утверждений о виде последовательностей, подчиняющихся ЦНТ на $SO(3)$ сходящихся к НР с произвольными параметрами распределения.

В параграфе 2.1 рассмотрены основные свойства НР на $SO(3)$. Доказан факт о существовании канонической системы координат, в базе которой матрица параметров произвольного НР на $SO(3)$ приводится к диагональному виду. Далее приведены выражения для коэффициентов разложения НР по системе представлений (3) группы $SO(3)$. Рассмотрено свойство свертки двух КНР с пропорциональными параметрами. В заключение параграфа приведены формулировки нескольких свойств о характерном виде функции плотности вероятности, соответствующей КНР. Это свойства о величине и положении максимума КНР, а также о симметричных точках области определения данных функций, в которых значения плотности распределения для КНР совпадают. Оказывается, что КНР имеет один максимум в единице группы и численные значения для плотности распределения КНР совпадают в восьми симметричных точках.

В параграфе 2.2 рассматривается математическая модель малых случайных вращений (ММСВ) [1,6]. Предполагается, что на результирующее угловое распределение влияет множество факторов.

Каждому такому фактору ставится в соответствие случайная величина малого вращения, которой соответствует вероятностная мера вида

$$d\mu_n(g) = d\mu_n(\psi, \theta, \varphi) = f_n(\psi, \theta, \varphi) dg,$$

где $f_n(\psi, \theta, \varphi)$ – равномерное распределение в области $\Pi(a_n, b_n)$,

$\Pi(a_n, b_n) = \{(\psi, \theta, \varphi) : (0 \leq \theta < a_n; 0 \leq |\varphi + \psi| < b_n)\}$, т.е.

$$f_n(\psi, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{2}{(1 - \cos a_n) b_n (4\pi - b_n)} \frac{4\pi^2}{(1 - \cos a_n) b_n (4\pi - b_n)} & \text{при } (\psi, \theta, \varphi) \in \Pi(a_n, b_n); \\ 0 & \text{при } (\psi, \theta, \varphi) \notin \Pi(a_n, b_n); \end{cases} \quad (8)$$

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi, \psi \in [-\pi, \pi),$$

где dg – инвариантная мера на $SO(3)$.

Далее рассматривается последовательность композиций из распределений (8) при $a_n = \frac{a}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{b}{\sqrt{n}}$ вида

$$d\mu(g) = d\mu_n^{*n}(g) = \left[\int_{SO(3)} dg_{n-1} f_n(gg_{n-1}^{-1}) \int_{SO(3)} dg_{n-2} f_n(g_{n-1}g_{n-2}^{-1}) \dots \right. \\ \left. \dots \int_{SO(3)} dg_1 f_n(g_2g_1^{-1}) f_n(g_1) dg_1 \right] dg. \quad (9)$$

На основе применения ЦИТ на $SO(3)$ [6] доказывается следующий факт сходимости последовательности (9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{*n} = N \left(\begin{bmatrix} \frac{a^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{ab}{6\pi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (10)$$

Таким образом, построенная композиция распределений (9) сходится к некоторому подсемейству НР на $SO(3)$ с параметрами, определяемыми соотношением (10).

Далее на основе построения выражений для реализаций $\{g_i\}_{i=1}^n$, соответствующих распределению (8), и их тривиальной связи с выражением для реализаций, соответствующих распределению (9), вида

$$g = g_1 * g_2 * \dots * g_n$$

проводится математическое моделирование Монте Карло проекции на отрезок распределения (9) для некоторой сетки параметров объема выборки, показателя свертки и параметра предельного распределения a при фиксированном параметре $b = 1$. Расчет проекции на отрезок предельного распределения (10) проводится также с использованием метода разложения в ряд Фурье с последующей проверкой гипотезы о совпадении вычисленных проекций на отрезок распределений (9), (10) с использованием χ^2 -критерия. Из анализа результатов проведенных вычислений можно сделать вывод о том, что при показателе свертки $n = 20$ и объеме выборки $k = 10000$ реализаций экспериментальные данные моделирования Монте Карло не противоречат гипотезе о совпадении выше указанных распределений при уровне значимости 95%. Моделирование проводилось для широкого диапазона значений параметров предельного распределения от практически равномерного распределения при $a = 10$ до острого распределения, сосредоточенного в единице группы, при $a = 0.01$ (при $a, b \rightarrow 0$ предельное распределение сходится к дельта-функции в единице группы). На рис. 3 представлены результаты вычислений проекций на отрезок функций (9), (10) для случая острого распределения.

Необходимо заметить, что в области параметров $a \ll 1$ метод Монте Карло дает значительный вычислительный выигрыш в сравнении с методом вычисления распределения (10) на основе разложения в ряд Фурье.

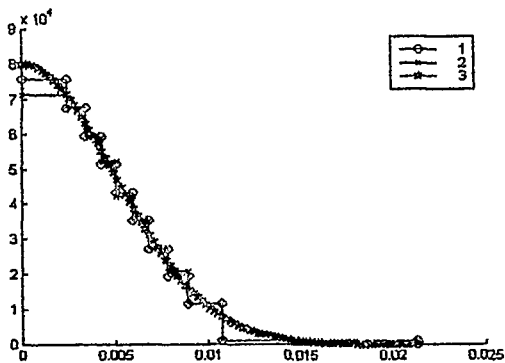


Рис. 3. Проекция на сферу КНР с параметрами $a = 0,01; b = 1$ (случай острого распределения). Гистограмма метода малых вращений (линия 2) и средние значения метода Фурье (линия 1) практически совпадают

В заключение параграфа рассматривается аппроксимация проекции на отрезок ФРО текстуры образца Ni-Ti с использованием ЦНР на $SO(3)$, которое рассчитывается с помощью выше описанного статистического метода.

В параграфе 2.3 рассматривается теория ЦПТ-последовательностей [2,6] на группе $SO(3)$. ЦПТ-последовательность определяется как последовательность вероятностных мер $\mu_n(g)$ на $SO(m)$ такая, что $\mu_n^{*n}(g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\|\alpha_y\|, \alpha_1)$. В качестве основного параметра характеризующего вероятностную меру элемента ЦПТ-последовательности рассматривается матрица среднего по группе

$$\Gamma_\mu = \int_{SO(m)} g d\mu(g) \quad (11)$$

Из класса ЦПТ-последовательностей выделяются два частных случая минимальной и максимальной последовательностей. Для минимальной ЦПТ-последовательности $\mu_n(g, \beta)$ выражение (11) для среднего по группе имеет вид

$$\Gamma_{\mu_n(g, \beta(\alpha))} = e + \frac{1}{n} \alpha e_1^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) f_n, \quad (12)$$

где f_n – последовательность матриц с ограниченными элементами, β – функция-параметр.

Максимальная (общая) ЦПТ-последовательность определяется как семейство последовательностей, зависящее от параметра, позволяющее в пределе соответствующей последовательности n -кратных сверток получить НР на $SO(m)$ с произвольными значениями параметров, т.е.

$$\mu_n^{*n}(g, \beta(\alpha_y, \alpha_1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\alpha_y, \alpha_1). \quad (13)$$

Основным теоретическим фактом, который используется в данном разделе является центральная предельная теорема (ЦПТ) на группе $SO(m)$ [6]. На основе применения указанной теоремы и доказательства цепочки вспомогательных утверждений проводится построение одного из возможных видов максимальной ЦПТ-последовательности. Формулировка теоремы о виде указанной последовательности имеет следующий вид:

Теорема. Пусть

$$\tilde{\mu}_n(g; \gamma) = \tilde{\mu}_n(g; \{g_n^0, g_0, \{\tilde{\alpha}_n\}_{i=1}^k\}) = \delta(g(g_n^0)^{-1}) * \prod_{i=1}^k \mu_n^i(g), \quad (15)$$

где $\mu_n^i(g) = \mu_n((h^i)^{-1} g_0^{-1} g g_0 h^i, \beta(\tilde{\alpha}_n))$, h^i - система матриц вида

$$h^1 = e, h^2 = \frac{1}{\det(h^{1,2})} h^{1,2}, h^i = \frac{1}{\det(h^{1,i} h^{2,i+1})} h^{1,i} h^{2,i+1} \quad i = 3, \dots, m-1, h^m = \frac{1}{\det(h^{2,m})} h^{2,m}. \quad (16)$$

Обозначим через B множество параметров с элементами $\gamma = \{g_n^0, g_0, \{\tilde{\alpha}_n\}_{i=1}^k\}$, $g_n^0 \in \text{SO}(m)$; $g_n^0 \rightarrow e$ - последовательность матриц, $g_0 \in \text{SO}(m)$, $\tilde{\alpha}_n$ - действительные числа.

Пусть $\mu_n(g; \beta) \in M_e$ - минимальная ЦПТ-последовательность; тогда последовательность $\tilde{\mu}_n(g; \gamma)$ является максимальной ЦПТ-последовательностью.

Далее проводится непосредственное построение общей ЦПТ-последовательности для случая групп $\text{SO}(2)$, $\text{SO}(3)$ и $\text{SO}(m)$.

В третьей главе рассматриваются методы вычисления НР на $\text{SO}(3)$, такие как метод рядов Фурье (МРФ), метод аналитических приближений (МАП) и метод ЦПТ-последовательностей (МЦПТП) [2,4,6,8].

В параграфе 3.1 приводится описание метода вычисления НР на $\text{SO}(3)$ на основе вычисления частичных сумм разложения в ряд Фурье по системе (3). Вычисляется приближение к исходной функции вида

$$F_\alpha(g) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathfrak{R}(l, \alpha) \sum_{m,n=-l}^l \tilde{C}_{mn}^l t_{mn}^l(g), \quad (17)$$

где $\mathfrak{R}(l, \alpha)$ - регуляризирующие множители, α - параметр регуляризации.

Параметр регуляризации α выбирается по правилу невязки. В самом простом случае в качестве приближения (17) к функции используется выражение для частичной суммы исходного ряда (3) с удержанием членов до некоторого l_{\max} , который рассматривается в качестве параметра регуляризации. Основным недостатком метода вычисления НР с помощью МРФ является необходимость удержания большого количества членов ряда при аппроксимации КНР с малыми параметрами ($\alpha_n \ll 1$, $i = 1, 2, 3$). Приводятся графические результаты расчета проекций на сферу КНР на $\text{SO}(3)$ для некоторых значений параметров.

В параграфе 3.2 рассматривается метод аппроксимации НР на $SO(3)$ на основе вычисления аналитических приближений (МАП) указанных функций [6]. При малых значениях параметров КНР ($\alpha_{ii} \ll 1$, $i = 1, 2, 3$) данный метод дает значительный вычислительный выигрыш в сравнении с МРФ.

В параграфе 3.3 приводится подробное описание специализированного метода Монте Карло моделирования НР на $SO(m)$, разработанного на основе результатов теории ЦПТ-последовательностей, рассмотренной в параграфе 2.3 диссертационной работы [2, 6, 8]. Сутью данного метода является построение выражения для реализаций, соответствующих вероятностной мере (15) максимальной ЦПТ-последовательности на $SO(3)$ и последующее построение выражения для реализаций, соответствующих вероятностной мере из n - кратных сверток $\tilde{\mu}_n^{*n}(g; \gamma)$ максимальной последовательности (15), которое имеет вид

$$\xi = \prod_{j=1}^n \left[g_n^0 g_0 \left(\prod_{i=1}^m h^i g_i \left(2 \sqrt{\frac{6\tilde{\alpha}_{ii}}{n}} \left(\xi_i^j - \frac{1}{2} \right) \right) (h^i)^{-1} \right) (g_0)^{-1} \right], \quad (18)$$

где $\{h^i\}_{i=1}^m$ - система матриц (16), $g_i(t) = \exp(te_i)$ - однопараметрическая подгруппа $SO(m)$, соответствующая первой матрице в системе касательных матриц $SO(m)$, (вся система $\{g_i(t)\}_{i=1}^k$ нумеруется некоторым специальным образом), ξ_i^j - независимые реализации случайной величины равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

Вычисление функции плотности вероятности с использованием выражения для реализаций (18) является методом аппроксимации НР на $SO(3)$, так как при соответствующем подборе параметра γ вероятностная мера n - кратных сверток $\tilde{\mu}_n^{*n}(g; \gamma)$ максимальной последовательности позволяет в пределе $n \rightarrow \infty$ получить НР на $SO(3)$ с произвольными параметрами.

Далее в разделе исследуется вопрос о скорости сходимости последовательности $\tilde{\mu}_n^{*n}(g; \gamma)$ к НР для частного случая группы $SO(3)$ по показателю свертки последовательности n [3]. На основе анализа асимптотического выражения для вероятностной меры $\tilde{\mu}_n^{*n}(g; \gamma)$

устанавливается факт, что рассматриваемая скорость сходимости имеет порядок $\frac{1}{n}$.

В конце параграфа рассматриваются примеры вычислений проекций на отрезок КНР для n -кратных сверток распределения (15) с использованием метода Монте Карло и соответствующих НР на $SO(3)$ с использованием МРФ с последующей проверкой гипотезы о совпадении распределений с помощью χ^2 -критерия. В качестве проекции на отрезок от функции плотности вероятности КНР $F(g)$ на $SO(3)$ рассматривается величина

$$dP_{\mu(g)}(\theta) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\pi^2} F(\{\varphi, \theta, \psi\}) d\varphi d\psi \right) \frac{1}{2} \sin \theta d\theta, \theta \in [0, \pi]. \quad (20)$$

Для оценки меры расхождения между распределениями используется величина

$$Z = k \sum_{i=1}^{v+1} \frac{(\hat{P}_i - P_i)^2}{P_i}, \quad (21)$$

где \hat{P}_i - экспериментальные частоты попадания в интервалы разбиения

гистограммы, $P_i = \int_{\Delta\beta_i} P_{N(\|\alpha_\psi\|, \alpha_i)}(\theta) \frac{\sin \theta}{2} d\theta$ являются средними

значениями по отрезкам гистограммы точного распределения (вычисляется с помощью МРФ).

Вычисления проводятся для параметров объема выборки $k = 10000$ и показателя свертки $n = 20$ и некоторых значений параметров КНР. На рис. 4 приведены результаты вычислений функций (20) для значений параметров КНР $\alpha_{11} = 1/4$; $\alpha_{22} = 1/16$; $\alpha_{33} = 0$ (график для функции плотности распределения и вероятностных частот по множествам разбиения гистограммы). Для МРФ все величины рассчитываются с относительной погрешностью $\delta = 0.01$.

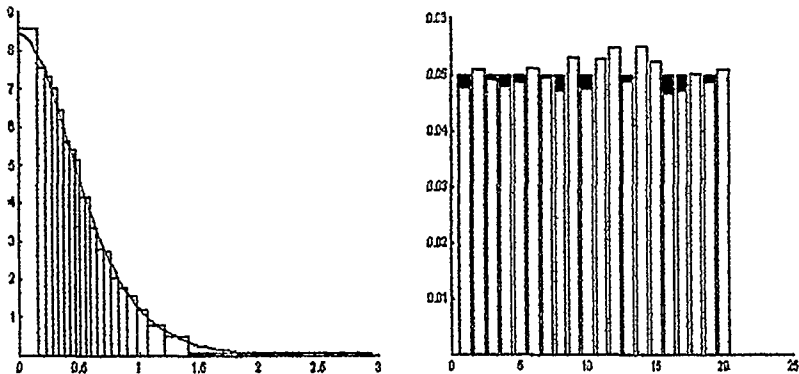


Рис. 4. Оценка расхождения в расчете КНР с параметрами $\alpha_{11} = 1/4; \alpha_{22} = 1/16; \alpha_{33} = 0$ альтернативными методами МРФ и МЦПТТ $Z = 24.1$

В приведенном на рис. 4 случае гипотеза о совпадении выше указанных распределений не противоречит опытным данным при уровне значимости 95%. Критическое значение меры (21) $Z_{\text{крит}} = 31.4$.

На основе содержания параграфа 3.3 делается вывод об эффективности и преимуществах метода ЦПТ-последовательностей в сравнении с существующими методами МРФ и МАП. Метод ЦПТ-последовательностей также является более эффективным, чем МРФ в случае вычисления КНР в области малых параметров ($\alpha_{ii} \ll 1, i = 1, 2, 3$). В отличие от МАП и МРФ данный метод позволяет вычислять НР на общей группе $SO(m)$ для произвольных параметров и проводить построение статистических моделей Монте Карло, описывающих характеристики текстурных образцов. Некоторые примеры указанных моделей рассмотрены в последующих разделах диссертационной работы.

В четвертой главе рассматриваются некоторые применения построенного специализированного метода Монте Карло вычисления НР на $SO(3)$ к расчету ПФ текстурных образцов на основе построения соответствующих математических моделей поликристаллического образца [5,7,8,9].

В параграфе 4.1 излагается вероятностно-статистическая интерпретация ПФ [5]. Рассматривается связь случайных величин вращения $g \in SO(3)$ и его проекциями на сферу $\vec{y} \in S^2$ при

фиксированном значении кристаллографического вектора \vec{h}_i , на основе анализа выражения для ПФ (5). ФРО и ПФ рассматриваются при этом как функции плотности вероятности. Связь выше указанных случайных величин выглядит при этом следующим образом

$$\vec{y} \parallel \vec{h}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y} = g^{-1} \vec{h}_i \\ -\bar{y} = g^{-1} \vec{h}_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, J. \quad (22)$$

В случае учета симметрий число проекций увеличивается и совпадает с числом элементов подгруппы вращений точечной группы симметрии кристаллитов рассматриваемого ПО.

В параграфе 4.2 рассматривается метод статистического моделирования ПФ, соответствующий их экспериментальному измерению. Поликристаллический образец представляется в виде совокупности кристаллитов одинакового объема, которым соответствует множество ориентаций вида

$$PS = \{g_i\}_{i=1}^k, \quad g_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}, \quad g_i \in SO(3). \quad (23)$$

Число кристаллитов k является для реальных образцов достаточно большой величиной, поэтому данные образцы описывают статистически с помощью ФРО. Суть построенной математической модели состоит в изначальном предположении о виде ФРО и последующем моделировании совокупности ориентаций (23) с помощью метода Монте Карло. В качестве ФРО рассматривается взвешенная сумма КНР на $SO(3)$

$$F(g) = \sum_{l=1}^N k_l N(\|\alpha_{jl} \delta_{jl}\|, 0), \quad j, l = 1, 2, 3. \quad (25)$$

При этом фактически множество (23) представляет собой совокупность реализаций (18). Далее для того, чтобы вычислить ПФ множество реализаций проектируется на единичную сферу с использованием связи (22). Заключительным этапом математического моделирования ПФ является построение сеточного приближения (гистограммы) к ПФ с применением разбиения верхней полусферы P наиболее приближенного к сетке экспериментального измерения ПФ на текстурных дифрактометрах TEX-2 (Geesthacht, Германия) и НСВР (Дубна, Россия). Фактически, подсчитывается число реализаций для каждого множества сетки разбиения верхней полусферы с последующей оценкой среднего значения по этому множеству. Визуализация расчетов математической модели проводится либо в виде поверхностей уровня стереографической проекции функции, натянутой на сеточную аппроксимацию ПФ, либо непосредственно в виде двумерных гистограмм

построенных на разбиении единичного круга, которое является проекцией соответствующего разбиения (рис. 7) на S^2 .

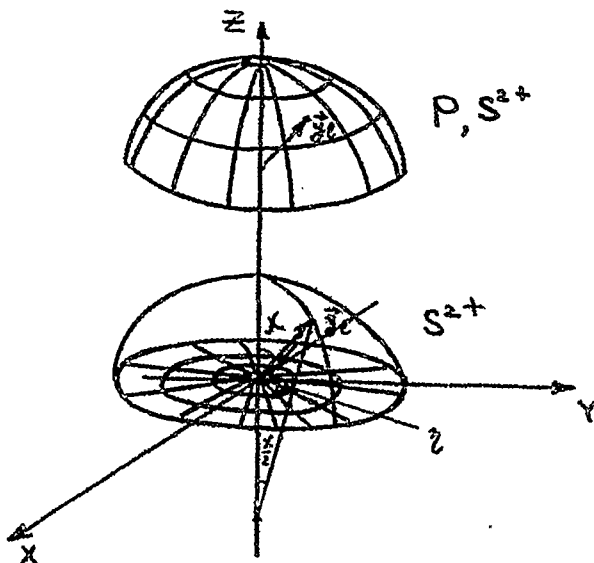


Рис. 7. Проектирование реализации $\bar{y} \in S^{2+}$ статистического метода и сетки разбиения на единичный круг методом стереографической проекции

В параграфе 4.3 рассматривается применение построенного в разделе 4.2 метода моделирования для случая вычисления ПФ без учета симметрии с применением неравномерной сетки разбиения. Предполагается, что ФРО образца имеет вид КНР (7)

$$F(g) = N(\|\alpha_{jl} \delta_{jl}\|, 0), \quad j, l = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Проводится математическое моделирование Монте Карло ПФ с применением сетки разбиения верхней полусферы $P = \{g_0, \{g_{jl}\}_{j=1}^{N_teta} \}_{j=1}^{N_fi}$ подобранной исходя из множества выборки, таким образом, чтобы в каждое множество разбиения попадало равное число реализаций k_{hist} . Это число связано с параметрами сетки разбиения следующим образом

$$k = k_{hist} (N_teta \cdot N_fi + 1), \quad (30)$$

где k - объем выборки статистического метода (18).

Вычисление ПФ осуществлялось для фиксированных параметров сетки разбиения $N_teta = 18$, $N_fi = 36$ при значении показателя свертки статистического метода (18) $n = 25$ и параметре числа реализаций в каждом из множестве разбиения гистограммы $k_{hist} = 400$. На рис. 9 приведены результаты вычисления ПФ для одного набора параметров ФРО (27) и кристаллографического вектора $\vec{h} = \vec{e}_y$.

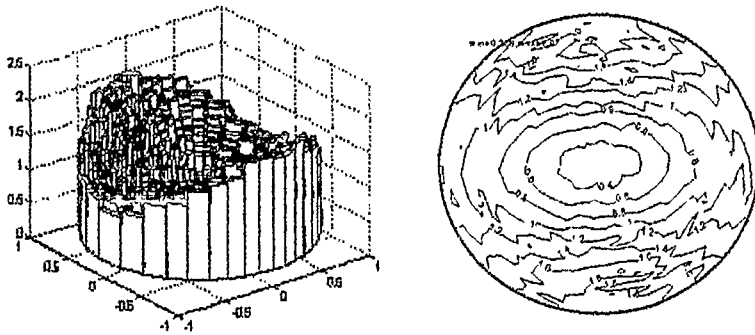


Рис. 9. Модельные полюсные фигуры для КНР

$$\alpha_{11} = 0.1, \alpha_{22} = 0.2, \alpha_{33} = 0.4.$$

В параграфе 4.4 рассматривается оценка погрешности метода, построенного в разделе 4.2, с помощью вычисления меры расхождения между несколькими ПФ при фиксированных параметрах ФРО. ФРО образца имеющего гексагональную симметрию составляющих кристаллитов аппроксимируется в виде ЦНР (7)

$$F(g) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} N(\|\alpha\delta_j\|, 0; g_{B_j}, g), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (32)$$

где $g_{B_j} \in G_B = D_6 = \{g_{B_j}, j = 1, 2, \dots, 12\}$ - подгруппа вращений точечной группы симметрии кристаллитов D_{6h} .

Мера расхождения оценивается с помощью выражения

$$\delta RP_i(\varepsilon; P_1, P_2) = 2 \sum_{\tau \in P'} \frac{|\bar{P}_1^\tau - \bar{P}_2^\tau|}{\bar{P}_1^\tau + \bar{P}_2^\tau} \Big|_{\vec{h}=\vec{h}_i}, \quad (33)$$

где $\bar{P}^\tau = \frac{1}{\mu(V_\tau)} \int_{\vec{y} \in V_\tau} P(\vec{y}) d\Omega(\vec{y})$ - среднее значение ПФ по множеству разбиения V_τ , P_1, P_2 - две вычисленные ПФ для фиксированных параметров метода.

Проводилось вычисление трех ПФ $P_{\vec{h}_i}^{MCLTS1}$, $P_{\vec{h}_i}^{MCLTS2}$, $P_{\vec{h}_i}^{MRF}$ с применением равномерной 5-ти градусной сетки разбиения верхней полусферы V_τ ; первые две вычислялись с помощью статистического метода ЦПТ-последовательностей (18), третья - с применением метода рядов Фурье (6). Исследовалась зависимость поведения трех величин вида (33) $\delta RP(P_{\vec{h}_i}^{MCLTS1}, P_{\vec{h}_i}^{MRF})$, $\delta RP(P_{\vec{h}_i}^{MCLTS2}, P_{\vec{h}_i}^{MRF})$, $\delta RP(P_{\vec{h}_i}^{MCLTS2}, P_{\vec{h}_i}^{MCLTS1})$ от объема выборки метода ЦПТ последовательностей (18) при значении показателя свертки $n=20$ и фиксированном параметре МФФ (17) $l_{\max} = 50$ для нескольких значений параметра α ФРО (32) и кристаллографического вектора \vec{h} моделируемых ПФ. Параметр объема выборки изменялся от значения $k=1000$ до значения $k=10000$ реализаций с шагом $\Delta k = 1000$. На рис. 10 приведены некоторые из результатов моделирования указанной зависимости для значения параметра ФРО $\alpha = 0.0625$ и кристаллографического вектора $\vec{h} = \left\{ \frac{\pi}{2}, 0 \right\} = \vec{e}_y$.

Из анализа всех полученных численных данных можно сделать общий вывод, что при увеличении параметра объема выборки разброс значений полюсных фигур убывает и при объеме выборки 10000 реализаций уровень относительной погрешности построенного статистического метода моделирования ПФ составляет не более чем 22%.

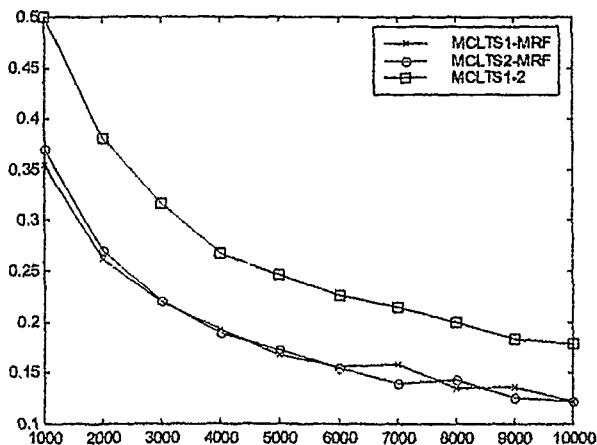


Рис. 10. Зависимость величины (33) разброса значений между ПФ от объема выборки для параметра ФРО $\alpha = 0.0625$ и кристаллографического вектора $\vec{h} = \vec{e}_y$:

Линия MCLTS1-MRF – разброс между ПФ, вычисленной с помощью метода ЦПТ-последовательностей, и ПФ, полученной с помощью МРФ;

Линия MCLTS2-MRF – разброс между повторно вычисленной ПФ с помощью метода ЦПТ-последовательностей и ПФ, полученной с помощью МРФ;

Линия MCLT1-2 – разброс значений между двумя ПФ, вычисленными с помощью метода ЦПТ-последовательностей.

В параграфе 4.5 рассматривается пример моделирования двухкомпонентной текстуры бериллия, имеющего гексогональную симметрию кристаллитов [9] с вычислением эффективного физического свойства тензора упругой податливости. Моделирование проводится применительно к описанию реального набора экспериментальных ПФ для кристаллографических векторов $\vec{h} = e_z = \{0002\}$ и $\vec{h} = \vec{e}_y = \{10\bar{1}0\}$, изображенного на рис. 11.

Для описания текстуры исследуемого материала используется метод стандартных функций (компонент). ФРО аппроксимируется в виде взвешенной суммы двух нормальных распределений

$$F(g) = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \left\{ k_1 N(\|\alpha_j \delta_j\|, 0; g_B, gg_1) + k_2 N(\|\beta_j \delta_j\|, 0; g_B, gg_2) \right\} \quad (34)$$

где $g_1, g_2 \in SO(3)$ - некоторые фиксированные вращения, соответствующие сдвигам центров распределений, $g_B \in G_B = D_6 = \{g_B, j=1,2,\dots,12\}$ - подгруппа вращений точечной группы симметрии кристаллитов D_{6h} .

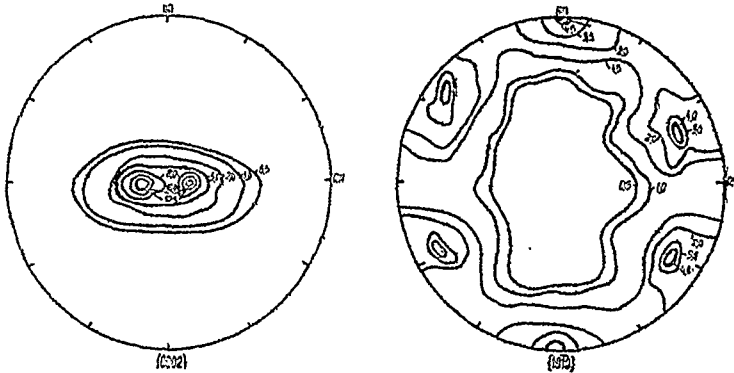


Рис. 11. Набор экспериментальных ПФ Бериллия

С использованием метода, описанного в разделе 4.2, проводится математическое моделирование двух серий ПФ для соответствующих экспериментальному набору кристаллографических векторов с последующей оценкой меры расхождения δRP (33) между ними.

Вычисления проводились для объема выборки статистического метода $k = 30000$ реализаций и показателя свертки $n = 20$ при значениях весовых коэффициентов $k_1 = 0.6, k_2 = 0.4$ и матриц сдвигов центров распределений компонент $g_1 = \{0, -0.3367, 0\}$ и $g_2 = \{0, 0.2977, 0\}$. Графические результаты моделирования представлены на рис. 12, 13.

Из визуального сравнения полученных модельных (рис. 12, 13) и экспериментальных ПФ (рис. 11) можно сделать вывод о применимости данного метода к решению задач текстурного анализа и адекватности математической модели ПФ процедуре их экспериментального измерения. По результатам полученной меры расхождения (33) можно также сделать вывод об экспериментальной проверке сходимости статистического метода моделирования. При объеме выборки $k = 30000$ величина δRP не превышает значения 4,65%. Данной точности вычислений вполне достаточно для решения основной задачи текстурного анализа.

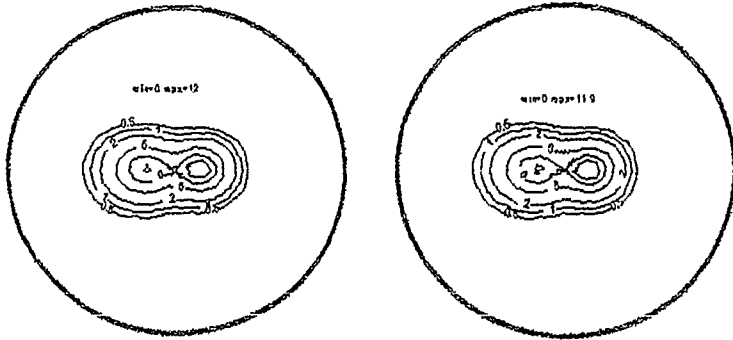


Рис. 12. Результаты моделирования ПФ для $\vec{h} = e_z = \{0002\}$ и параметров КНР $\alpha_{11} = 0.023, \alpha_{22} = 0.037, \alpha_{33} = 0.023, \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0.18$.

Мера расхождения $\delta RP = 4,50\%$.

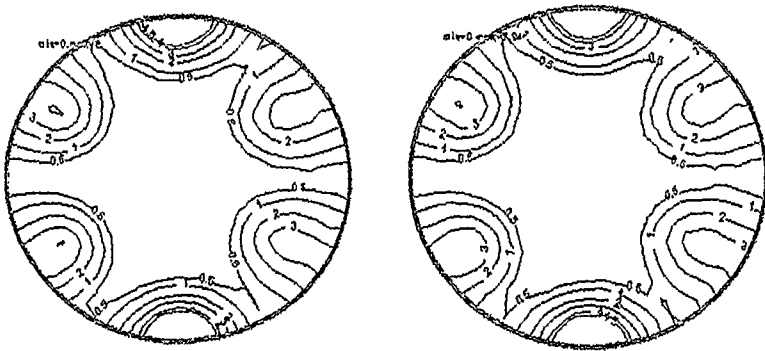


Рис. 13. Результаты моделирования ПФ для $\vec{h} = \vec{e}_y = \{10\bar{1}0\}$ и параметров КНР $\alpha_{11} = 0.023, \alpha_{22} = 0.037, \alpha_{33} = 0.023, \beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0.18$. Мера расхождения $\delta RP = 4,65\%$.

Для тех же параметров ФРО (34) бериллия проводится вычисление аппроксимации Фойгта эффективного физического свойства, описываемого тензором упругой податливости. В данной аппроксимации эффективное свойство приравнивается среднему свойству по поликристаллу. Выражение для среднего значения физического свойства \bar{P} по поликристаллическому образцу имеет вид

$$\bar{P} = \frac{1}{V} \int_V P(\vec{r}) dV = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{E}} P(g) \int_{V(g)} dV = \int_{SO(3)} P(g) \mu(g) dg,$$

которое в случае вычисления среднего значения тензора упругой податливости \overline{S}_{ijkl} , описываемого тензором 4-го ранга, приводится к виду

$$\overline{S}_{pqst} = \int_{SO(3)} g_{pp'} g_{qq'} g_{ss'} g_{tt'} S_{pqst}^0 F(g) dg, \quad p, p', q, q', s, s', t, t' = 1, 2, 3, \quad (35)$$

где S_{pqst}^0 - значение тензора упругой податливости в системе координат кристаллита, $F(g)$ - ФРО.

С математической точки зрения вычисление среднего физического свойства (35) сводится к отысканию математического ожидания этого свойства по функции плотности вероятности, которая является ФРО. В работе вычисление свойства \overline{S}_{ijkl} , представленного в виде интеграла (35), проводится методом Монте Карло с использованием построенного в разделе 3.3 алгоритма статистического моделирования НР на $SO(3)$. Вычисления проводились при параметрах объема выборки $k = 10000$ реализаций и показателе свертки $n = 20$. Результаты проведенных расчетов приведены в виде одномерных графиков зависимостей обратной величины модуля Юнга (коэффициента растяжения) от направления воздействия \vec{r}

$$E^{-1}(\vec{r}) = \overline{S}_{pqst} r_p r_q r_s r_t, \quad p, q, s, t = 1, 2, 3,$$

представляющих собой срезы указательной поверхности тензора \overline{S}_{ijkl} .

С целью оценки погрешности полученного результата среднего значения \overline{S}_{ijkl} проводилось вычисление величины максимальной относительной погрешности вычисления компонент тензора \overline{S}_{ijkl} с помощью метода Монте Карло, вероятность превысить которую составляет 0.003 % (использовалось правило 3-х сигм), т.е. пренебрежимо мала. В случае проведенных расчетов данная величина составляет 10.5%.

В заключении приводится информация о результатах диссертационной работы. Основными результатами работы являются:

1. Построение статистической модели малых случайных вращений, описывающей процесс формирования углового распределения в поликристаллическом образце в предположении многофакторного физического воздействия.
2. Построение новой теории ЦПТ-последовательностей, описывающей общий вид и свойства класса последовательностей

вероятностных мер на $SO(3)$, сходящихся к НР на $SO(3)$ с произвольными параметрами распределения. Обобщение данной теории на случай общей группы $SO(m)$.

3. Разработка метода Монте Карло моделирования НР на $SO(3)$ с произвольными параметрами (6 независимых параметров). Сравнение с уже существующими методами вычисления: методом рядов Фурье и методом аналитических приближений.

4. Разработка статистической модели ПФ. Моделирование ПФ с применением специально разработанной неравномерной сетки разбиения. Моделирование зависимости погрешности вычисления ПФ от объема выборки. На основе обобщения результатов показано, что при объеме выборки 10000 реализаций относительная погрешность вычисления ПФ с использованием статистической модели не превышает 22%. Моделирование двухкомпонентной текстуры материала применительно к описанию набора 2-х экспериментальных ПФ для ленты бериллия 99,95 % чистоты с вычислением эффективного физического свойства, описываемого с помощью тензора упругой податливости. Разработка комплекса программ вычисления НР на $SO(3)$ и ПФ от данных распределений для среды MATLAB 5.2.

Автор работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю Т.И. Савеловой за всестороннюю поддержку в течение подготовки научных работ по теме диссертации и рукописи диссертации, Ю.А. Перловичу за полезные консультации по поводу различных аспектов рентгеновского текстурного эксперимента, а также А.В. Кряневу и Д.И. Николаеву за ценные обсуждения в процессе работы над диссертационной темой.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Боровков М.В., Савелова Т.И. Аппроксимация класса канонических нормальных распределений методом случайных вращений // Заводская лаборатория, 2002. Т. 68. № 2. С. 16-21.

2. Боровков М.В., Савелова Т.И. Вычисление нормальных распределений на группе вращений методом Монте-Карло // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2002. Т. 42. № 1. С. 112-128.

3. Боровков М.В., Савелова Т.И. Оценка скорости сходимости для общей ЦПТ-последовательности на группе $SO(3)$ // Научная сессия МИФИ-2001. Сборник научных трудов. Т.7. С.96. М: МИФИ, 2001.

2007-4

17063

4. Боровков М.В., Савелова Т.И. Некорректность вычисления нормальных распределений на $SO(3)$ и новый метод их статистического моделирования // Обратные и некорректные задачи: VII конф., посв. памяти академика А. Н. Тихонова в связи с 95-летием со дня рождения: М., МГУ им. М. В. Ломоносова. Тезисы докладов. М.: МАКС Пресс, 2001.

5. Боровков М.В. Моделирование полюсных фигур методом ЦПТ-последовательностей // Научная сессия МИФИ-2002. Сборник научных трудов. Т.7. С.85-86. М.: МИФИ, 2002.

6. Боровков М.В., Савелова Т.И. Нормальные распределения на $SO(3)$. М.: МИФИ, 2002.

7. Боровков М.В. Модельное исследование разброса значений полюсных фигур в случае гексогональной симметрии поликристаллического материала // Научная сессия МИФИ-2003. Сборник научных трудов. Т. 7. С. 82-83. М.: МИФИ, 2003.

8. Borovkov M.V., Savyolova T.I. Optimization of neutron texture experiment by statistical simulation of pole figures with normal distribution // Materials Science Forum, 2002. V. 408-412. P. 197-202.

9. Боровков М.В. Моделирование полюсных фигур бериллия методом Монте-Карло в случае двух разделяющихся компонент // Научная сессия МИФИ-2004. Сборник научных трудов. Т.7. С.142-143. М.: МИФИ, 2004.

Подписано в печать 05.04.2004 г.

Формат 60 x 90/16. Объем 1.0 п.л. Тираж 80 экз. Заказ № 0704041

Оттискировано в ООО «САТУРН мпю»
111020, Москва, Авиамоторная ул., 11