

10-2005-191

На правах рукописи

**АКИШИНА**  
Елена Павловна

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ  
И АНАЛИЗА ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ  
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва 2005

Диссертационная работа выполнена в Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований.

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук,  
профессор

В.В. Иванов

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор

А.В. Крянев

доктор физико-математических наук,  
профессор

Р.В. Полозов

**Ведущая организация:** Российский университет дружбы народов

Защита состоится "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2006 г. в "\_\_\_\_\_" на заседании диссертационного совета Д-212.130.09 в Московском инженерно-физическом институте (государственном университете) по адресу: 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского инженерно-физического института.

Автореферат разослан "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2006 г.

**Ученый секретарь**

диссертационного совета  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Леонов А.С.

2006-4  
29708

2 262921

## Общая характеристика диссертации

В настоящей работе автором развиты новые методы моделирования и анализа цифровых изображений для решения конкретных задач в области ядерной энергетики и медицины. Диссертация состоит из двух основных частей:

- первая часть посвящена разработке новых алгоритмов фильтрации изображений, получаемых с помощью оптической когерентной томографии (ОКТ) поверхностного слоя кожи пациента, и системы управления базой данных (СУБД) для хранения и анализа ОКТ-изображений;
- во второй части развит новый подход на основе клеточных автоматов (КА) для изучения структур, формирующихся в поверхностном слое уранового диоксида в процессе его выгорания в атомных электростанциях.

### Актуальность работы

В течение последних 20 лет особый интерес вызывают исследования физических принципов, позволяющих построить устройства для получения изображения поверхностного слоя микроструктуры кожи без опасного воздействия на организм пациента. В работах [1, 2] развито новое применение оптической когерентной томографии для анализа микроструктуры кожи в режиме реального времени и разработан прибор для оперативного и безопасного контроля состояния поверхностного слоя кожи.

Анализ первых ОКТ-изображений показал, что их искажения вызваны главным образом хаотическим рассеиванием света в поверхностном слое кожи. Для повышения надежности диагноза необходимо улучшить качество ОКТ-изображений без потери полезной информации.

Формирование пространственных структур в результате сильного выгорания уранового диоксида (так называемых гш-структур) привлекает к себе большое внимание ввиду возможности их катастрофического влияния на безопасные условия работы современных ядерных станций. Этот процесс представляет большой научный интерес из-за того, что механизм формирования гш-структур и изменение соответствующих параметров до сих пор неизвестны (смотри, например, [10]-[14] и ссылки там же).

### Цель работы

Целью настоящей работы является разработка новых методов моделирования и анализа изображений и их применение в конкретных задачах ядерной энергетики и медицины.



## Научная новизна

1. Разработан новый стохастический фильтр для обработки ОКТ-изображений с резкими скачками интенсивности.
2. Развит новый подход на основе КА для моделирования эволюции структур поверхностного слоя уранового топлива в процессе его сильного выгорания.
3. На основе КА разработаны новые алгоритмы для обработки изображений структур поверхностного слоя уранового топлива.
4. Получены количественные характеристики поверхностных структур уранового топлива, важные для построения физической модели изучаемого процесса.
5. Вычислены фрактальные размерности поверхностных структур уранового топлива для различных степеней выгорания, позволяющие установить момент начала формирования гит-структур.

## Практическая ценность

Разработанный стохастический фильтр обеспечивает надежное восстановление характерных контуров и деталей реальных изображений, что облегчает установление медицинского диагноза. Для хранения и анализа информации о пациентах, пятнах на их коже и соответствующих томограммах разработана СУБД. Фильтр и СУБД интегрированы в программное обеспечение ОКТ-прибора.

Новый подход на основе КА для обработки поверхностных структур  $UO_2$  позволил выполнить моделирование динамики поверхностных структур и получить характеристики для различных степеней выгорания уранового топлива, важные для построения реалистичной физической модели.

Показано, что фрактальная размерность микрофотографий является численной характеристикой, позволяющей установить момент начала формирования гит-перехода. Это позволяет контролировать процесс выгорания топлива. Такой контроль особенно важен с практической точки зрения, так как использование топлива при высоких степенях выгорания может дать заметный экономический эффект.

## Апробация диссертации

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах ЛВТА, ЛИТ, кафедры математики строительного факультета Технического Университета г. Кошице (Словацкая Республика) и на различных международных конференциях, в том числе:

- 1st International Conference “Modern Trends in Computational Physics”, Dubna, Russia, June 15-20, 1998.
- Workshop “Computational Tools and Industrial Applications of Complexity”, Moscow, March 24-29, 1999.
- 2nd International Conference “Modern Trends in Computational Physics”, Dubna, Russia, July 24-29, 2000.
- International Conference on Unconventional Models of Computation, Brussels, November 2000.
- V Int. Congress on Mathematical Modeling, September 30-October 6, 2002, Dubna, Moscow region, Russia.
- WSEAS 2003 Conferences in Rhodes, Greece, November 15-17, 2003.
- XX Int. Symposium on Nuclear Electronics & Computing (NEC’2005), Varna, Bulgaria, September 12-18, 2005.

## **Публикации**

В основу диссертации положено 14 работ, опубликованных в течение 1998-2005 годов как в реферируемых журналах:

- Computer Physics Communications [CPC00],
- Journal of Computational Methods in Applied Sciences and Engineering [CMSE02, CMSE04],
- Chaos, Solitons & Fractals [CSF03],
- Particles & Nuclear, Letters [PNL04],
- WSEAS Transactions on Computers [WSEAS03]

и материалах международных конференций [МТСП98, МТСП00, УМС2К, VICMM02, NEC2005], так и в виде препринтов и сообщений ОИЯИ [JINR99, JINR03, LIT03].

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация содержит 4 главы, два приложения, список литературы (87 ссылок) и имеет объем 134 страницы.

## **Содержание по главам**

В **Главе 1** обсуждается актуальность конкретных задач из области ядерной энергетики и медицины, которые рассматриваются в настоящей работе. Кроме того, дается краткое изложение содержания диссертации по главам.

В Главе 2 рассмотрен новый стохастический фильтр для ОКТ-изображений, а также дано описание СУВД для хранения и анализа информации об ОКТ-изображениях.

На рис. 1 представлена схема прибора для получения ОКТ-изображений поверхностного слоя кожи. Прибор выполнен на основе интерферометра Май-кельсона

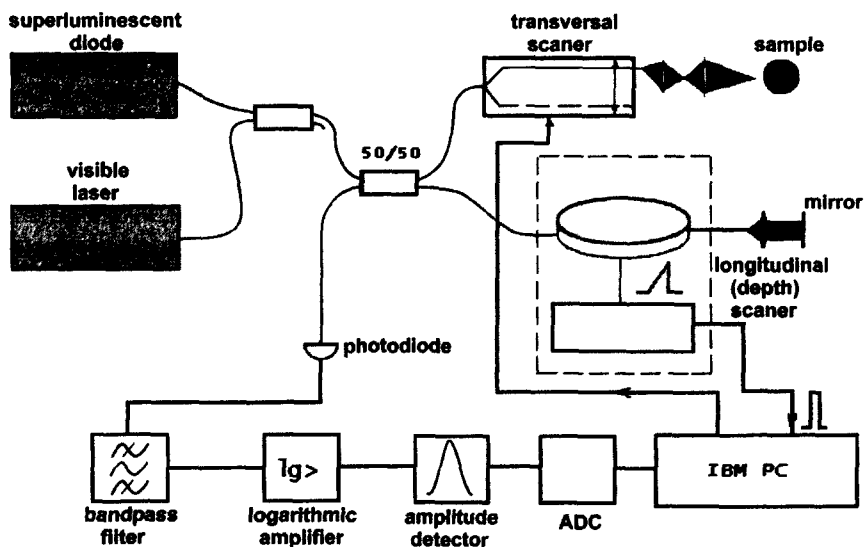


Рис. 1: Схема быстро-сканирующего ОКТ-прибора

кельсона [3]. Анализируемый образец помещается в одно из плечей интерферометра в качестве рассеивающего объекта. Интерференционный сигнал пропорционален коэффициенту отражения нерассеивающей компоненты внутри анализируемого образца. Пространственное разрешение в продольном направлении (вглубь образца) примерно совпадает с когерентной длиной ( $\sim 10^{-7}$  м), а в поперечном направлении определяется радиусом фокусного пятна, которое обычно меньше  $20 \times 10^{-6}$  м. Получаемый интерференционный сигнал проходит стадии аналоговой и цифровой обработки. Последующая визуализация сигнала позволяет получить в реальном времени оптические томограммы.

С помощью интерфейсной карты ОКТ-прибор подключается к персональному компьютеру, а специализированное программное обеспечение позволяет управлять ОКТ-прибором.

Так как основные искажения исследуемых изображений связаны с хаотическим рассеиванием света в поверхностном слое кожи, был разработан специальный стохастический фильтр (рассмотренный ниже), позволяющий исправить

подобные искажения. Допустим, что  $\zeta(x)$  есть интенсивность неповрежденно-го сигнала в точке  $x = (x_1, x_2)$ . В результате хаотического рассеивания света тканью кожи мы получаем зашумленный сигнал  $\xi$ . Эффект хаотического рассеивания может быть представлен стохастическим полем  $\eta$ , которое нужно отфильтровать от измеренного сигнала  $\xi$ . Фильтр дает оценку  $\tilde{\xi}(x)$  исходного сигнала  $\zeta(x)$ , полученную на основе измеренных данных  $\{\xi^\mu(x), \mu = 1, \dots, M\}$ . Здесь  $M$  - это число ОКТ-изображений, полученных с одного и того же места на коже пациента.

Полагаем, что процесс  $\eta(x)$ , удовлетворяет следующим условиям: 1)  $\eta$  аддитивна в каждой точке цифрового изображения, 2)  $\eta$  имеет одинаковое распределение по всему изображению, 3)  $\eta$  имеет нулевое среднее значение, 4)  $\eta$  имеет дисперсию  $\sigma^2$ , 5) между различными точками изображения отсутствуют корреляции. Из условий 1) и 2) получим:

$$\xi^\mu(x) = \zeta(x) + \eta^\mu(x), \quad \mu = 1, \dots, M.$$

Для фильтрации изображения представим его на дискретной решетке и рассмотрим интенсивности сигнала в узлах решетки. Выберем рабочее окно (круглое или прямоугольное) с центром в анализируемой точке  $c = (c_1, c_2)$ . Узлы в пределах рабочего окна с центром в  $c$  могут быть представлены в виде  $\{x \mid x^\nu = z^\nu + c, \nu = 1, \dots, N\}$ . Индекс  $\nu = 1, \dots, N$  обозначает номер точки выбранного окна, а  $z^\nu = (z_1^\nu, z_2^\nu)$  - это координаты точки в пределах окна относительно центра  $c$ .

Оценка  $\tilde{\zeta}(c)$ , полученная на основе измеренных сигналов  $\{\xi^\mu(x), \mu = 1, \dots, M\}$ , определяется следующим линейным фильтром:

$$\tilde{\zeta}(c) = \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^N W^\mu(z^\nu) \xi^\mu(z^\nu + c), \quad (1)$$

где  $W^\mu(z^\nu)$  - веса, для определения которых рассматриваются специальные случаи, а именно, когда на вход фильтра подаются только неповрежденные сигналы, или только стохастический шум.

Мы приближаем исходный сигнал в пределах выбранного окна на конечном наборе базисных функций от двух переменных относительно центра  $c$ :

$$\bar{\zeta}(x) = \sum_{k=1}^K A_k g_k(x - c) = \sum_{k=1}^K A_k g_k(z). \quad (2)$$

В случае полиномиального базиса имеем

$$\bar{\zeta}(x_1, x_2) = \sum_{0 \leq n+m \leq L} A_{nm} (x_1 - c_1)^n (x_2 - c_2)^m. \quad (3)$$

Если сигнал незашумлен и является полиномом степени не больше  $L$ , то мы требуем, чтобы оценка  $\tilde{\zeta}$  совпадала с исходным сигналом, то есть  $\zeta = \tilde{\zeta}$ . Таким образом, для сигналов  $\zeta(x)$ , представляющих собой линейные комбинации

базисных функций  $g_k(x - c)$ , имеем:

$$g_k(0) = \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^N W^\mu(z^\nu) g_k(z^\nu), \quad k = \overline{1, K}, \quad (4)$$

или

$$g_k(0) = \left( \sum_{\mu=1}^M \mathbf{W}^\mu \right) \cdot \mathbf{g}_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{W}^\mu = (W^\mu(z^1), \dots, W^\mu(z^N)), \quad \mathbf{g}_k = (g_k(z^1), \dots, g_k(z^N)). \quad (6)$$

Обозначим через

$$\tilde{\zeta}_m(z) = \sum_{k=1}^K \alpha_k g_k(z) \quad (7)$$

оптимальную оценку сигнала  $\zeta(c + z)$ , связанную с выбранным окном и которая вычисляется исходя из минимума ошибки по всему окну.

Разница между оценкой  $\tilde{\zeta}$  на основе (2) и исходным сигналом в центре с:

$$\zeta(c) - \tilde{\zeta}(c) = \zeta(c) - \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \zeta(z^\nu + c). \quad (8)$$

Используя (7), представим ошибку приближения в виде разности

$$\epsilon(c + z) = \zeta(c + z) - \tilde{\zeta}_m(c + z), \quad (9)$$

которая связана с оптимальной оценкой  $\tilde{\zeta}_m$  (7). Следовательно,

$$\begin{aligned} \zeta(c) - \tilde{\zeta}(c) &= \zeta(c) - \tilde{\zeta}_m(c) + \sum_{k=1}^K \alpha_k g_k(c) - \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \zeta(z^\nu + c) = \\ \zeta(c) - \tilde{\zeta}_m(c) &+ \sum_{k=1}^K \alpha_k \left[ \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) g_k(z^\nu + c) \right] - \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \zeta(z^\nu + c) = \\ \zeta(c) - \tilde{\zeta}_m(c) &- \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \left[ \zeta(z^\nu + c) - \sum_{k=1}^K \alpha_k g_k(z^\nu + c) \right] = \\ \zeta(c) - \tilde{\zeta}_m(c) &- \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \left[ \zeta(z^\nu + c) - \tilde{\zeta}_m(z^\nu + c) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, используя (9), имеем

$$\zeta(c) - \tilde{\zeta}(c) = \epsilon(c) - \sum_{\nu=1}^N W(z^\nu) \epsilon(z^\nu + c). \quad (10)$$



Для определения весов линейного фильтра (1) потребуем, чтобы в случае отсутствия сигнала  $\zeta$  фильтр минимизировал дисперсию, вызванную стохастическим шумом  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
 D_M &= E \left[ \sum_{\mu=1}^M \sum_{\nu=1}^N W^\mu(z^\nu) \eta^\mu(z^\nu + c) \right]^2 = \\
 &= \sum_{\mu=1}^M \sum_{\mu'=1}^M \sum_{\nu=1}^N \sum_{\nu'=1}^N W^\mu(z^\nu) W^{\mu'}(z^{\nu'}) E \left[ \eta^\mu(z^\nu + c) \eta^{\mu'}(z^{\nu'} + c) \right] = \\
 &= \sum_{\mu=1}^M \sum_{\mu'=1}^M \sum_{\nu=1}^N \sum_{\nu'=1}^N W^\mu(z^\nu) W^{\mu'}(z^{\nu'}) \sigma^2 \delta(\nu - \nu') \delta(\mu - \mu') = \\
 &= \sum_{\mu=1}^M \| \mathbf{W}^\mu \|^2 \sigma^2. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы найти веса  $W^\mu(z^\nu)$ , минимизируем квадратичную форму:

$$\sum_{\mu=1}^M \| \mathbf{W}^\mu \|^2 = \mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{W}_0 = \| \mathbf{W}_0 \|^2, \quad \mathbf{W}_0 = (\mathbf{W}^1, \dots, \mathbf{W}^M),$$

с учетом условия (5).

Учитывая неравенство Коши-Буняковского, имеем:

$$\frac{\| \sum_{\mu=1}^M \mathbf{W}^\mu \|^2}{M} \leq \sum_{\mu=1}^M \| \mathbf{W}^\mu \|^2. \tag{12}$$

Равенство (12) имеет место только в случае:

$$\mathbf{W}^\mu = \frac{\sum_{\mu'=1}^M \mathbf{W}^{\mu'}}{M}. \tag{13}$$

Представим вектор  $\sum_{\mu'=1}^M \mathbf{W}^{\mu'}$  в следующем виде:

$$\sum_{\mu'=1}^M \mathbf{W}^{\mu'} = \mathbf{U} + \sum_{k=1}^K \beta_k \mathbf{g}_k,$$

где вектор  $\mathbf{U}$  ортогонален всем векторам набора  $\{\mathbf{g}_k\}$ . Тогда условие (5) может быть переписано следующим образом:

$$\sum_{k'=1}^K \beta_{k'} (\mathbf{g}_{k'} \cdot \mathbf{g}_k) = g_k(0), \quad k = 1, \dots, K. \tag{14}$$

С учетом соотношения (12) для функционала  $\| \mathbf{W}_0 \|^2$  имеем:

$$\| \mathbf{W}_0 \|^2 \geq \frac{\| \mathbf{U} \|^2 + \| \sum_{i=1}^K \beta_i \mathbf{g}_i \|^2}{M}. \tag{15}$$

Это означает, что минимум функционала  $\|\mathbf{W}_0\|^2$  достигается при  $\mathbf{U} = 0$ . В этом случае:

$$\mathbf{W}^\mu = \frac{\sum_{i=1}^K \beta_i \mathbf{g}_i}{M} \quad \text{для } \mu = 1, \dots, M. \quad (16)$$

Поэтому все вектора  $\{\mathbf{W}^\mu\}$  идентичны.

В результате равенство (5) принимает следующий вид:

$$g_k(0) = M \mathbf{W}_M \cdot \mathbf{g}_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (17)$$

Описанный выше алгоритм ориентирован на фильтрацию гладких изображений. В этом случае, поскольку коэффициенты  $\beta$ , в (14) не зависят от центра рабочего окна, веса  $W^\mu(z_\nu) = W(z_\nu)$  могут быть рассчитаны только один раз.

Когда изображение имеет резкие скачки интенсивности, применяем метод, развитый нами в [СРС00]. В этом случае строится гистограмма интенсивности на основе точек в рабочем окне для всех измеренных данных  $\{\xi^\mu(x), \mu = 1, \dots, M\}$ . Эта гистограмма может иметь по крайней мере два кластера. Суммирование в (1) проводится только по тем точкам, которые принадлежат кластеру  $\Omega$ , содержащему центральную точку рабочего окна. Равенство (5) примет следующий вид:

$$g_k(0) = M \sum_{z^\nu \in \Omega} W(z^\nu) g_k(z^\nu), \quad k = \overline{1, K}. \quad (18)$$

Набор соответствующих весов  $W$  рассчитывается с помощью системы (14), для каждого такого случая. Аналогичная процедура используется для фильтрации точек, расположенных около границ изображения.

В Таблице 1 представлены результаты сравнения предложенного стохастического фильтра (СФ) для случая использования одного изображения ( $M = 1$ ) с известными алгоритмами фильтрации [4], взятыми из коммерческого графического пакета IDL [5].

Таблица 1: Сравнение различных алгоритмов фильтрации

Алгоритмы	Ли	Медианный	Сглаживающий	СФ
$d_1$	52.9	102.0	51.1	8.1
$d_2$	23.2	16.6	15.6	3.8

В качестве меры для сравнения различных алгоритмов фильтрации использовались величины  $d_1$  и  $d_2$ :  $d_1 = \max_{i=1}^N |\zeta_i - \tilde{\zeta}_i|$ ,  $d_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |\zeta_i - \tilde{\zeta}_i|^2 / N}$ , где  $N$  - общее количество точек в изображении, а  $\zeta_i = \zeta(c_i)$  и  $\tilde{\zeta}_i = \tilde{\zeta}(c_i)$  - реальный сигнал и его оценка в точке  $c_i$ .

Пусть  $\mathbf{W}_1$  есть решение равенства (18) для случая  $M = 1$ . Тогда, для произвольного  $M$  имеем:  $\mathbf{W}_M = \frac{\mathbf{W}_1}{M}$ . Таким образом, дисперсия  $D_M$  для случая  $M$  изображений может быть выражена через дисперсию  $D_1$  следующим образом:

$D_M = \frac{D_1}{M}$ . Это означает, что средне-квадратичная ошибка процедуры фильтрации уменьшается с увеличением  $M$  как  $\frac{1}{\sqrt{M}}$ .

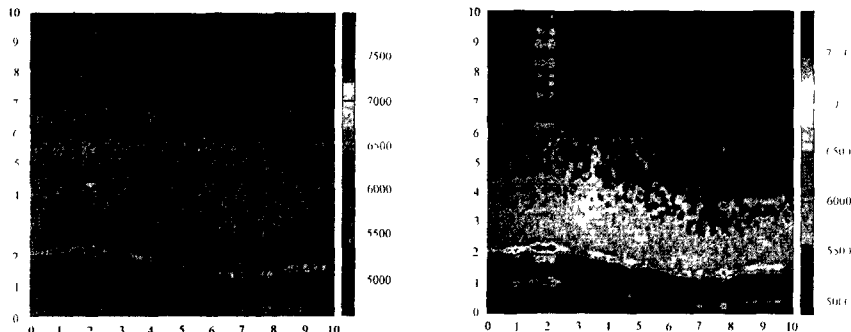


Рис. 2: Исходное ОКТ-изображение ( $250 \times 250$  точек) и отфильтрованное изображение на основе 5-ти изображений, полученных с одного и того же места на коже пациента:  $R_w = 4$  и  $L = 2$

Результат применения группового алгоритма фильтрации к реальным ОКТ-изображениям приведен на рис. 2. Одновременно использовались 5 ОКТ-изображений. Одно из таких изображений представлено слева на рис. 2: оно содержит  $250 \times 250$  точек. Для фильтрации использовалось круглое рабочее окно с  $R_w = 4$  и аппроксимирующие полиномы степени  $L = 2$ . На рис. 2 справа показан результат применения группового фильтра

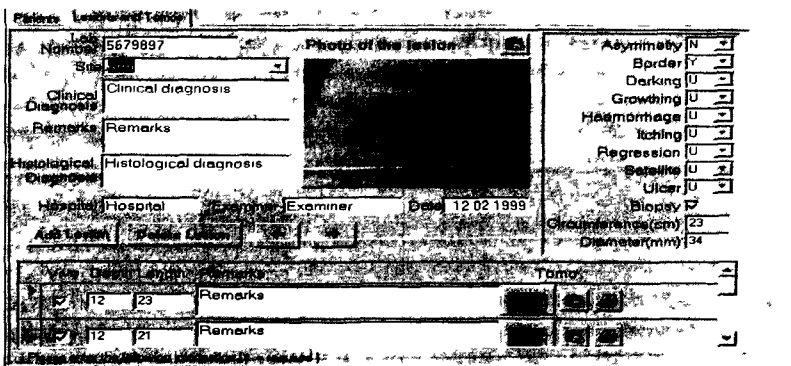


Рис. 3: Окно СУБД с информацией о пятнах и томограммах пациента

Для хранения и обработки ОКТ-изображений была разработана СУБД, в которую были интегрированы вышеупомянутые фильтры. Описание СУБД и

инструкция по работе с ней приводятся в Главе 2. Окно СУБД с информацией о пятнах и томограммах представлено на рис.3.

**В Главе 3** изучаются структуры сильного выгорания  $UO_2$  с помощью КА.

В качестве исходного материала использовались микрофотографии (с увеличением в 1250 раз) для степеней выгорания 16.2, 42.6, 54.8 и 65.0 GWd/tM, что отвечает пребыванию топлива в реакторе в течении 323, 953, 1266 и 1642 дней, соответственно. На рис. 4, в качестве примера, представлена микрофотография “отполированного” образца для степени выгорания 16.2 GWd/tM.

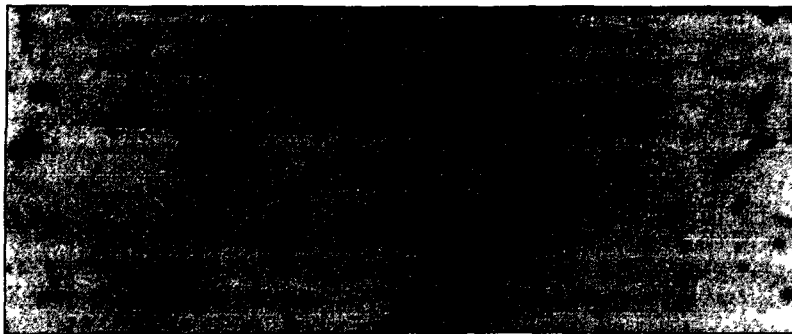


Рис. 4: Отсканированная микрофотография поверхности “отполированного” образца для степени выгорания 16.2 GWd/tM

Исходные изображения переводились в черно-белые с помощью регулировки яркости и контрастности (смотри рис. 5). Затем черно-белые изображения преобразовывались в ASCII-файлы: черным и белым точкам (клеткам) присваивались, соответственно, значения 0 и 1. Эти файлы представляют собой рабочие поля КА.

В диссертации развиты КА-алгоритмы, предназначенные для извлечения количественных характеристик поверхностных структур, отвечающих различным степеням выгорания  $UO_2$ , а также КА-алгоритмы для моделирования пространственно-временной динамики структур поверхности в процессе выгорания  $UO_2$ . КА-алгоритмы обработки изображений использовались для определения количественных характеристик пор (количество клеток в поре, координаты ее центра, средний и максимальный радиусы поры), отбора пор с заданным числом клеток и вычисления длин их границ, изучения статистической независимости отдельных частей микрофотографий. КА-алгоритмы моделирования динамики поверхностных структур использовались для моделирования процессов восстановления (анти-травления) и травления, а также описания процесса формирования пор (на основе модели Изинга).

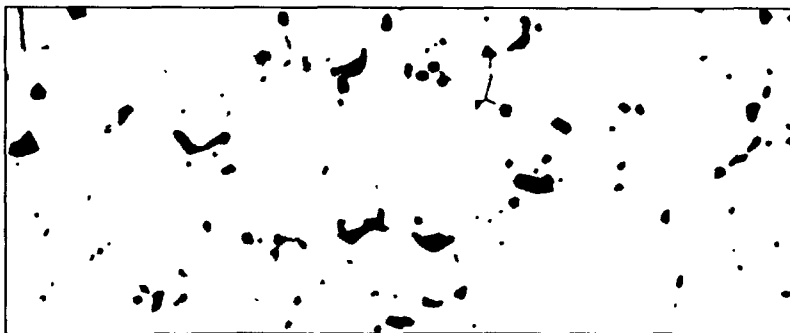


Рис. 5: Черно-белое представление микрофотографии поверхности “отполированного” образца для степени выгорания 16.2 GWd/tM

Для построения физической модели исследуемого процесса важно знать динамику числа пор и их размеров в процессе выгорания топлива.

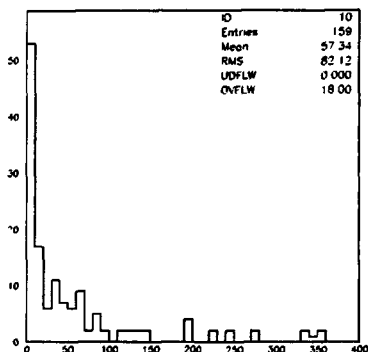


Рис. 6: Распределение размеров пор для образца со степенью выгорания 16.2 GWd/tM

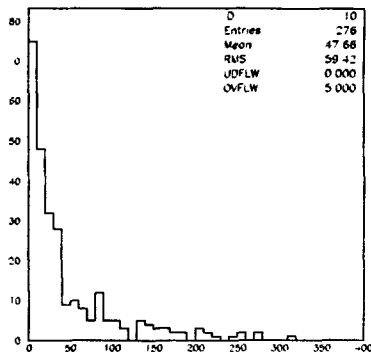


Рис. 7: Распределение размеров пор для образца со степенью выгорания 42.6 GWd/tM

На рис. 6 и 7 приведены распределения размеров пор (в пикселях) для образцов, отвечающих степеням выгорания 16.2 и 42.6, а на рис. 8 и 9 даны соответствующие им черно-белые изображения образцов. На рис. 10 и 11 приведены распределения размеров пор для степеней выгорания 54.8 и 65.0 GWd/tM, а на рис. 12 и 13 показаны отвечающие им черно-белые изображения.

Эти распределения построены с помощью пакета PAW (Physics Analysis Workstation) [6]. В данном пакете термин **Entries** означает полное число величин, занесенных в гистограмму (в нашем случае пор), а **OVFLW** - число

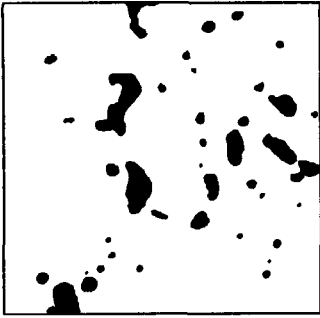


Рис. 8: Черно-белое представление микрофотографии для степени выгорания 16.2 GWd/tM



Рис. 9: Черно-белое представление микрофотографии для степени выгорания 42.6 GWd/tM

величин, не вошедших в гистограмму (в нашем случае - это поры, размеры которых превышают 400 пикселей).

Представленные распределения демонстрируют характерную эволюцию поверхностного слоя топлива с течением времени (см. также [CSF03]):

1) с ростом степени выгорания от 16.2 до 65.0 GWd/tM наблюдается систематический рост числа пор;

2) с ростом степени выгорания от 16.2 до 54.8 GWd/tM происходит уничтожение пор большого размера (их "рассыпание" на более мелкие поры), а также идет образование новых пор маленького размера;

3) при переходе от степени выгорания 54.8 к 65.0 GWd/tM наблюдается агрегация мелких пор в поры большего размера; при этом в распределении наблюдается характерный пик, отвечающий наиболее вероятному размеру поры ( $\sim 40-50$ )<sup>1</sup>.

Для оценки основных причин пространственного беспорядка в микрофотографиях можно вычислить энтропию анализируемых образцов. Следуя Т. Сузодо [8], рассмотрим локальный участок, отвечающий четырем соседним сторонам сетки КА с координатами  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j+1)$  и  $(i+1, j+1)$ . Очевидно, что существует всего  $2^4 = 16$  возможных черно-белых комбинаций для такого участка. Поэтому энтропия  $H_s$  пространственного образца в момент времени  $t$  может быть определена как

$$H_s(t) \equiv - \sum_k P^k(t) \log_{16} P^k(t),$$

где  $P^k(t)$  - вероятность определенной комбинации для рассматриваемого участка в момент времени  $t$ . Логарифм по основанию 16 используется для того, чтобы

<sup>1</sup>Следует заметить, что распределение на рис. 11 неплохо аппроксимируется логнормальным законом [7].

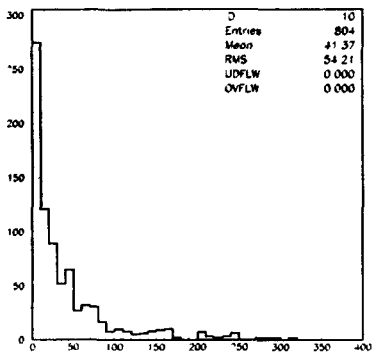


Рис. 10: Распределение размеров пор для образца со степенью выгорания 54.8 GWd/tM

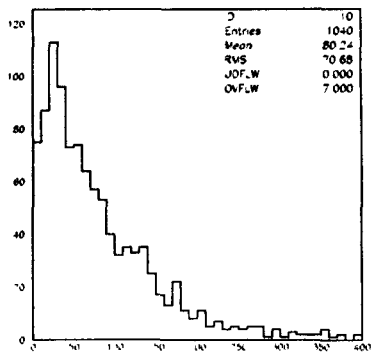


Рис. 11: Распределение размеров пор для образца со степенью выгорания 65 GWd/tM

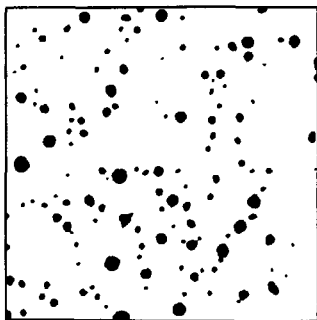


Рис. 12: Черно-белое представление микрофотографии для степени выгорания 54.8 GWd/tM

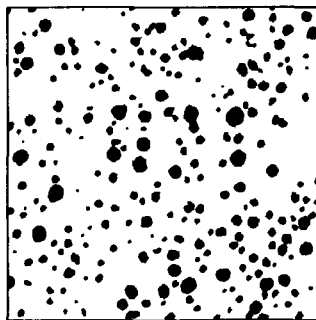


Рис. 13: Черно-белое представление микрофотографии для степени выгорания 65 GWd/tM

энтропия принимала значения между 0 и 1.

В Таблице 2 приведены значения пространственной энтропии для "отполированных" образцов, отвечающих различным степеням выгорания на глубине между 40 и 100  $\mu$  от поверхности. Здесь же приведены отношения черных и белых площадей. Легко заметить две различные причины пространственного беспорядка. Во-первых, наблюдается "распыление" черных клеток в пространство белых из-за диффузии микропор в материал горючего. Во-вторых, происходит рост полного числа черных клеток на микрофотографиях (сравните данные для  $H_s$  с третьей строкой Таблицы 2). Второй эффект можно объяснить тем, что

Таблица 2: Пространственная энтропия  $H_s$  и отношения черных  $S_b$  и белых  $S_w$  площадей в зависимости от степени выгорания (в GWh/tm) для "отполированных" микрофотографий.

Степень выгорания	16.2	42.6	43.9	54.8	65
$H_s$	0.146	0.106	0.104	0.155	0.301
$S_b/S_w$	0.075	0.038	0.037	0.059	0.159

максимуму энтропии отвечает одинаковое число белых и черных клеток. Поэтому рост числа черных клеток (на микрофотографиях они всегда составляют меньшинство) должен сопровождаться ростом энтропии.

Встает еще один вопрос: как можно объяснить третью строку в Таблице 2, или почему размеры пор уменьшаются при малых значениях выгорания и увеличиваются при больших. Попробуем дать ответ на этот вопрос с точки зрения термодинамики процесса. Рассмотрим систему из двух различных состояний (диоксид урана - *состояние 1*, и продукт его разрушения - *состояние 2*, который формируется двумя соседними фазами (газовая, *фаза I*, и твердая, *фаза II*). Обычно, каждое состояние содержит обе фазы. Кроме того, температура, давление и химические потенциалы этих двух фаз равны в состоянии равновесия.

Обозначим температуру и давление фаз, соответственно, как  $T$  и  $P$ . В состоянии равновесия мы имеем:

$$\mu_1^I(P, T, c^I) = \mu_1^{II}(P, T, c^{II}), \quad \mu_2^I(P, T, c^I) = \mu_2^{II}(P, T, c^{II}), \quad (19)$$

где  $\mu$  - это химический потенциал, а  $c$  - это концентрация.

Рассмотрим инфинитезимальное изменение системы, связанное с изменением ее температуры или давления. Такие процессы имеют место в реальном горючем. Соответствующие изменения химического потенциала:

$$d\mu^i = -s^i dT + v^i dP, \quad (20)$$

где  $s^i$  и  $v^i$  - энтропия и объем на одну молекулу для газовой ( $i = I$ ) и твердой ( $i = II$ ) фаз. Как и в общем случае,

$$s^I \neq s^{II}, \quad v^I \neq v^{II},$$



инфинитезимальное изменение температуры и давления ведет к нарушению равновесия системы. Можно установить характер и направление процессов, которые будут иметь место прежде, чем система снова придет в состояние равновесия. Так как в процессе испарения вещества из твердого состояния должно выделяться тепло  $dQ = T dS$ , то есть  $dQ > 0$ , то должно соблюдаться неравенство

$$s_i^I > s_i^{II}.$$

Поэтому, если температура растет (при постоянном  $P$ ), химический потенциал для газовой фазы, согласно равенству (20), становится меньше, чем потенциал для твердой фазы. Для восстановления равновесия газ из твердого тела поступает в поры и восстанавливает равновесие (так как  $(d\mu/dn)_{PT} > 0$ ) Такие процессы наиболее вероятны для сильного выгорания (смотри Таблицу 2), где ожидается рост температуры, в особенности, из-за понижения теплопроводности разрушенного вещества.

Можно также показать, что должны выполняться неравенства

$$v_i^I > v_i^{II}. \quad (21)$$

Можно сделать вывод о том, что инфинитезимальное увеличение  $P$  при постоянной  $T$  ведет, согласно (21), к росту разности  $\delta\mu = \mu_i^I - \mu_i^{II} > 0$ . Для восстановления равновесия вещества должны конденсироваться из газовой фазы в твердую. Этот процесс может быть ответственным за разрушение больших нерегулярных пор и уменьшение общего размера отдельных пор на начальной и средней стадиях эволюции (смотри Таблицу 1).

Вопрос "являются ли большие части микрографий статистически независимыми?", как это обычно имеет место для макроскопических частей термодинамической системы в состоянии равновесия, очень важен для понимания природы процессов, ответственных за формирование микрофотографий. Если ответ на этот вопрос положителен, то для описания соответствующей части микрофотографии можно воспользоваться распределением Гиббса. Альтернативой статистической независимости могут быть, например, коллективные процессы, отвечающие нелинейным самоорганизующимся явлениям в открытых системах.

Прежде чем приступить к изучению этой проблемы, необходимо решить каким должен быть минимальный размер сетки, которая может быть рассмотрена как большая. Хорошо известно, что статистические ансамбли, даже содержащие большое количество элементов (клеток), очень часто демонстрируют свойства, присущие макроскопической системе. Главное требование при этом состоит в том, что подсистема должна слабо взаимодействовать с остальной частью всей системы. Предположим, что взаимодействия между различными частями системы, отвечающей микрофотографии, носит короткодействующий характер, то есть они не действуют далее чем на одну клетку. Тогда мы можем оценить отношение  $E_s/E_m$  поверхностной энергии  $E_s$  к внутренней энергии  $E_m$

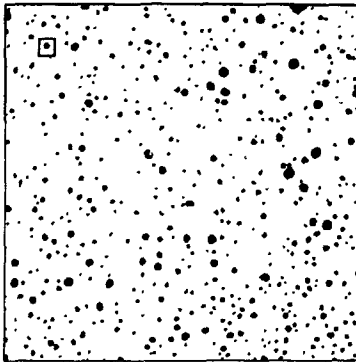


Рис 14: Исходный образец для степени выгорания 65 0 GWd/tM, использованный в этом исследовании, размер маленького квадрата 40 × 40 клеток

для любого фрагмента решетки как:

$$\frac{E_s}{E_m} = \frac{N_s}{N_m},$$

где  $N_s$  и  $N_m$  - число связей решетки по периметру и внутри фрагмента поверхности, соответственно. Например, для квадрата размером 40 × 40 это отношение будет равно

$$\frac{E_s}{E_m} = \frac{4 \cdot 40}{39 \cdot 39} \approx \frac{1}{10}$$

и может быть оценено как малое число.

Таким образом, маленький квадрат размером 40 × 40 клеток, являющийся фрагментом изображения 800 × 800 пикселей, отвечает типичному размеру подсистемы, которую мы рассматриваем как “большую” и которая слабо взаимодействует с соседними клетками (смотри рис. 14). В каждом квадрате подсчитывалось полное число черных клеток  $N$  и общее число граничных клеток  $L$ . Под граничной клеткой здесь понимается черная клетка, имеющая 1, 2 или 3 белых соседей.

Полученные распределения (смотри рис 15) непохожи на распределения Гиббса.

$$w_{L,N} = A \exp(\mu N - E_{L,N})/kT,$$

где  $\mu$  - это химический потенциал, а  $E_{L,N}$  - энергия подсистемы, которая предполагается монотонной функцией  $L$  и  $N$ .

Тем не менее, мы не можем исключить применимость распределения Гиббса для описания флуктуаций размеров пор, если рассмотреть другие термодинамические переменные. В частности, можно предположить, что статистически независимыми являются характеристики отдельной поры. Для этого случая можно вывести следующее распределение границ  $i$ -ой поры в “большой” подсистеме:

$$w_i(L) = \int_0^\infty dL_1 \int_0^\infty dL_2 \dots \int_0^\infty dL_i w_1(L_1) w_1(L_2) \dots$$

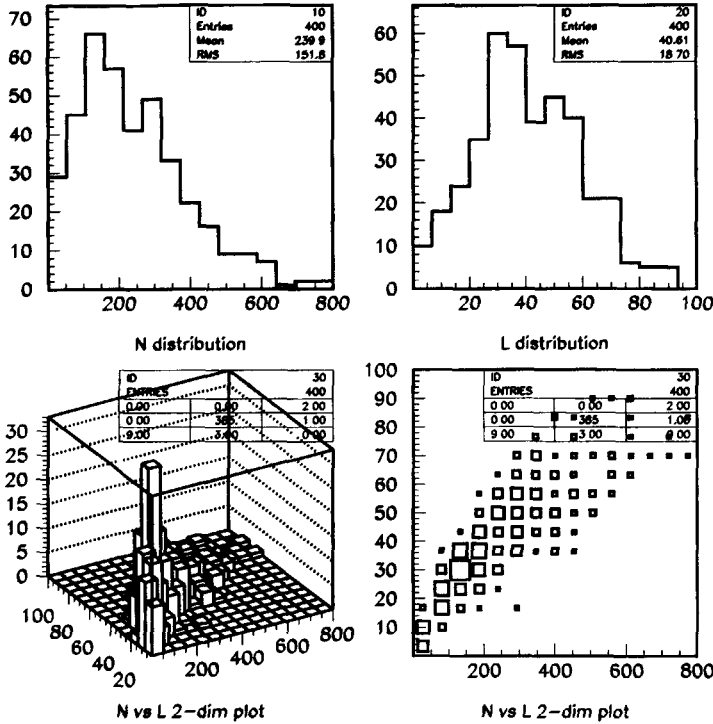


Рис. 15: Распределения числа черных клеток  $N$  и длины границы  $L$ , а также соответствующие 2-мерные  $(N, L)$ -зависимости, полученные в результате обработки изображения, приведенного на рис. 14

$$w_1(L_k)\delta(L_1 + L_2 + \dots + L_k - L) \simeq CL^{k-1}e^{-L/kT}, \quad (22)$$

где  $L_k$  - это длина границы отдельной поры, а  $w_1(L_k) = \frac{1}{kT} \exp(-\frac{L_k}{kT})$ . Такое распределение уже согласуется с рис. 15. Более реалистичное физическое распределение должно также содержать величину  $S$  площади поверхности поры вместо  $L$  и учитывать сжатие газа в порах вместо простого подсчета числа черных клеток в них.

Пусть  $\epsilon_{bb}$  и  $\epsilon_{ww}$  обозначают потенциал взаимодействия между соседними черными и белыми клетками, соответственно, а  $\epsilon_{bw}$  - это потенциал взаимодействия между соседними клетками разного цвета. Мы выбираем простой тип взаимодействия:

$$\epsilon_{ww} = \epsilon_{bw} = 0, \quad \epsilon_{bb} < 0. \quad (23)$$

Теперь можно приписать каждой поре следующую потенциальную энергию,

пропорциональную ее “поверхности”:

$$E = -\varepsilon_{bb}L, \quad (24)$$

где  $L$  - это длина границы поры.

В равновесии вероятность испарения черной клетки с поверхности можно описать распределением Больцмана:

$$p = C \exp(-\beta\Delta E), \quad (25)$$

где  $C$  - это константа нормировки, а  $\Delta E$  - это изменение энергии из-за увеличения поверхности. Очевидно, что испарение черной клетки, которая имеет только одного черного соседа, требует следующей энергии

$$\Delta E = \varepsilon_{bb}, \quad (26)$$

где черные клетки с двумя или тремя соседями требуют, соответственно,  $2\varepsilon_{bb}$  и  $3\varepsilon_{bb}$  энергии для испарения. Таким образом, вероятность испарения черной клетки с поверхности поры описывается одной из следующего набора вероятностей:

$$p, p^2, p^3. \quad (27)$$

Формулы (23)–(27) определяют вероятностный Клеточный Автомат Изинга (КАИ), который моделирует эволюцию исходного изображения при изменении температуры образца.

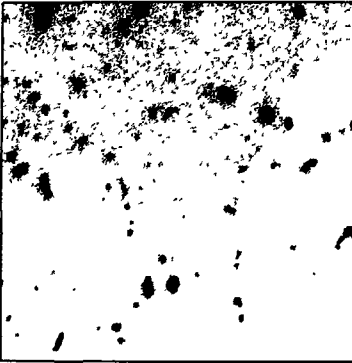


Рис. 16: Исходный образец, который использовался для моделирования формирования пор

На рис. 16 приведен исходный образец, а на рис. 17 и 18 представлены результаты моделирования эволюции изображений в рамках рассматриваемой модели. Изменение в динамике отвечает фазовому переходу, связанному с изменением температуры [9].

Рim-эффект (формирование структур от сильного выгорания  $UO_2$ ) - это результат многих физических процессов (см. [11]–[14] и ссылки в них), поэтому



Рис. 17: Результат моделирования эволюции пор с помощью КА Изинга при  $P = 0.1$

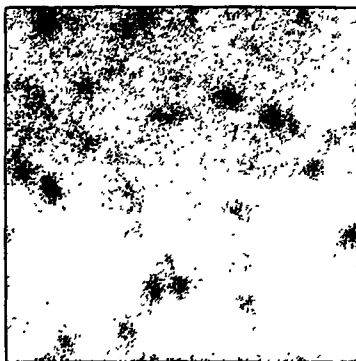


Рис. 18: Результат моделирования эволюции пор с помощью КА Изинга при  $P = 0.5$

отвечающая ему динамика должна иметь существенно нелинейный и случайный характер, что может привести к образованию фрактальных структур. Для получения дополнительной информации об этом эффекте, мы применили методы фрактального анализа к исследованию изображений зоны *гип*-эффекта, отвечающих различным степеням выгорания  $UO_2$ .

Для вычисления фрактальных размерностей микрофотографий образцов использовались два недавно разработанных пакета, а именно, PLATO [15] в Лаборатории Информационных Технологий ОИЯИ и VIP [16] в Университете Memphis. Пакет PLATO основан на алгоритме *box-counting*, а в пакете VIP используются 11 различных алгоритмов [16].

Вывод о том, что изображение на микрофотографиях имеет фрактальный характер основывается на результатах вычисления длины границы  $L$  между белыми и черными частями изображения, которая имеет степенную зависимость от характерной длины  $\delta$ . Подсчитывая число  $N(\delta)$  базовых элементов (выбираемых обычно в виде квадрата или окружности), необходимых для покрытия границы с характерной длиной  $\delta$ , можно оценить искомую длину

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}, \quad (28)$$

где  $a = L_0$  - это константа, отвечающая  $\delta = 1$ , а  $D$  - искомая фрактальная размерность [17]. Учитывая то, что  $L(\delta) = N(\delta) \cdot \delta$ , и используя равенство (28), получим:

$$\ln N(\delta) = \ln a - D \ln \delta. \quad (29)$$

Изменяя характерную длину  $\delta$  от минимально-допустимого значения до разумной максимальной величины, определим из (29) искомую фрактальную размерность  $D$  по наклону зависимости  $y = \ln N(\delta)$  от величины  $\delta$ .

Для вычисления фрактальной размерности использовался в основном алгоритм “mass-radius”, величина радиуса менялась от одного пикселя до максимального значения, равного 8-10 пикселей, с шагом 1 пиксель. В Таблице 3 приведены результаты для микрофотографий протравленных образцов.

Таблица 3: Фрактальная размерность для микрофотографий протравленных образцов

Фрактальная размерность	Средняя степень выгорания 16.2 GWd/tM	Средняя степень выгорания 43.9 GWd/tM	Средняя степень выгорания 54.8 GWd/tM	Средняя степень выгорания 65 GWd/tM
$D_1$ (граница модуля)	1.34	1.14	1.06	1.17
$D_2$ (150-200 $\mu$ от границы модуля)	1.40	1.24	1.24	1.08
$\langle D \rangle$ (сред. знач. 0-200 $\mu$ от гр. мод.)	1.37	1.18	1.15	1.13

Видно, что фрактальная размерность уменьшается с ростом степени выгорания. Заметим, что переход от неразрушенной (*non-gm*) к перестроенной (*gm*) структуре можно рассматривать, соответственно, как переход от неорганизованной микроструктуры к самоорганизованной. Последняя возникает при высоких степенях выгорания, когда наблюдается резкое уменьшение величин  $D_1$ ,  $D_2$  и  $\langle D \rangle$  (в Таблице 3 *gm*-переходу отвечают образцы с фрактальной размерностью  $\leq 1.18$ ). Таким образом, видно, что фрактальная размерность является важным параметром в описании формирования *gm*-структуры. Этот результат служит также подтверждением высокой нелинейности и стохастичности данного процесса.

#### Четвертая Глава содержит:

- **Заключение**, в котором сформулированы основные результаты диссертации;
- **Приложения 1 и 2**, в которых представлены тексты программ, используемых для решения задач, рассмотренных в **Главах 2 и 3**.

#### На защиту выносятся следующие результаты:

1. Новый алгоритм фильтрации изображений, получаемых с помощью оптической когерентной томографии поверхностного слоя кожи пациента.
2. Новый подход на основе клеточных автоматов для моделирования динамики процесса эволюции уранового топлива в результате его сильного выгорания.

3. Новые алгоритмы на основе клеточных автоматов для обработки изображений структур поверхностного слоя уранового топлива в результате его сильного выгорания.
4. Новые результаты, полученные путем анализа и моделирования RIM-эффекта с помощью клеточных автоматов.
5. Новая численная характеристика, позволяющая контролировать степень выгорания топлива в процессе выработки в реакторе.

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**

- [МТСП98] P.G.Akishin, E.P.Akishina, P.Akritas, I.Antoniou, J.Ioannovich, V.V. Ivanov and F.Pyrza: *On a Method of Digital Images Filtering*, МТСП-98, Dubna, Russia, June 15-20, 1998, Book of abstracts, p.19.
- [СРС00] P.G.Akishin, E.P.Akishina, P.Akritas, I.Antoniou, J.Ioannovich and V.V. Ivanov: *Filtering Digital Images of Human Skin Micro-Structure*, "Computer Physics Communications", vol. 126, No. 1/2, 2000, p.1-11.
- [UMС2K] P.G.Akishin, E.P.Akishina, P.Akritas, I.Antoniou, J.Ioannovich, V.V. Ivanov: *Multi-Sample Stochastic Filtering of Digital Images of Skin Micro-Structure*, In: Supplemented Papers for the 2nd International Conference on "Unconventional Models of Computation", UMC'2K, Brussels, Belgium, December 13-16, 2000, pp. 1-11.
- [CMSE02] P.G.Akishin, E.P.Akishina, P.Akritas, I.Antoniou, J.Ioannovich, V.V. Ivanov: *Multi-Sample Stochastic Filtering of Digital Images of Skin Micro-Structure*, "Computational Methods in Sciences & Engineering", vol. 2, no. 1-2, 2002, pp.117-124.
- [JINR99] E.P.Akishina, I.Antoniou, J.Ioannovich and V.V.Ivanov: *Construction of Database for the OCT Device*, Presented at the Workshop "Computational Tools and Industrial Applications of Complexity", JINR Preprint E10-99-150, Dubna, 1999.
- [VICMM02] E.P.Akishina, I.Antoniou, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko and A.D.Stalios: *Cellular Automata Modeling of High Burn-Up Structures in UO<sub>2</sub>*. In: V Int. Congress on Mathematical Modeling, September 30-October 6, 2002, Book of abstracts, Vol. I, p. 128, Dubna, Moscow region, Russia, 2002.
- [CMSE04] I.Antonoiu, E.P.Akishina, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko, A.D.Stalios: *Cellular Automata Modeling of High Burn-up Structures*, "Computational Methods in Applied Sciences and Engineering", (in press).

- [CSF03] I.Antonoiu, E.P.Akishina, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko, A.D.Stalios: *Cellular Automata Study of High Burn-up Structures*, "Chaos, Solitons & Fractals" 18 (2003) 1111-1128.
- [WSEAS03] I.Antonoiu, E.P.Akishina, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko: *Cellular Automata Modelling and Fractal Analysis of High Burn-up Structures in UO<sub>2</sub>*, "WSEAS Transactions on Computers", Issue 4, Vol. 2, October 2003, pp. 1061-1066.
- [PNL04] I.Antonoiu, E.P.Akishina, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko: *Cellular Automata Approach to Investigation of High Burn-up Structures in Nuclear Reactor Fuel*, "Particles and Nuclei, Letters", (2005), Vol. 2, No. 1(124)pp. 59-72.
- [JINR03] Е.П. Акишина, В.В. Иванов, Б.Ф. Костенко: *Изучение структур сильного выгорания двуоксида урана с помощью клеточных автоматов: алгоритмы и программы*, Сообщения ОИЯИ, Р11-2003, Dubna, 2003, стр. 1-39.
- [MTCP00] P.G.Akishin, E.P.Akishina, P.Akritas, I.Antoniou, J.Ioannovich, V.V.Ivanov: *Multi-Sample Stochastic Filtering of the OCT Images*, MTCP-2000, Dubna, Russia, July 24-29, 2000, Book of abstracts, p.16.
- [LIT03] E.P.Akishina, V.V.Ivanov, B.F.Kostenko, I.Antoniou: *Cellular Automata Study of High Burn-up Structures*, In: *Annual report 2003. Laboratory of Information Technologies*. Ed. by Gh. Adam, V.V. Ivanov and T.A. Strizh, JINR, Dubna, 2004, pp. 34-35.
- [NEC2005] E.P.Akishina: *New Methods for Modeling and Analysis of Digital Images and Their Application*, In: XX International Symposium on Nuclear Electronics & Computing (NEC'2005), Varna, Bulgaria, September 12-18, 2005: Book of abstracts, Dubna, JINR, 2005, p. 11.

## Список литературы

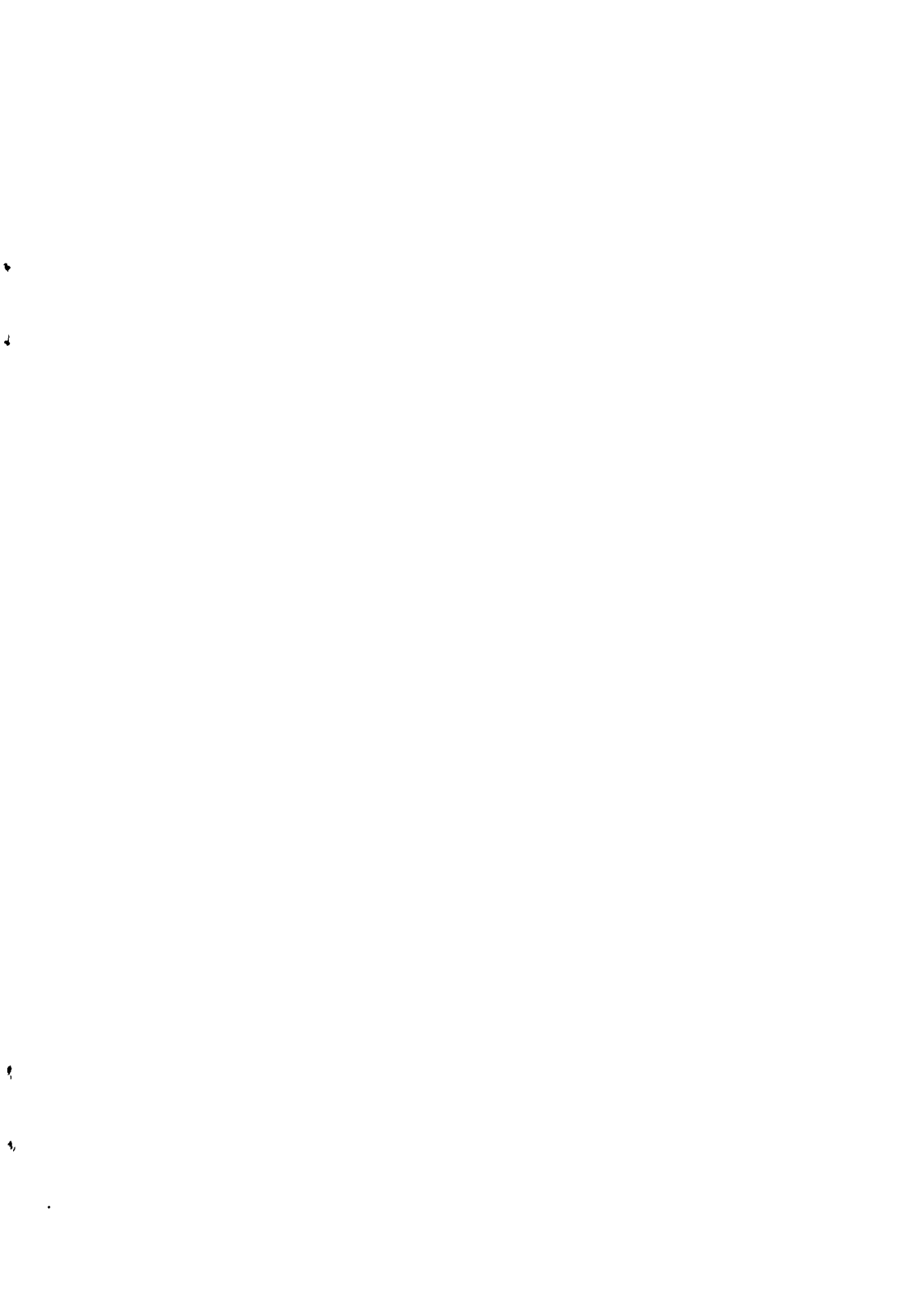
- [1] Gelikonov V. et al, in Conf. on Lasers and Electro-optics, v 9, 1996, Optical Society of America, Technical Digest Series, Washington D.C. (1996), p. 58.
- [2] Sergeev A.M. et al, in Advances in optical imaging and photon migration, OSA series TOPS, v. 2, 1996.
- [3] Gelikonov V.M., Gelikonov G.V., Gladkova N.D., Kuranov R.V., Nikulin N.K., Petrova G.A., Pochinko V.V., Pravdenko K.I., Sergeev A.M., Feldchtein F.I., Khanin Ya.I., Shabanov D.V., "Письма в ЖЭТФ", том 61, номер 1-2, 1995, p. 149-153.



- [4] Pratt, W.K., *Digital Image Processing*, 2-nd ed., Wiley-Interscience, New-York, 1991.
- [5] IDL, version 5.0, Reference guide, vol. 1/2, March, 1997 Edition.
- [6] R. Brun, O. Couet, C. Vandoni and P. Zanarini: *PAW - Physics Analysis Workstation*, CERN Program Library Q121, 1989.
- [7] W.T. Eadie, D. Dryard, F.E. James, M. Roos and B. Sadoulet: *Statistical Methods in Experimental Physics*, North-Holland Pub.Comp., Amsterdam-London, 1971.
- [8] T.Suzudo, Complex International, 1999, vol. 6 (online journal at <http://www.csu.edu.au/ci/>)
- [9] M.Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [10] Hj.Matzke, A.Turos, G.Linker: *Polygonization of single crystals of the fluorite-type oxide  $UO_2$  due to high dose ion implantation*, Nucl. Instr. and Meth., 1994, vol. B91, pp. 294-300.
- [11] Hj. Matzke, J. Spino: *Formation of the rim structure in high burn-up fuel*, Jour. of Nucl. Materials, 1997, vol. 248, pp. 170-179.
- [12] Hj. Matzke, M. Kinoshita: *Polygonization and high burn-up structure in nuclear fuels*, Jour. of Nucl. Materials, 1997, vol. 247, pp. 108-115.
- [13] M. Kinoshita, T. Sonoda, S. Kitajima, A. Sasahara, E. Kolstad, Hj. Matzke, V.V. Rondinella, A.D. Stalios, C.T. Walker, I.L.F. Ray, M. Steindlin, D. Halton, C. Ronchi: *High burn-up rim project. Irradiation and examination to investigate rim-structured fuel*, Proc. Int. Conf. on LWR Fuel Performance, Amer. Nucl. Soc., Park City, April 9-14, 2000, pp. 590-603.
- [14] Chan Bock Lee, Youn Ho Jung: *An attempt to explain the high burn-up structure formation mechanism in  $UO_2$  fuel*, Jour. of Nucl. Materials, 2000, vol. 279, pp. 207-215.
- [15] S.Soldatov: *PLATO: determination of fractal dimension*, JINR, Dubna, 2000 (Diploma thesis). This code has been effectively used for the analysis of fractal structures on the surfaces of solids subjected to high intensity electron and ion treatment. See for example: M.V.Altaisky, V.V.Ivanov, S.A.Korenev, O.L.Orelovich, I.V.Puzynin, V.V.Chernik, *Fractal Structure Formation on the Surfaces of Solids Subjected to High Intensity Electron and Ion Treatment*, JINR Rapid Communications No. 2[82]-97.

- [16] Qichang Li, G.Narasimhan, K.Mathee, Zhou Ji, S.Molen, A.Heydorn, *BIP: Biofilm Image Processing*, Department of Mathematical Sciences, University of Memphis, Memphis, TN 38152, USA,2000. This package includes 11 different methods for the calculation of fractal dimensions: Euclidean Distance Map (EDM), Minkowski Sausage Method (Dilation), Box Counting Method, Corner Method (Counting and Perimeter), Fast Method (Regular and Hybrid), Parallel Lines Method, Cumulative Intersection Method, and Mass Radius (Short and Long). See <http://www.msci.memphis.edu/giri/BIP/>.
- [17] *Fractals in Physics*, In: Proc. VI International Symposium on Fractals in Physics (Ed. L.P'etronero and E.Tozatti), Trieste, Italy, 9-12 June, 1985.

Получено 2 декабря 2005 г.



25958

РНБ Русский фонд

2006-4  
29708

Отпечатано методом прямого репродуцирования  
с оригинала, предоставленного автором.

Подписано в печать 06.12.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,78. Тираж 100 экз. Заказ № 55134

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)  
[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)