

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

На правах рукописи



Гани Вахид Абдулович

**ДИНАМИЧЕСКИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
НИЗКОРАЗМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ**

1.3.3. Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва

2023

Работа выполнена в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ».

Официальные
оппоненты:

Арефьева Ирина Ярославна,

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва;

Горбунов Дмитрий Сергеевич,

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела теоретической физики Института ядерных исследований РАН, г. Москва;

Мележик Владимир Степанович,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна;

Савин Александр Васильевич,

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории физики и механики полимеров Федерального исследовательского центра химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН, г. Москва.

Защита состоится 27 декабря 2023 года в 15:00 на заседании диссертационного совета МИФИ.1.04 НИЯУ МИФИ по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ и на сайте ds.mephi.ru.

Просим принять участие в работе совета или прислать отзыв на автореферат в одном экземпляре, заверенный печатью организации.

Автореферат разослан « » _____ 20__ года.

Ученый секретарь

диссертационного совета МИФИ.1.04

доктор физ.-мат. наук, доцент

Руднев Игорь Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Кинк представляет собой полевую конфигурацию, интерполирующую между двумя состояниями, отвечающими минимумам самодействия поля (потенциала теоретико-полевой модели). При этом кинк имеет наименьшую возможную энергию среди всех конфигураций, соединяющих эти два минимума. С другой стороны, в силу нетривиальной топологии кинк всегда является устойчивым, т.е. не может эволюционировать в тривиальную полевую конфигурацию, отвечающую минимуму потенциала, реализованному во всем пространстве. Эти фундаментальные свойства кинковых решений обуславливают их широкое применение в приложениях в физике высоких энергий, космологии, физике конденсированного состояния вещества. Известным примером является плоская доменная стенка, т.е. граница раздела доменов с разными вакуумными значениями поля в пространстве размерности $(2 + 1)$ или $(3 + 1)$, представляющая собой кинковую конфигурацию в направлении, перпендикулярном к ней [1]. Поэтому, в частности, вопрос об изучении взаимодействий доменных стенок между собой сводится к рассмотрению динамики соответствующих кинковых решений.

Было показано [2], что в тонких пленках некоторых магнитных материалов, таких как железо-иттриевый гранат $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$, изменение размеров доменов происходит за счет перемещения границ из-за образования в них кинковых деформаций. Бегущие и взаимодействующие между собой кинки возникают в графеновой наноленте — узком длинном образце двумерного материала, сжатом с боков [3]. Кинки, обнаруженные в [3], хорошо описывались моделью φ^4 , тем не менее наблюдалась некоторая их асимметрия, что является указанием на необходимость привлечения для моделирования кинковой деформации таких моделей, как φ^6 или φ^8 . Для нематического жидкого кристалла 4-*n*-метоксибензилиден-*n*-бутиланилин, помещенного между стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO_2 , столкновение дислокаций в протяженном дефекте на качественном уровне хорошо описывалось двухсолитонным решением [4, 5].

Кинковые решения возможны в моделях, привлекаемых при описании фазовых переходов, а также их последовательностей. В частности, последовательные сегнетоэластический при 285 *K* и сегнетоэлектрический при 460 *K* переходы в кристаллах $LiNH_4SO_4$ [6, 7]. Флюксоны в джозефсоновских контактах (например, на основе трехслойных структур $Nb - Al/AlO_x - Nb$) ведут себя подобно солитонам [8]. Движущиеся

кинки модели двойной синус-Гордон моделируют процесс распространения выравнивания электрических дипольных моментов звеньев пьезоэлектрического полимера поливинилиденфторид $(-CH_2 - CF_2-)_n$ с большим n [9].

На момент начала исследований, положенных в основу настоящей диссертации, ответы на многие важные вопросы о кинках отсутствовали. Кинк-антикинк столкновения в модели двойной синус-Гордон впервые обсуждались в статьях 1986 года [9,10]. Однако зависимость критической скорости (разделяющей режимы захвата и отскока кинка и антикинка, см. раздел 1.1 диссертации) от параметра модели требовала уточнения. Более точная зависимость получена в соответствующем разделе 1.4 главы 1. Кроме того, изучение столкновений нескольких кинков и антикинков, ранее выполненное лишь для моделей φ^4 и синус-Гордон, было проведено для моделей φ^6 , φ^8 и двойной синус-Гордон, результаты изложены в главе 2.

Теоретико-полевые модели с полиномиальными потенциалами степеней восемь и выше возникают при описании изоструктурных фазовых переходов, при изучении процессов кристаллизации хиральных белков [11], используются для описания феноменологии фазовых переходов в высокопьезоэлектрических перовскитах [12,13]. Несмотря на указанную востребованность модели φ^8 , ее кинковые решения были почти не изучены на момент начала исследований, изложенных в соответствующих разделах всех четырех глав диссертации.

Для получения солитонных решений применяется эффективный метод — метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [14]. Однако если нелинейная модель не допускает представление Лакса (как это и происходит в случае моделей, рассмотренных в диссертации), то для получения солитонных (кинковых) решений приходится прибегать к другим методам. Интегрирование нелинейного уравнения Клейна-Гордона для большинства нелинейностей не позволяет получить кинковое решение в виде явной зависимости поля от координаты. Результаты, изложенные в главе 3 диссертации, позволили продвинуться в получении явных выражений для кинков модели φ^8 . Также в третьей главе получено и проанализировано точное решение в модели с действительным скалярным полем и связанным с ним триплетом скалярных полей. До этого аналогичное решение было найдено лишь численно [15], что сильно затрудняло его анализ и использование.

Процедура деформации теоретико-полевой модели, используемая с начала 2000-х,

является мощным инструментом для получения новых моделей вместе с их топологическими и нетопологическими солитонами [16]. Надлежащим выбором деформирующей функции можно существенно изменить модель и, следовательно, привести новую физику. При применении процедуры деформации с использованием строго монотонной деформирующей функции теоретико-полевая модель деформируется таким образом, что можно управлять амплитудой кинка (т.е. расстоянием между соседними вакуумами модели) и его пространственным масштабом без изменения общей топологии конфигурации. Несмотря на многократное успешное применение процедуры деформации, многие важные аспекты оставались до последнего времени неизученными. В частности, не было ясности относительно трансформационных свойств асимптотик кинков в связи со свойствами деформирующей функции. Кроме того, асимптотические свойства потенциала, определяющего спектр малых возбуждений кинка в линейном приближении, а также изменения этих свойств при деформациях теоретико-полевой модели, не были исследованы. Имевшийся пробел восполняют результаты, изложенные в разделе 3.4 третьей главы диссертации.

Асимптотическое поведение кинкового решения является важной характеристикой, определяющей динамику кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействий. Давно известные и используемые кинки моделей φ^4 [6] и синус-Гордон [17, Гл. 1] имеют экспоненциальные асимптотики. В то же время в связи с упомянутыми выше приложениями в последнее десятилетие резко вырос интерес к более сложным моделям, допускающим решения в виде кинков со степенными асимптотиками [6, 7]. До появления результатов, изложенных в главе 4 диссертации, динамические свойства кинков со степенными асимптотиками изучены не были, несмотря на востребованность подобных исследований.

Таким образом, актуальность работы определяется, с одной стороны, востребованностью кинковых решений для приложений, а с другой — недостаточной на момент начала исследований, положенных в основу диссертации, изученностью динамических и асимптотических свойств таких солитонов.

Степень разработанности темы исследования

Первые работы по динамике кинков модели φ^4 появились в середине 70-х годов прошлого века. У истоков этого направления стояли советские физики А.Е. Кудрявцев,

Б.С. Гетманов, В.Г. Маханьков и др. [18–20]. Через несколько лет появились работы зарубежных исследователей по взаимодействиям кинков φ^4 и других моделей, см. обзоры [6, 19, 21].

Изучение свойств кинковых решений в контексте процедуры деформации теоретико-полевой модели происходит с начала 2000-х годов [16, 22, 23].

Степенному асимптотическому поведению кинков серьезное внимание стало уделяться в последние 5-7 лет. Были изучены и более экзотические ситуации: случай компактного носителя топологического солитона [24], случай асимптотики типа степенной башни [25], суперэкспоненциальной [26] и суперсуперэкспоненциальной асимптотики [27].

Поиск точных решений интересовал специалистов давно. Что касается кинковых решений в моделях с одним или несколькими скалярными полями, то, помимо процедуры деформации, были разработаны и другие методы. Например, метод пробных орбит [28, 29] и др. [30–32].

Наконец, изучение динамики кинков со степенными асимптотиками — новое направление, бурно развивающееся в последние несколько лет [A6, A10, A12, A21, A26, 33, 34].

Цель работы

Целью диссертации является описание динамики уединенных волн (кинков и антикинков), выявление и анализ сложной феноменологии в столкновениях кинков, получение точных кинковых решений в моделях с одним или несколькими полями, изучение трансформационных свойств асимптотик кинков относительно деформаций модели, а также исследование процессов рассеяния кинков со степенными асимптотиками, разработка и валидация асимптотического метода оценки сил взаимодействия таких кинков.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Установленные границы применимости метода коллективной координаты с одной степенью свободы к описанию кинк-антикинк и кинк-кинк взаимодействий в модели φ^6 .
2. Найденные спектры возбуждений кинков модели φ^8 , связь вибрационной моды кинка с резонансными явлениями в кинк-антикинк рассеянии. Обнаруженное рождение кинк-антикинк пар в столкновениях осциллонов.

3. Наличие серии локальных максимумов зависимости критической начальной скорости в рассеянии кинков от параметра модели двойной синус-Гордон.
4. Экспериментально обнаруженные в $\sinh$ -деформированной модели φ^4 резонансные явления в кинк-антикинк рассеянии, а также появление осциллонов, способных образовывать связанные состояния.
5. Экспериментальное обоснование возможности создания областей с повышенными плотностями энергии в столкновениях нескольких кинков и антикинков в моделях φ^6 и двойной синус-Гордон.
6. Кинковые решения в модели φ^8 с четырьмя вакуумами, в семействе моделей с полиномиальными потенциалами с двумя вакуумами, а также в модели с действительным скалярным полем и связанным с ним триплетом скалярных полей.
7. Экспериментальное обнаружение и теоретическое описание резонансных явлений в столкновениях кинка и антикинка модели φ^8 со степенными асимптотиками.
8. Асимптотические оценки сил кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействий в моделях φ^{2n+4} с $n \geq 2$ в случае кинков со степенными асимптотиками.

Научная новизна

- Впервые выполнено детальное сопоставление результатов применения метода коллективной координаты к кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействиям в модели φ^6 с результатами решения уравнения движения.
- Впервые исследованы спектры возбуждений различных кинков модели φ^8 , а также резонансные явления в кинк-антикинк столкновениях.
- В модели двойной синус-Гордон серия локальных максимумов зависимости критической скорости от параметра модели обнаружена впервые.
- Впервые обнаружены и изучены резонансные явления в рассеянии кинков модели $\sinh$ -деформированная φ^4 , а также разлет и связанные состояния осциллонов в конечном состоянии.

- Впервые выполнено исследование мультикинк процессов в моделях φ^6 и двойной синус-Гордон с анализом плотностей энергии и градиентов поля, а также с изучением конечных состояний.
- Впервые изучены столкновения нескольких кинков и антикинков модели φ^8 и проанализированы конечные состояния.
- Метод нахождения явных формул для кинковых решений в модели φ^8 с четырьмя вакуумами при некоторых значениях констант предложен впервые.
- Впервые получены кинковые решения для семейства моделей с полиномиальными потенциалами с двумя вакуумами.
- Впервые изучены трансформационные свойства асимптотик кинков при деформации теоретико-полевой модели.
- Решение в виде плоской доменной стенки с локализованным на ней триплетом скалярных полей аналитически получено и исследовано впервые.
- На примере процесса рассеяния кинков модели φ^8 , имеющих степенные асимптотики, впервые изучено влияние степенных асимптотик на динамику кинк-антикинк системы и проанализированы резонансные явления в кинк-антикинк столкновениях.
- Впервые получены асимптотические оценки сил кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействия в моделях φ^{2n+4} с $n \geq 2$.

Теоретическая и практическая значимость

Изучение свойств топологических солитонов является важным для многочисленных физических приложений [1, 6, 35, 36]. Поскольку кинковые решения возникают при описании многих объектов и явлений в физике высоких энергий, космологии, физике конденсированного состояния, то получение новой информации об их свойствах является необходимостью как для дальнейших теоретических исследований, так и с точки зрения практических применений. В частности, в работе [36] показано, что модель с потенциалом восьмой степени представляет интерес для космологии. Рассмотрена возможность появления второго вакуума в потенциале поля Хиггса, рассчитаны поправки

для конечной температуры и показано, что за обычным электрослабым фазовым переходом второго рода следует фазовый переход первого рода, который может вызвать ускоренное расширение Вселенной на более поздних временах. Такой потенциал содержит кинковые решения, которые, в свою очередь, могут играть решающую роль в реконструкции глобальной формы потенциала в экспериментах на коллайдерах.

Обнаружение и анализ резонансных явлений в кинк-антикинк рассеянии важны в контексте теоретического анализа связи локализованных возбуждений кинка (в том числе коллективных возбуждений системы “кинк + антикинк” как целого [A11, A21], а также так называемых квазинормальных мод [A21, 37]) с наличием и структурой окон разлета либо квазирезонансных пиков [21, 38]. С точки зрения практических приложений взаимодействие кинков и антикинок как с образованием связанных состояний, так и с последующим разлетом актуально, например, для приложений в физике конденсированного состояния вещества (кинковые деформации в графеновой наноленте [3], дефекты в жидких кристаллах [4, 5] и т.д. [7]).

Что касается точных решений, то их получение всегда имеет большое значение, так как открывает перспективы использования найденных решений как для дальнейших теоретических построений [28], так и для практических применений в различных приложениях.

Изучение асимптотических свойств топологических солитонов, а также получение информации о трансформационных свойствах асимптотик при деформациях теоретико-полевых моделей необходимо, в частности, для теоретического понимания и практического применения динамических свойств солитонов в различных контекстах [1].

Динамика кинков, обладающих дальнодействием, существенным образом отличается от ситуаций без дальнодействия, поэтому большое теоретическое и практическое значение имеет анализ последствий дальнодействия [A11, A12], а также разработка методик проведения численных экспериментов по кинк-кинк и кинк-антикинк рассеянию при наличии дальнодействия [A6, A12].

Асимптотические оценки сил кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействия при наличии степенной асимптотики кинка, полученные в диссертации, являются серьезным продвижением к пониманию динамики солитонов с дальнодействием.

Методы исследования

Для изучения кинк-антикинк столкновений и мультикинк процессов использовались различные проверенные и устойчивые численные методы решения нелинейных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа.

Для получения спектра малых локализованных возбуждений кинка в линейном приближении решалась соответствующая задача Штурма–Лиувилля численными и аналитическими методами. Для модели φ^4 задача о спектре локализованных возбуждений кинка сводится к решению стационарного уравнения Шредингера с модифицированным потенциалом Пешль–Теллера, для которого все состояния дискретного спектра можно найти точно. Кроме того, нулевая мода любого кинка находится тривиально. Для поиска вибрационных мод кинков моделей, обсуждаемых в диссертации, использовались численные методы, в частности, применялся “метод стрельбы” [39].

Кинковые решения в явном виде в модели φ^8 с четырьмя вакуумами получены из алгебраических уравнений третьей и четвертой степени, для решения которых применялись методы Кардано и Феррари.

Анализ асимптотического поведения кинков, изучение изменений асимптотик при деформациях теоретико-полевой модели, а также оценки сил кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействий выполнялись с использованием аппроксимаций и асимптотических оценок.

Достоверность научных положений, результатов и выводов

Применялись современные и общепризнанные методы аналитического и численного исследования свойств решений типа уединенных волн нелинейных теоретико-полевых моделей (в частности, аналитические методы нахождения кинковых решений [28], а также исследования их асимптотического поведения, численные схемы решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и нахождения собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля [39]).

Все полученные результаты прошли верификацию: применялись альтернативные методы, исследовались частные и предельные случаи и т.д. Применяемые методы воспроизводят известные в литературе (и признанные научным сообществом достоверными) результаты во всех случаях, когда такое сравнение производилось. Кроме того, изложенные в диссертации результаты были представлены и получили признание на россий-

ских и международных научных конференциях, обсуждались на научных семинарах.

Личный вклад соискателя

Вклад соискателя в полученные результаты является определяющим: все основные результаты получены автором лично, численные расчеты проведены либо автором лично, либо по формулам, предложенным автором, выбор численных методов также осуществлялся автором. Содержание диссертации и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Публикации по теме диссертации

По теме диссертации опубликовано 28 печатных работ в период с 2014 по 2022 год, в том числе 18 статей [A1] – [A18] в рецензируемых научных журналах 1-го квартиля¹, рекомендованных ВАК и включенных в библиографические и реферативные базы данных рецензируемой научной литературы “Scopus” и “Web of Science”, а также 10 статей [A19] – [A28] в сборниках трудов международных конференций.

Апробация результатов

Научные результаты, выносимые на защиту, докладывались на конференциях и семинарах: International Conference on Particle Physics and Astrophysics (ICPPA-2022, ICPPA-2020, ICPPA-2018, ICPPA-2017, ICPPA-2016, ICPPA-2015), г. Москва, НИЯУ МИФИ, ноябрь 2022 г., октябрь 2020 г., октябрь 2018 г., октябрь 2017 г., октябрь 2016 г., октябрь 2015 г.; Научно-исследовательский семинар кафедры высшей математики НИЯУ МИФИ, г. Москва, 14 октября 2022 г.; 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ, г. Долгопрудный, Московская обл., ноябрь 2021 г.; VI Всероссийский научный форум “Наука будущего — наука молодых”, г. Москва, ноябрь 2021 г.; SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (DS19), Snowbird, Utah, USA, май 2019 г.; Dynamics Days 2019, Northwestern University, Illinois, USA, январь 2019 г.; Предновогодний семинар НИЦ КИ — ИТЭФ, г. Москва, 26 декабря 2018 г.; International Conference “Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling”, г. Москва, НИЯУ МИФИ, июнь 2018 г., май 2016 г.; Мемориальная сессия памяти Льва Борисовича Окуня в рамках Молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике, г. Москва, НИЦ КИ — ИТЭФ, 22 ноября 2017 г.; Молодежная конференция по теоретической и

¹Квартили в год выхода публикации согласно данным ресурса www.scimagojr.com, актуальным на конец 2022 года, а если публикация вышла в 2022 году, то учитывается квартиль 2021 года; импакт-факторы (ИФ) журналов за 2021 год взяты в конце 2022 года с официальных сайтов.

экспериментальной физике, г. Москва, НИЦ КИ — ИТЭФ, ноябрь 2017 г.; 50-я Зимняя школа ПИЯФ, пос. Рощино, Ленинградская обл., март 2016 г.; 19-я, 18-я и 17-я Московская международная школа физики (44-я, 43-я и 42-я Зимняя школа ИТЭФ), Московская обл., февраль 2016 г., февраль 2015 г., февраль 2014 г.; II Конференция молодых ученых и специалистов “КМУС–2015”, ПИЯФ НИЦ КИ, г. Гатчина, Ленинградская обл., ноябрь 2015 г.; Международная школа “Теоретические проблемы физики фундаментальных взаимодействий”, г. Санкт-Петербург, июль 2015 г.; Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов – 2015”, г. Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, апрель 2015 г.; Конференция “Молодые ученые России – 2015”, г. Москва, апрель 2015 г.; Научная сессия НИЯУ МИФИ, г. Москва, НИЯУ МИФИ, февраль 2015 г., январь 2014 г.; Межинститутская молодежная конференция “Физика элементарных частиц и космология”, г. Москва, ИЯИ РАН, ноябрь 2014 г.; XII Курчатовская молодежная научная школа, Москва, НИЦ КИ, октябрь 2014 г.; III Международная молодежная научная школа-конференция “Современные проблемы физики и технологий”, г. Москва, НИЯУ МИФИ, апрель 2014 г.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 299 страниц, включая 114 рисунков и 8 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 311 наименований.

Содержание работы

Введение содержит основную информацию о теме диссертации, основных положениях, выносимых на защиту, публикациях по теме диссертации, апробации результатов. Далее дается краткий обзор физических приложений низкоразмерных топологических солитонов. Заключительная часть введения содержит основные сведения о теоретико-полевых моделях и их топологических солитонах (кинках и антикинках), необходимые для дальнейшего изложения. В частности, выписан лагранжиан, уравнения движения для поля в общем случае и в статическом случае. Показано, что статический кинк удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с соответствующими граничными условиями. Введен суперпотенциал, масса кинка выражена через суперпотенциал. Объяснена постановка задачи о нахождении спектра малых возбуждений кинка в линейном приближении, прокомментированы численные методы, применяемые ниже для решения квантово-механической задачи о нахождении уровней дискретного спектра в одномерной потенциальной яме. Наконец, упомянут случай неявного задания кинка, а также рассмотрен вопрос о нахождении степенной асимптотики кинка.

Что касается методов, использованных для численного решения уравнений в частных производных, то применялись различные разностные схемы. Соответствующие комментарии с указаниями параметров схем, а также выполненных проверок, содержатся в каждом из разделов, упоминающих численные результаты.

Первая глава посвящена всестороннему изучению динамики кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействий в теоретико-полевых моделях φ^6 , φ^8 , двойной синус-Гордон и $\sinh$ -деформированная φ^4 .

Раздел 1.1 представляет собой введение к первой главе и содержит подробную информацию об истории изучения процессов рассеяния кинков модели φ^4 , упомянуты основные работы по этой тематике с 1975 года до наших дней. Разъясняется суть механизма резонансного обмена энергией между трансляционными и вибрационными модами кинков, играющего ключевую роль в понимании многих явлений в кинк-антикинк столкновениях. Дается краткий обзор результатов по кинк-антикинк взаимодействиям в различных моделях.

В **разделе 1.2** применено приближение коллективной координаты (ПКК) с одной степенью свободы для описания столкновений кинков модели φ^6 , задаваемой лагран-

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \varphi^2 (1 - \varphi^2)^2. \quad (1)$$

Кинковые решения этой модели хорошо известны, например, кинк, соединяющий вакуумы 0 и 1, т.е. принадлежащий топологическому сектору $(0, 1)$, может быть записан как $\varphi_{(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{-2x}}}$, а соответствующий антикинк получается заменой x на $-x$; масса (т.е. энергия покоя) каждого кинка/антикинка в модели равна $1/4$.

В рамках применения ПКК к кинк-(анти)кинк системе начальная полевая конфигурация $\varphi(x)$ выбирается в виде двух кинков $\varphi_K^{(1)}$ и $\varphi_K^{(2)}$, расположенных на расстоянии, много большем их характерных размеров (которые порядка единицы):

$$\varphi(x) = \varphi_K^{(1)}(x + a) + \varphi_K^{(2)}(x - a) + \text{const}, \quad a \gg 1. \quad (2)$$

В силу экспоненциальных асимптотик, перекрытие кинков экспоненциально мало, т.е. (2) удовлетворяет уравнению движения с точностью до экспоненциально малых членов. Далее предполагается, что a является функцией времени, $a = a(t)$, т.е. допускается относительное движение кинков, но без учета каких-либо изменений их формы. В результате вместо реальной полевой системы, обладающей бесконечным числом степеней свободы, рассматривается система с одной степенью свободы, динамика которой определяется эффективной функцией Лагранжа $L_{\text{eff}}(a, \dot{a})$, получаемой подстановкой (2) в лагранжиан (1) и последующим интегрированием по пространственной координате x :

$$L_{\text{eff}}(a, \dot{a}) = \frac{1}{2} m(a) \dot{a}^2 - V(a). \quad (3)$$

Конкретный вид функций $m(a)$ и $V(a)$ определяется рассматриваемой моделью и видом начальной конфигурации (2). Например, в случае кинк-кинк системы, т.е. конфигурации типа $(-1, 0, 1)$, в рамках ПКК используется анзац

$$\varphi_{(-1,0,1)}(x) = \varphi_{(-1,0)}(x + a) + \varphi_{(0,1)}(x - a), \quad (4)$$

см. рис. 1. Функции $m(a)$ и $V(a)$ в этом случае имеют вид:

$$m(a) = I_-(a), \quad V(a) = \frac{1}{2} I_+(a) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(-1,0,1)}^2(x) \left(1 - \varphi_{(-1,0,1)}^2(x) \right)^2 dx, \quad (5)$$

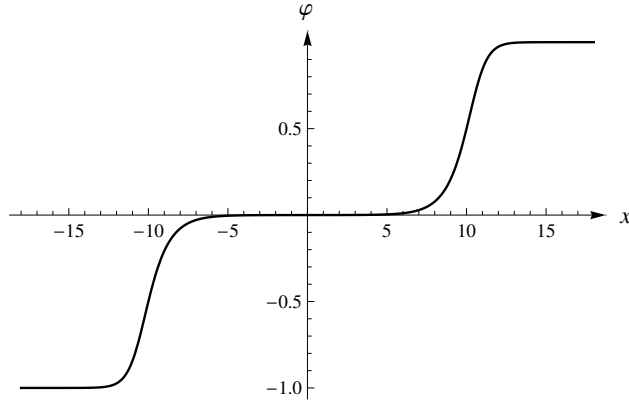


Рис. 1: анзац (4) при $a = 10$.

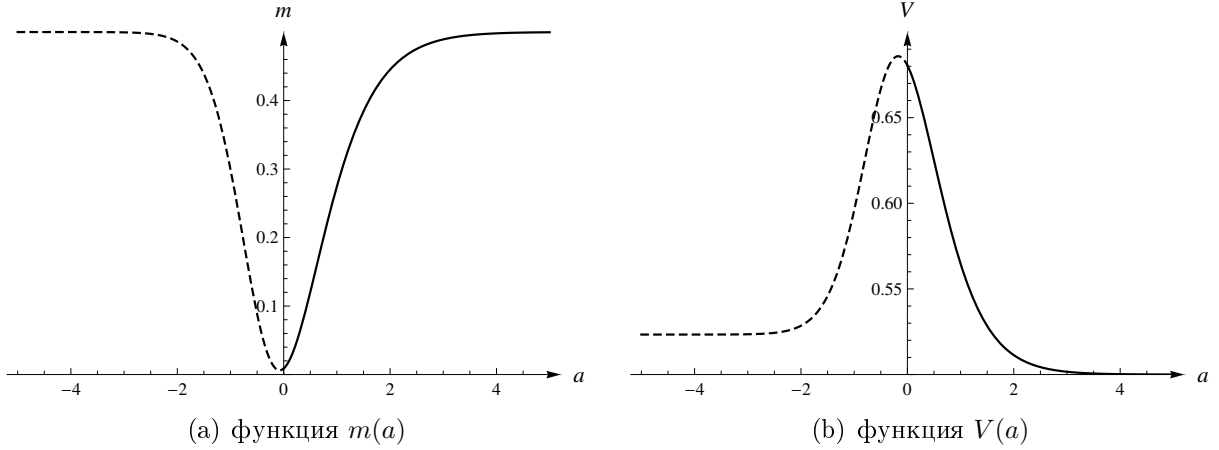


Рис. 2: функции $m(a)$ и $V(a)$ для конфигурации (4).

где

$$I_{\pm}(a) = \frac{1}{2} \pm 18e^{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + 3e^{-2(x-a)})^{3/2} (1 + 3e^{2(x+a)})^{3/2}}, \quad (6)$$

см. рис. 2. Зависимость $a(t)$ может быть получена решением задачи Коши для уравнения Эйлера–Лагранжа, следующего из (3):

$$m\ddot{a} + \frac{1}{2} \frac{dm}{da} \dot{a}^2 + \frac{dV}{da} = 0. \quad (7)$$

В качестве начальных условий задается начальное полурасстояние $a(0)$ и начальные скорости $|\dot{a}(0)|$.

В диссертации рассмотрены начальные конфигурации типов $(-1, 0, 1)$, $(0, -1, 0)$ и $(-1, 0, -1)$, построенные из двух солитонов. Результаты, полученные в рамках ПКК, сравнивались с численным решением точного уравнения движения для поля $\varphi(x, t)$.

Сравнение показывает, что кинк-кинк рассеяние в секторе $(-1, 0, 1)$ при небольших

скоростях хорошо описывается в рамках ПКК. Кинки отталкиваются, при всех начальных скоростях $0 < v_{\text{in}} < 1$ происходит отражение кинков. Кроме того, не подтвердились данные работы [40] о расхождении между результатами, полученными двумя методами. В работе [40] были обнаружены ошибки.

В секторах $(0, -1, 0)$ и $(-1, 0, -1)$ в результате численного решения уравнения движения обнаружено, что при $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}^{(\text{eom})}$ сталкивающиеся кинк и антикинк могут образовывать бион — долгоживущее связанное состояние. Дано качественное объяснение образования биона, основанное на представлении о переходах кинков в смежные топологические сектора модели. Во всех случаях взаимодействие кинка и антикинка имеет характер притяжения. В рамках ПКК без эффективного трения, однако, получить связанное состояние кинков невозможно.

В секторе $(0, -1, 0)$ кинки могут проходить друг через друга и уходить на бесконечности. Такой процесс наблюдается как в рамках ПКК, так и в численном решении точного уравнения движения. Для критической скорости в рамках ПКК получено $v_{\text{cr}}^{(\text{eff})} \approx 0.325$, численное решение уравнения движения дает $v_{\text{cr}}^{(\text{eom})} \approx 0.289$. Как видно, полученные двумя методами значения достаточно близки.

В секторе $(-1, 0, -1)$ подтвердилось существование окон разлета в диапазоне начальных скоростей $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}^{(\text{eom})} \approx 0.0448$. Причина этого явления — резонансный обмен энергией между трансляционной и вибрационной модами сталкивающихся кинков (см. ниже). Разумеется, в рамках ПКК с одной степенью свободы (когда вибрационные степени свободы не учитываются) смоделировать такое поведение кинков невозможно.

Таким образом, можно заключить, что ПКК с одной степенью свободы обеспечивает в целом хорошее описание кинк-кинк столкновений при не слишком больших и не слишком малых начальных скоростях. При низких начальных скоростях в секторах $(0, -1, 0)$ и $(-1, 0, -1)$ точная динамика качественно отличается от предсказаний в рамках ПКК. В то же время при ультрарелятивистских скоростях обнаруживаются значительные количественные расхождения. В секторе $(-1, 0, 1)$ взаимодействие кинков носит отталкивательный характер и связанное состояние не может образовываться. В этом случае ПКК хорошо работает и при малых начальных скоростях.

В разделе 1.3 изучены кинковые решения модели φ^8 , имеющие экспоненциальные асимптотики. Найдены спектры возбуждений кинков для трех различных типов потенциалов: $V(\varphi) = (\varphi^2 - a^2)^2 (\varphi^2 - b^2)^2$, $V(\varphi) = \varphi^2 (\varphi^2 - a^2)^2 (\varphi^2 + b^2)$ и $V(\varphi) =$

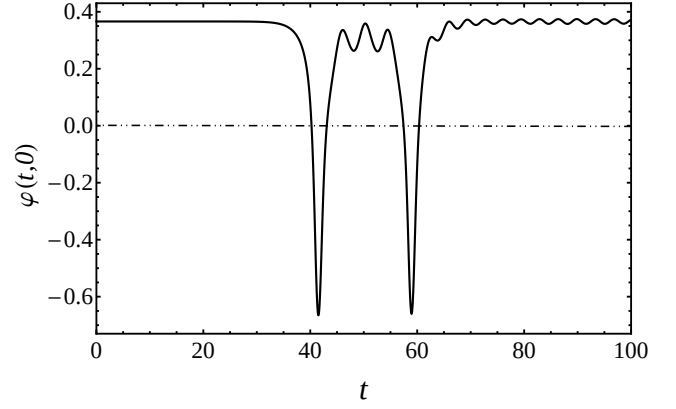
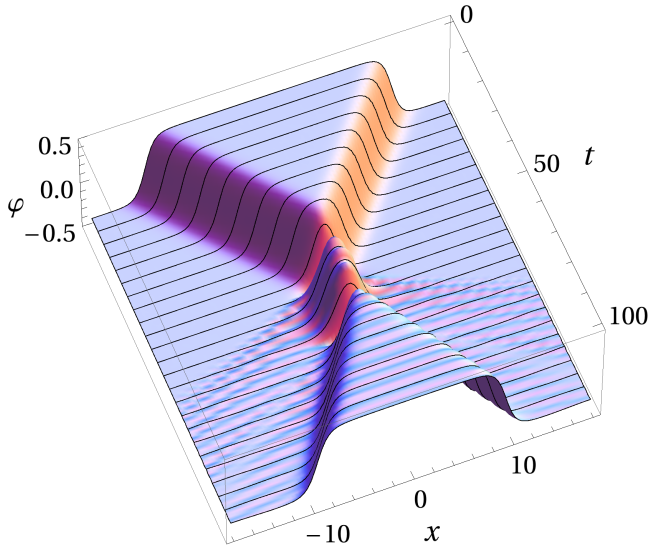


Рис. 3: резонансный разлет кинков после двух соударений при $v_{\text{in}} = 0.2868$. **Слева** — пространственно-временная картина столкновениях; **справа** — поле в начале координат (в точке столкновения) $x = 0$ в зависимости от времени.

$(\varphi^2 - a^2)^2 (\varphi^2 + b^2)^2$, где $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ и $b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, см. работу [7], где обосновывается применение рассматриваемой модели к описанию последовательностей фазовых переходов.

Показано, что некоторые кинки имеют вибрационные моды, что указывает на возможность резонансных явлений в кинк-антикинк столкновениях. Для модели с четырьмя вакуумами выполнено численное моделирование процесса столкновения кинка и антикинка, принадлежащих топологическому сектору $(-a, a)$ и имеющих в своих спектрах вибрационную моду. Показано, что, в зависимости от начальной скорости, имеется два различных режима столкновений. При $v_{\text{in}} > v_{\text{cr}} \approx 0.3160$ кинки неупруго отражаются друг от друга, в то время как при $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}$ происходит захват и образование биона. Кроме того, обнаружены окна разлета — интервалы начальных скоростей в диапазоне $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}$, в которых кинки разбегаются на бесконечности после двух или более столкновений. Пример сценария, соответствующего двукратному окну, показан на рис. 3. Анализ двукратных окон разлета показал, что их параметры хорошо описываются феноменологическим резонансным соотношением со значением резонансной частоты $\omega_R \approx 1.618$, близким к частоте вибрационной моды кинка $\omega_1 \approx 1.645$. Это подтверждает гипотезу о том, что причиной возникновения окон разлета является резонансный обмен энергией между трансляционной и вибрационной модами солитона.

В разделе 1.4 исследовано рассеяние кинков модели двойной синус-Гордон с потенциалом $V(\varphi) = \tanh^2 R (1 - \cos \varphi) + \frac{4}{\cosh^2 R} (1 + \cos \frac{\varphi}{2})$, где $R \geq 0$ — параметр. Найдено критическое значение начальной скорости v_{cr} : при $v_{\text{in}} > v_{\text{cr}}$ солитоны проходят друг

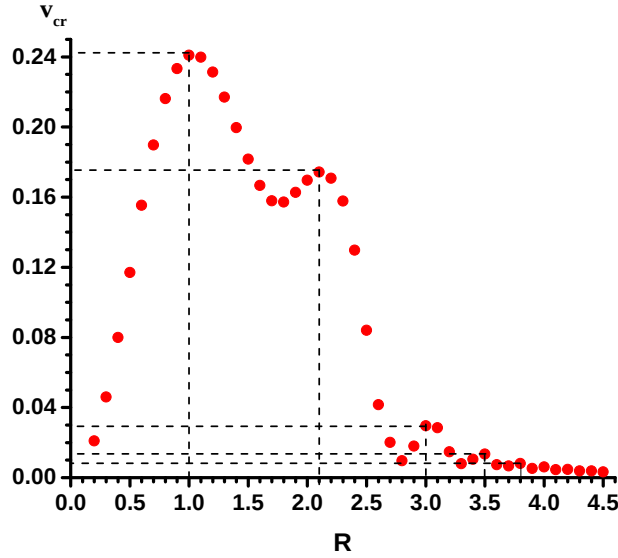


Рис. 4: зависимость критической начальной скорости v_{cr} от параметра модели R .

через друга и уходят на бесконечности, а при $v_{in} < v_{cr}$ образуют бион. Кроме того, в диапазоне $v_{in} < v_{cr}$ обнаружены окна разлета.

Исследована зависимость $v_{cr}(R)$, полученная кривая имеет серию хорошо различимых локальных максимумов, см. рис. 4. Заметим, что этот результат расходится с тем, что приведено в работе [9] — полученная там кривая имеет лишь один максимум. Это несоответствие, на наш взгляд, может быть следствием недостаточного количества экспериментальных точек при значениях параметра между $R = 1.8$ и $R = 2.4$ в [9].

Что касается конечных состояний, то в модели двойной синус-Гордон, помимо биона и окон разлета, в диапазоне $v_{in} < v_{cr}$ наблюдалось образование связанного состояния двух осциллонов, а также разлет осциллонов в некоторых случаях, рис. 5.

Таким образом, при некоторых начальных скоростях солитонов (расчеты выполнены для $R = 1$) в конечном состоянии наблюдаются два осциллона, разлетающиеся из точки столкновения кинков. При этом промежуток времени между первым соударением кинков и началом разбега осциллонов может быть достаточно большим, а поведение поля в течение этого времени весьма сложное: образуется бион, который затем эволюционирует в связанное состояние двух осциллонов, совершающих колебания друг около друга (амплитуда этих колебаний может существенно различаться), в дальнейшем осциллоны могут разлететься (рис. 5(a)) или оставаться связанными (рис. 5(b)), в зависимости от начальной скорости исходных кинков.

В разделе 1.5 исследованы процессы рассеяния кинков $\sinh$ -деформированной мо-

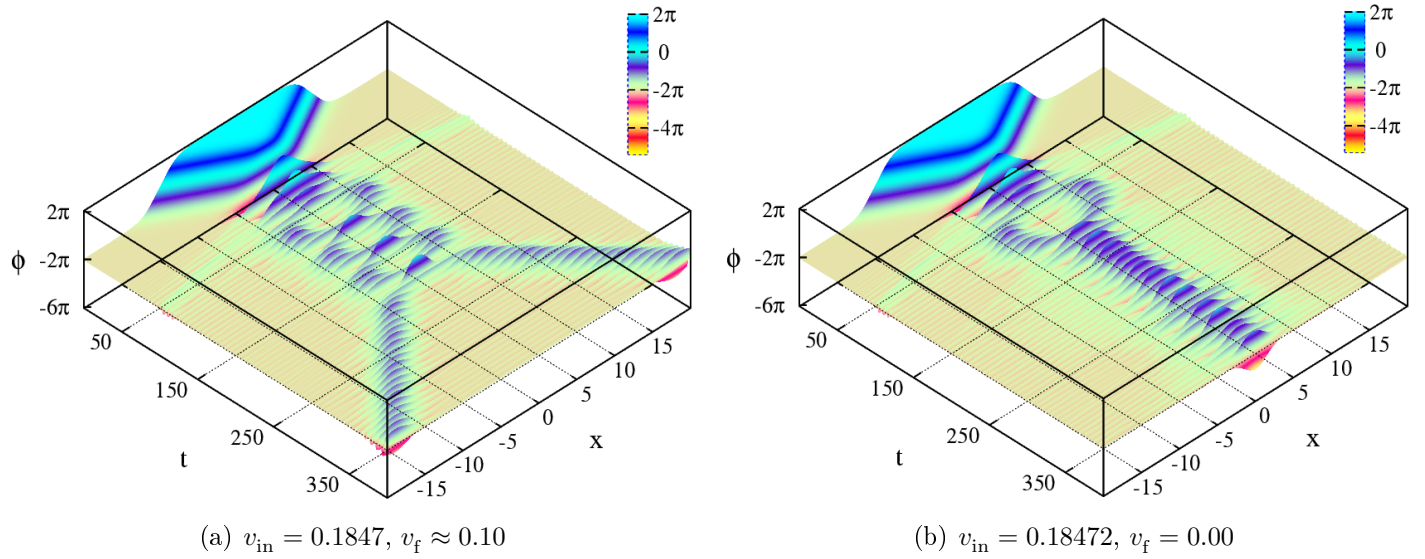


Рис. 5: образование осциллонов в столкновениях кинка и антикинка модели двойной синус-Гордон при различных начальных скоростях.

дели φ^4 , полученной из модели φ^4 при помощи процедуры деформации [16]. Потенциал модели имеет вид $V(\varphi) = \frac{1}{2} \text{sech}^2 \varphi (1 - \sinh^2 \varphi)^2$. Показано, что кинки деформированной модели во многом схожи с кинками исходной модели, в частности, имеют экспоненциальные асимптотики, а также вибрационную моду с частотой $\omega_1 \approx 1.89$ (соответствующая частота для модели φ^4 равна $\sqrt{3} \approx 1.73$).

В рассеянии кинков имеется критическая начальная скорость v_{cr} : при $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}$ происходит захват и образование биона, а при $v_{\text{in}} > v_{\text{cr}}$ кинки разлетаются на бесконечности после одного соударения. Величина критической скорости для $\sinh$ -деформированной модели φ^4 составляет $v_{\text{cr}} \approx 0.4639$, в то время как для модели φ^4 соответствующее значение равно 0.2598 [6, 21].

В диапазоне $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}}$ в $\sinh$ -деформированной модели φ^4 обнаружилась серия окон разлета — явление также свойственное и модели φ^4 , и некоторым другим моделям [21]. В частности, были идентифицированы двукратные, трехкратные и четырехкратные окна разлета. Появление окон разлета обусловлено резонансным обменом энергией между трансляционной и вибрационной модами кинков.

Общий характер рассеяния кинков $\sinh$ -деформированной модели φ^4 согласуется с тем, что модель не является интегрируемой [28]. Было также обнаружено образование связанного состояния двух осциллонов, т.е. конверсия кинк-антикинк пары в сложную осциллирующую структуру. Интересно, что при некоторых начальных скоростях (из

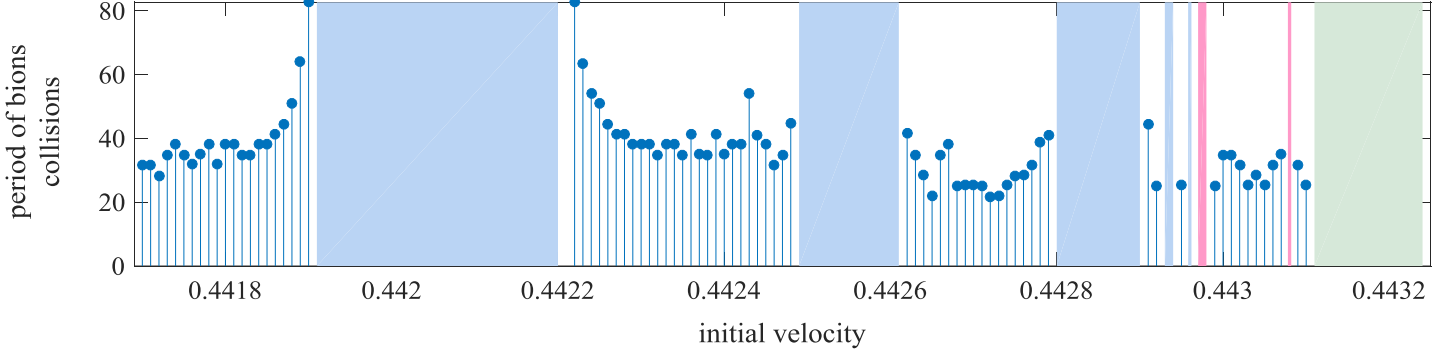


Рис. 6: период колебаний осциллонов друг относительно друга как функция начальной скорости сталкивающихся кинков. Закрашенные голубым цветом области обозначают окна разлета осциллонов. Зеленым цветом закрашена область, соответствующая двукратному окну разлета кинков. Розовым показаны четырехкратные окна разлета кинков.

диапазонов, для которых введен термин “окно разлета осциллонов”) сталкивающихся кинков в конечном состоянии наблюдался разлет осциллонов с конечными скоростями в широких пределах — от нуля до ~ 0.2 . На рис. 6 показана зависимость периода колебаний осциллонов друг относительно друга от начальной скорости кинков. Период колебаний осциллонов в связанном состоянии увеличивается при приближении начальных скоростей кинков к границе окна разлета осциллонов.

Асимметричные кинковые конфигурации, например, являющиеся решениями в моделях φ^6 или φ^8 , подходят для описания бегущих деформаций перегиба в графеновой наноленте [3]. Наблюдаемая асимметрия кинка (см. рис. 2b в статье [3]) означает, что описание (фитирование бегущей деформации) с помощью кинка модели φ^4 (формула (3) в статье [3]) не является оптимальным. Учет асимметрии может быть произведен за счет привлечения модели с потенциалом более высокой степени. В частности, предлагается использовать рассмотренные выше потенциалы шестой или восьмой степени с соответствующими параметрами для описания асимметричных кинковых состояний с энергией $\varepsilon_{1,1} = 325.4$ ккал/моль.

Нелинейное волновое уравнение двойной синус-Гордон применяется для моделирования магнитных систем с малым эффективным размером. Для ферромагнитных спиновых цепочек Гейзенберга модель двойной синус-Гордон может возникать при учете эффектов одноионной или обменной анизотропии или приложенных магнитных полей [41]. В этих приложениях, в зависимости от значений анизотропии и приложенных или индуцированных полей, возможны практически все значения параметра модели.

Таблица 1: начальные и конечные скорости квазичастиц (K — кинк, $\bar{K}$ — антикинк, b — бион), N — количество сталкивающихся солитонов.

N	тип	нач. конф.	начальные скорости	кон. конф.	конечные скорости
2	(0, 1, 0)	$K\bar{K}$	$v_K = 0.1, v_{\bar{K}} = -0.1$	b	$v_b = 0$
2	(1, 0, 1)	$\bar{K}K$	$v_{\bar{K}} = 0.1, v_K = -0.1$	$\bar{K}K$	$v_K = -v_{\bar{K}} \approx 0.1$
3	(0, 1, 0, 1)	$K_1\bar{K}K_2$	$v_{K_1} = -v_{K_2} = 0.1,$ $v_{\bar{K}} = 0$	bK	$v_b \approx -0.9,$ $v_K \approx 0.7$
3	(1, 0, 1, 0)	$\bar{K}_1K\bar{K}_2$	$v_{\bar{K}_1} = -v_{\bar{K}_2} = 0.1,$ $v_K = 0$	$\bar{K}b$	$v_{\bar{K}} \approx -0.7,$ $v_b \approx 0.9$
4	(0, 1, 0, 1, 0)	$K_1\bar{K}_1K_2\bar{K}_2$	$v_{K_1} = -v_{\bar{K}_2} = 0.1,$ $v_{\bar{K}_1} = -v_{K_2} = 0.05$	$\bar{K}bK$	$v_K \approx -v_{\bar{K}} \approx 0.13,$ $v_b = 0$
4	(1, 0, 1, 0, 1)	$\bar{K}_1K_1\bar{K}_2K_2$	$v_{\bar{K}_1} = -v_{K_2} = 0.1,$ $v_{K_1} = -v_{\bar{K}_2} = 0.05$	$b_1 b_2$	$v_{b_2} \approx -v_{b_1} \approx 0.5$

Таблица 2: максимальные значения плотностей энергии и экстремальные значения градиента поля, наблюдавшиеся в столкновениях кинков; N — количество сталкивающихся кинков.

N	нач. конфиг.	$\varepsilon_{\max}^{(N)}$	$k_{\max}^{(N)}$	$p_{\max}^{(N)}$	$u_{\max}^{(N)}$	$e_{\min}^{(N)}$	$e_{\max}^{(N)}$
1	K	0.15	0.0007	0.074	0.075	0.0	0.4
2	$K\bar{K}$	0.25	0.25	0.075	0.075	-0.4	0.4
2	$\bar{K}K$	0.37	0.37	0.34	0.07	-0.4	0.4
3	$K\bar{K}K$	0.75	0.27	0.075	0.67	-0.58	1.15
3	$\bar{K}K\bar{K}$	0.75	0.27	0.075	0.67	-1.15	0.57
4	$K\bar{K}K\bar{K}$	0.95	0.95	0.12	0.3	-0.77	0.77
4	$\bar{K}K\bar{K}K$	1.47	1.47	0.78	0.42	-0.91	0.91

Вторая глава посвящена изучению мультикинк процессов в моделях φ^6 , двойной синус-Гордон и φ^8 .

Раздел 2.1 представляет собой введение ко второй главе и содержит краткий обзор имеющейся литературы и современного состояния исследований.

В **разделе 2.2** исследованы процессы, происходящие при столкновениях нескольких кинков (K) и антикинков ($\bar{K}$) модели φ^6 в одной точке. Рассмотрены начальные конфигурации следующих типов: $K\bar{K}$, $\bar{K}K$, $K\bar{K}K$, $\bar{K}K\bar{K}$, $K\bar{K}K\bar{K}$ и $\bar{K}K\bar{K}K$. Во всех случаях начальные положения и начальные скорости кинков подбирались таким образом, чтобы обеспечить одновременное столкновение всех волн в одной точке. Основные полученные данные собраны в табл. 1 и 2.

В табл. 1 представлены начальные скорости кинков и антикинков вместе с конечными скоростями квазичастиц для всех рассмотренных процессов. В зависимости от количества кинков и порядка их расположения в начальной конфигурации, наблюдались отражение, прохождение друг через друга, захват. Конкретное конечное состояние является следствием достаточно сложной картины попарного взаимодействия солитонов: две волны могут образовать связанное состояние либо отразиться друг от друга в зависимости от их начальных скоростей (v_{cr} различна для $K\bar{K}$ и $\bar{K}K$, так как кинки асимметричны).

В случае $K\bar{K}$ столкновений (начальная конфигурация типа $(0, 1, 0)$) при $v_{\text{in}} = 0.1$ наблюдался захват и образование биона, так как $v_{\text{in}} < v_{\text{cr}} \approx 0.289$. В то же время в $\bar{K}K$ столкновении (начальная конфигурация типа $(1, 0, 1)$) при $v_{\text{in}} = 0.1$ наблюдался разлет кинков после соударения, так как в этом случае $v_{\text{in}} > v_{\text{cr}} \approx 0.045$.

Далее рассмотрены столкновения трех волн, а именно, $K\bar{K}K$ (начальная конфигурация типа $(0, 1, 0, 1)$) и $\bar{K}K\bar{K}$ (начальная конфигурация типа $(1, 0, 1, 0)$). Наблюдавшиеся конечные состояния в этих случаях обусловлены захватом кинка и антикинка при низких энергиях, $K\bar{K} \rightarrow b$ (здесь b означает “бион”), см. табл. 1.

В случае столкновения четырех волн ситуация более сложная. С одной стороны, в процессе $K\bar{K}K\bar{K} \rightarrow \bar{K}bK$ наблюдались две характерные особенности: а) образование биона, б) прохождение кинка и антикинка друг через друга и разлет на бесконечности. С другой стороны, в процессе $\bar{K}K\bar{K}K \rightarrow b b$ в конечном состоянии образуются два биона, вылетающие с большими скоростями из точки столкновения, т.е. происходит аннигиляция всех четырех солитонов. Пример пространственно-временного распределения энергии показан на рис. 7.

Максимальные значения плотностей энергии и экстремальные значения градиента поля, наблюдавшиеся в столкновениях кинков, собраны в табл. 2, где ε_{max} , k_{max} , p_{max} и u_{max} обозначают максимальные плотности полной, кинетической, потенциальной и градиентной энергии соответственно, а e_{min} и e_{max} — экстремальные значения градиента поля. Значения, приведенные в первой строке табл. 2, вычислены для уединенного кинка, движущегося со скоростью $v = 0.1$. Видно, что максимальная плотность полной энергии для одного кинка равна 0.15 и что она распределена примерно поровну между потенциальной и градиентной, в то время как максимальная плотность кинетической энергии относительно мала при данной скорости. Уединенный кинк создает максималь-

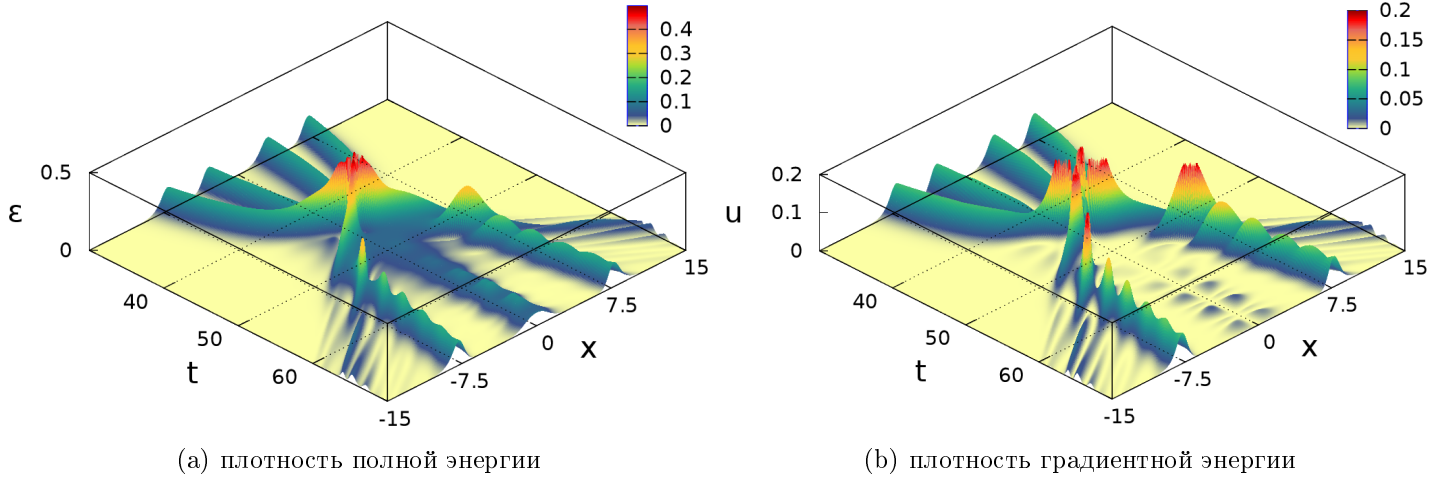


Рис. 7: пространственно-временная картина столкновения четырех кинков модели φ^6 в случае начальной конфигурации типа $(0, 1, 0, 1, 0)$.

ный градиент поля 0.4, в то время как антикинк создавал бы такой же по величине, но противоположный по знаку максимальный градиент поля. Максимальная плотность полной энергии в $K\bar{K}$ столкновениях равна 0.25 и состоит в основном из кинетической энергии. Максимальный (минимальный) градиент поля такой же, как и в случае одного движущегося кинка. В силу асимметричности кинков модели φ^6 , в столкновениях $\bar{K}K$ наблюдается несколько более высокая максимальная плотность полной энергии: 0.37. Экстремальные значения градиента поля такие же, как и для одного движущегося кинка (антикинка). В столкновениях трех кинков максимальная плотность полной энергии достигала значения 0.75, что в пять раз превышает соответствующее значение для одного кинка. Максимальное и минимальное значения градиента поля равны 1.15 и -1.15 соответственно, что примерно в три раза больше, чем для одного кинка. В столкновениях четырех кинков, случай $K\bar{K}K\bar{K}$, максимальная плотность полной энергии примерно в 6.3 раза больше, чем для одного кинка. Примечательно, что в случае $\bar{K}K\bar{K}K$ максимальная плотность полной энергии почти в десять раз больше, чем для одного кинка, и в основном в виде кинетической энергии. Экстремальные значения градиента поля в столкновениях четырех кинков примерно в два раза больше, чем для одного кинка. Таким образом, можно заключить, что в мультикинк столкновениях могут наблюдаться области с весьма высокими плотностями энергии. Отметим, что наибольшее значение плотности потенциальной энергии $p_{\max} = 0.12$ наблюдалось в процессе $K\bar{K}K\bar{K} \rightarrow \bar{K}bK$ в осцилляциях биона после столкновения кинков.

Подчеркнем, что в мультикинк столкновениях рождаются квазичастицы “второго

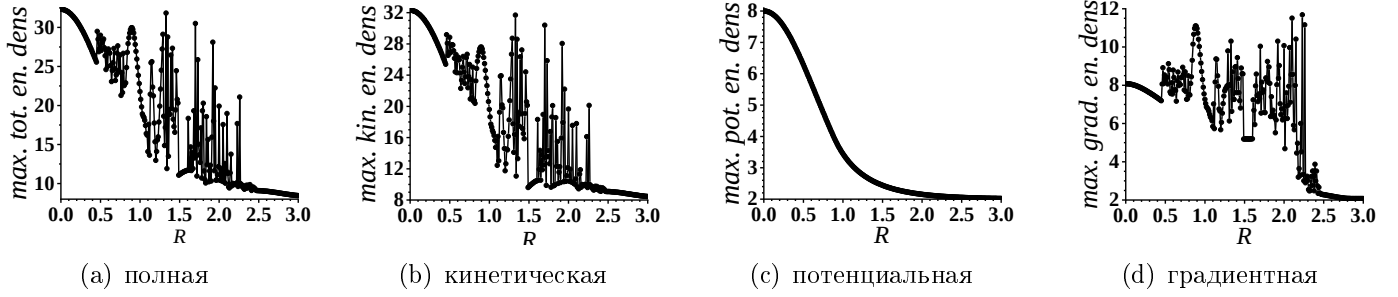


Рис. 8: максимальные плотности энергии в кинк-антикинк столкновениях как функции параметра R .

поколения”, имеющие высокие скорости. Их, в свою очередь можно заставить сталкиваться, создавая таким образом области с еще более высокими плотностями энергии.

В разделе 2.3 исследованы столкновения нескольких кинков модели двойной синус-Гордон в одной точке (в небольшой пространственной области): (а) кинка и антикинка, (б) двух кинков и антикинка, (в) двух кинков и двух антикинок.

В кинк-антикинк столкновениях основное внимание было уделено изучению распределения энергии при различных значениях параметра модели R : получены зависимости максимальных (по x и t) плотностей кинетической, градиентной, потенциальной и полной энергии, рис. 8. Максимальные плотности кинетической, градиентной и полной энергии ведут себя достаточно хаотически при $0.5 \lesssim R \lesssim 2.5$, в то время как при $R \lesssim 0.5$ и $R \gtrsim 2.5$ наблюдаются гладкие и монотонные участки графиков. Хаотическое поведение может быть следствием того, что начальная скорость кинков $v_{\text{in}} = 0.1$ меньше критической v_{cr} , см. рис. 4. Это, в свою очередь, приводит к захвату кинков и образованию биона, при последующей эволюции которого происходит сложное перераспределение энергии. В то же время при $R \lesssim 0.5$ и $R \gtrsim 2.5$ получается, что $v_{\text{in}} > v_{\text{cr}}$, и сталкивающиеся кинки разлетаются на бесконечности после одного соударения, а зависимости максимальных плотностей энергий от R становятся гладкими и монотонными. Кроме того, гладкие и монотонные участки наблюдаются и при $1.5 \lesssim R \lesssim 1.6$, см. рис. 8. В этом диапазоне значений параметра в конечном состоянии после двух осцилляций связанного состояния кинка и антикинка рождаются пара разлетающихся осциллонов.

В столкновениях двух кинков и антикинка наблюдались конечные состояния в виде возбужденного кинка (при $R = 0.5$), возбужденного кинка и разлетающихся осциллонов (при $R = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$), а также в виде двух разлетающихся кинков и одного покоящегося антикинка (при $R = 3.0$). Максимальные плотности кинетической, градиентной и полной энергии ведут себя хаотически. При этом в диапазоне $1.7 \lesssim R \lesssim 2.1$

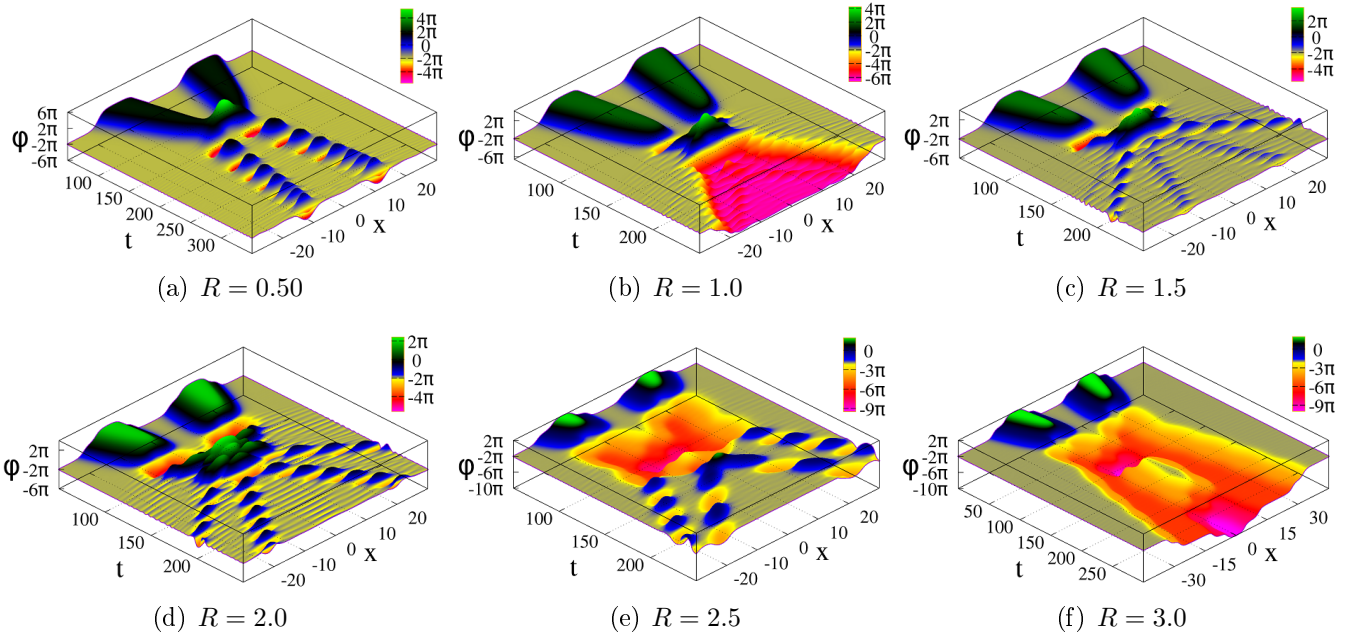


Рис. 9: пространственно-временная картина столкновения четырех кинков при различных R .

наблюдаются гладкие и монотонные участки кривых, что может быть связано с образованием пары разлетающихся осциллонов сразу после столкновения кинков.

Наконец, рассмотрены *столкновения двух кинков и двух антикинков*. Наблюдалось большое разнообразие конечных состояний. Максимальные плотности энергии сильно зависят от начальных положений сталкивающихся кинков, их анализ требует отдельного исследования, выходящего за рамки настоящей диссертации. Перечислим наиболее типичные наблюдавшиеся конечные конфигурации. При $R = 0.5$ формируется осциллирующая структура — связанное состояние кинка и антикинка. При $R = 1.0$ наблюдаются разлетающиеся кинк и антикинк и два осциллона. При $R = 1.5$ и $R = 2.0$ в конечном состоянии обнаруживаются лишь осциллоны, при $R = 3.0$ — разлетающиеся кинк и антикинк, в то время как другая кинк-антикинк пара образует связанное состояние, локализованное вблизи точки столкновения. Пространственно-временная картина столкновения для некоторых значений параметра R представлена на рис. 9.

Таким образом, в столкновениях более чем двух кинков наблюдается большое разнообразие конечных состояний, а поведение максимальных плотностей энергии сильно зависит от присутствия или отсутствия осциллирующих структур после столкновения.

Раздел 2.4 посвящен численному исследованию экзотических процессов при столкновениях нескольких кинков модели φ^8 с потенциалом $V(\varphi) = \frac{8}{9}(\varphi^2 - 1)^2(\varphi^2 - \frac{1}{4})^2$. Начальные условия во всех случаях конструировались в виде двух, трех или четырех

кинков (антикинков) φ_{s_i} , расположенных в точках X_i и движущихся со скоростями v_i :

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_{s_i} \left(\frac{x - X_i - v_i t}{\sqrt{1 - v_i^2}} \right) + C_n, \quad (8)$$

с $n = 2, 3$ и 4 в столкновениях двух, трех и четырех солитонов соответственно. Нижний индекс s_i обозначает топологический сектор i -го кинка/антикинка и “принимает значения” $(-1, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ или $(1, \frac{1}{2})$. Константы C_n в (8) выбираются так что поле при $x \rightarrow \pm\infty$ и между кинками стремится к вакуумным значениям. Получены следующие основные результаты.

Смена топологического сектора. В модели имеется три топологических сектора, в которых кинковые решения различаются. Переход кинка или пары кинк-антикинк из одного сектора в другой представляет собой нетривиальный процесс. Такие переходы наблюдались при столкновении трех кинков в случаях начальных конфигураций типов $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, а также в столкновениях четырех кинков, образующих начальную конфигурацию типа $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Например, в антикинк-кинк-кинк столкновениях с начальной конфигурацией типа $(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ с начальными условиями (8) с $n = 3$, $s_1 = (-\frac{1}{2}, -1)$, $s_2 = (-1, -\frac{1}{2})$, $s_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $C_3 = \frac{3}{2}$, $X_1 = -40$, $X_2 = -28$, $X_3 = 40$, $v_1 = 0.84$, $v_2 = 0.65$, $v_3 = -0.7$. При таких начальных данных все три солитона сталкиваются в начале координат. В результате столкновения кинк $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ незначительно изменяет свою скорость от $v_3 = -0.7$ до $v_{1f} \approx -0.619$. Антикинк-кинк пара в секторе $(-1, -\frac{1}{2})$ аннигилирует, а вместо нее в конечном состоянии наблюдается кинк-антикинк пара в секторе $(\frac{1}{2}, 1)$.

Рассеяние осциллона на кинке. Процесс наблюдался в случаях начальных конфигураций типов $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. В первом случае осциллон, движущийся в вакууме $-\frac{1}{2}$, почти беспрепятственно проходит сквозь кинк $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и попадает в область вакуума $\frac{1}{2}$. При этом кинк практически не меняет своего состояния. Во втором случае столкновение осциллона, движущегося в вакууме $\frac{1}{2}$, и кинка $(\frac{1}{2}, 1)$ приводит к отскоку осциллона и значительной передаче импульса кинку.

Рождение кинк-антикинк пар. Осциллоны могут нести энергию, достаточную для рождения одной или даже нескольких кинк-антикинк пар. Зафиксировано рождение кинк-антикинк пар в столкновениях осциллонов, движущихся в вакууме $-\frac{1}{2}$, рис. 10. В зависимости от относительной фазы колебаний поля в осциллонах, наблюдалось про-

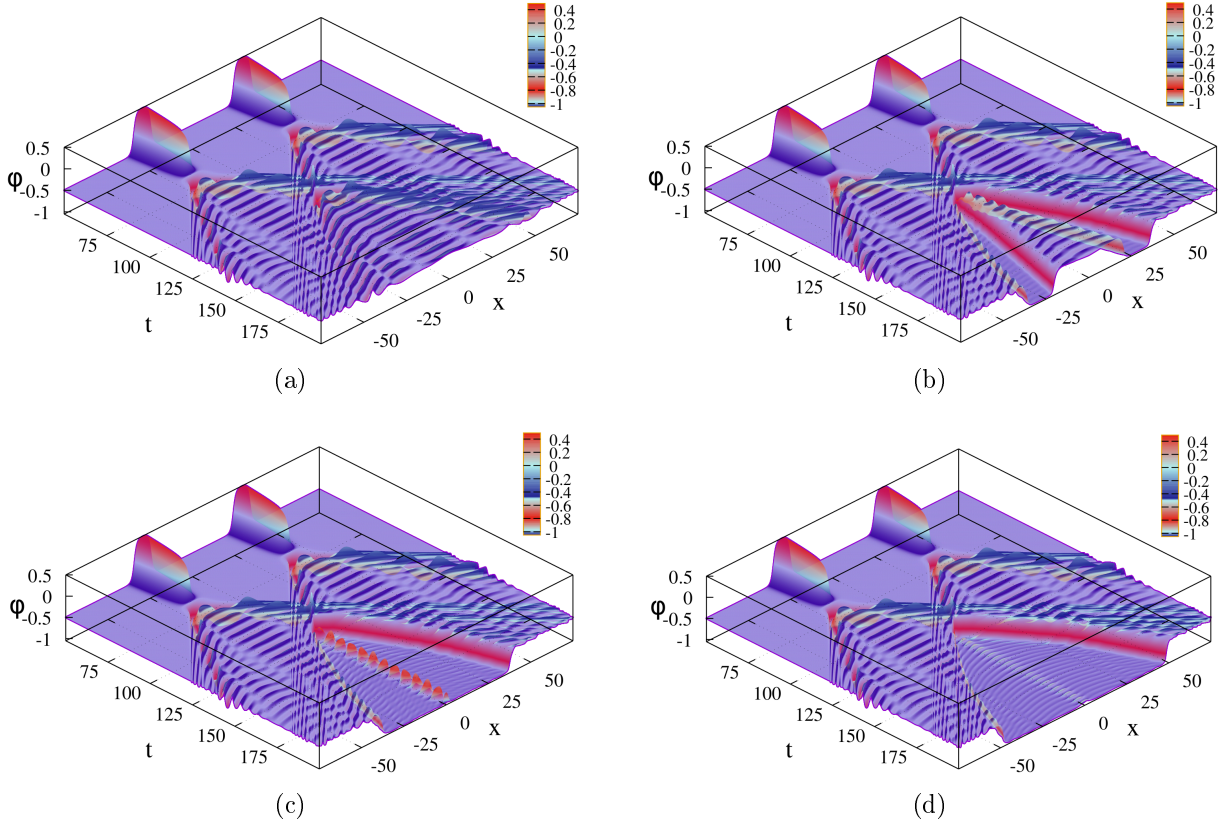


Рис. 10: пространственно-временная картина осциллон-осциллон столкновений.

хождение осциллонов друг через друга (рис. 10(a)), рождение двух кинк-антикинк пар (рис. 10(b)), рождение кинк-антикинк пары и осциллона (рис. 10(c) и 10(d)).

Образование пар кинк-антикинк при столкновениях осциллонов является резонансным процессом, сильно зависящим от фаз колебаний поля в сталкивающихся осциллонах. Кроме того, рассеяние осциллона на кинке существенно зависит от того, какие вакуумы соединяет кинк, а также от свойств осциллонов, движущихся в этих вакуумах.

Третья глава посвящена получению аналитических и (где возможно) явных выражений для кинковых решений, изучению трансформационных свойств кинков относительно деформации теоретико-полевой модели, получению точного решения типа доменной стенки в модели с несколькими действительными скалярными полями.

Раздел 3.1 представляет собой введение к третьей главе и содержит обзор литературы, посвященной построению решений типа топологических солитонов в моделях с одним и несколькими полями в пространствах различных размерностей.

В **разделе 3.2** рассмотрена модель φ^8 с потенциалом $V(\varphi) = \frac{1}{2} (\varphi^2 - a^2)^2 (\varphi^2 - b^2)^2$ с четырьмя вырожденными минимумами, изучен вопрос о возможности получения кин-

ковых решений в явном виде $\varphi = \varphi_{\text{к}}(x)$. Несмотря на востребованность модели в приложениях, ее кинки до сих пор были известны в основном в неявном виде $x = x_{\text{к}}(\varphi)$, что существенно ограничивало изучение (в особенности аналитическими методами) свойств данной модели.

В диссертации показано, что в случае целого положительного отношения $b/a = n$ задача о нахождении явных выражений для кинков сводится к решению алгебраического уравнения степени $n + 1$ (для удобства далее положим $b = 1$, тогда $a = \frac{1}{n}$). Например, в топологическом секторе $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ это уравнение запишется в виде

$$\left(\frac{1 + n\varphi}{1 - n\varphi} \right)^n \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} = \exp \left[2 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) x \right]. \quad (9)$$

В качестве примера рассмотрены случаи $n = 2$ и 3 , получены аналитические формулы для кинков во всех топологических секторах. Например, при $n = 2$:

$$\varphi_{\text{к}}^{(2)}(x) = \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left[\tanh \left(\frac{3}{4} x \right) \right] + \frac{\pi m}{3} \right), \quad (10)$$

где $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (или принимает любые другие шесть последовательных целых значений). При $m = 0$ и $m = 5$ формула (10) дает кинк и антикинк в секторе $(\frac{1}{2}, 1)$; при $m = 1$ и $m = 4$ — кинк и антикинк в секторе $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; при $m = 2$ и $m = 3$ — кинк и антикинк в секторе $(-1, -\frac{1}{2})$.

С использованием полученных выражений были вычислены массы кинков. Кроме того, изучены спектры возбуждений всех кинков модели при $n = 2$ и $n = 3$: во всех случаях присутствуют только нулевые моды.

В **разделе 3.3** рассмотрено семейство теоретико-полевых моделей с полиномиальными потенциалами $V(\varphi) = \frac{1}{2} (1 + \varphi)^{2m} (1 - \varphi)^{2n}$, $m \geq 1$, $n \geq 2$. Получены кинковые решения, изучено их асимптотическое поведение. В частности, при произвольных $m \geq 2$, $n \geq 2$ кинковое решение имеет вид

$$\begin{aligned} x - x_0 = & -\frac{1}{(1 - \varphi)^{n-1}} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{C_{m+n-2}^{j-1}}{2^j (m-j) C_{m-1}^{j-1}} \cdot \frac{1}{(1 + \varphi)^{m-j}} + \\ & + \frac{C_{m+n-2}^{m-1}}{2^{m-1}} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2^l (n-l)} \cdot \frac{1}{(1 - \varphi)^{n-l}} + \frac{C_{m+n-2}^{m-1}}{2^{m+n-1}} \ln \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi}, \end{aligned} \quad (11)$$

см. рис. 11. Константу x_0 , определяющую положение кинка, удобно выбрать так, что

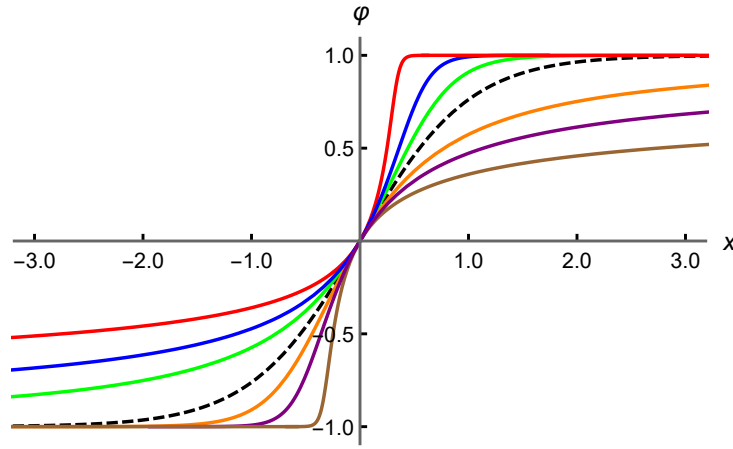


Рис. 11: кинки (11) для $n = 1, m = 5$ (красная кривая), $n = 1, m = 3$ (синяя кривая), $n = 1, m = 2$ (зелёная кривая), $n = 2, m = 1$ (оранжевая кривая), $n = 3, m = 1$ (пурпурная кривая), $n = 5, m = 1$ (коричневая кривая). Для сравнения построен кинк модели φ^4 (черная штриховая кривая), соответствующей $n = 1, m = 1$.

$$\varphi = 0 \text{ при } x = 0: x_0 = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{C_{m+n-2}^{j-1}}{2^j (m-j) C_{m-1}^{j-1}} - \frac{C_{m+n-2}^{m-1}}{2^{m-1}} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{2^l (n-l)}.$$

Для всех кинков получены потенциалы, определяющие спектры возбуждений в линейном приближении. Во всех случаях получены также нулевые моды кинков, отвечающие трансляционной инвариантности полевой системы.

При $n = m$ найденные решения, очевидно, симметричны, в то время как при $n \neq m$ кинки асимметричны. В асимметричном случае нетривиален вопрос о распределении массы вдоль солитона. Во всех случаях найдены положения центра масс кинка. Интересно, что при $m = 1$ при увеличении n центр масс сначала смещается влево, смещение достигает максимума при $n = 4$. При дальнейшем увеличении n центр масс приближается к $x = 0$ (во всех случаях кинки центрированы так, что $\varphi = 0$ при $x = 0$). В случае произвольных $m \geq 2$ и $n \geq 2$ центр масс смещен влево при $m < n$ и вправо при $m > n$.

В **разделе 3.4** изучен вопрос об изменении асимптотического поведения кинка при деформации модели ограниченной функцией.

Суть процедуры деформации состоит в следующем: если имеется модель с потенциалом $V^{(0)}(\varphi)$ и известным кинковым решением $\varphi_K^{(0)}(x)$, а также задана деформирующая функция $f(\varphi)$, которая строго монотонно возрастает на отрезке между вакуумами деформированной модели, то можно ввести новую модель с потенциалом и кинком

$$V^{(1)}(\varphi) = \frac{V^{(0)}[f(\varphi)]}{[f'(\varphi)]^2}, \quad \varphi_K^{(1)}(x) = f^{-1}[\varphi_K^{(0)}(x)]. \quad (12)$$

В диссертации показано, как процедура деформации может быть применена к случаю неявных кинков: если кинк модели $V^{(0)}(\varphi)$ задан неявно выражением $x = x_K^{(0)}(\varphi)$, то кинковое решение деформированной модели будет $x = x_K^{(1)}(\varphi)$, где $x_K^{(1)}(\varphi) = x_K^{(0)}(f(\varphi))$.

Также получены следующие трансформационные свойства асимптотик кинков:

- 1) в случае строго монотонной деформирующей функции с конечной производной экспоненциальная асимптотика остается экспоненциальной с точно таким же показателем;
- 2) степенная асимптотика остается степенной с той же степенью координаты, но, в зависимости от производной деформирующей функции, может измениться числовой коэффициент.

С точки зрения динамики это означает, что в случае кинков с экспоненциальными асимптотиками сила кинк-антикинк взаимодействия сохраняет экспоненциальную асимптотическую зависимость от расстояния. Для кинков со степенными асимптотиками сила сохраняет ту же степенную зависимость от расстояния, но может несколько уменьшаться или возрастать в зависимости от значения производной деформирующей функции в вакууме деформированной модели.

Далее рассмотрен случай деформирующей функции с бесконечной производной. Предполагалось, что вблизи вакуума $\bar{\varphi}_1$ деформированной модели функция $f(\varphi)$ ведет себя следующим образом:

$$f(\varphi) \approx f(\bar{\varphi}_1) - B(\bar{\varphi}_1 - \varphi)^\beta \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow \bar{\varphi}_1 - 0, \quad (13)$$

где $B > 0$ и β — константы, $0 < \beta < 1$. Трансформационные свойства асимптотик:

- 1) экспоненциальная асимптотика кинка остается экспоненциальной, но показатель экспоненты умножается на $1/\beta$, что приводит к более быстрому приближению поля к вакуумному значению;
- 2) степенная асимптотика кинка остается степенной, однако степень координаты в знаменателе увеличивается в $1/\beta$ раз, т.е. поле деформированного кинка быстрее приближается к вакуумному значению.

С точки зрения кинк-антикинк взаимодействия это означает, что для кинков с экспоненциальными асимптотиками сила взаимодействия сохраняет экспоненциальный характер зависимости, но для деформированных кинков она быстрее убывает с расстоянием. В случае степенных асимптотик степень расстояния при деформации увеличивается, т.е., опять же, сила начинает убывать быстрее с расстоянием.

Показана универсальность асимптотики потенциала $U(x)$ линеаризованной задачи о малых возмущениях для любого кинка, имеющего степенную асимптотику. Потенциал для такого кинка асимптотически убывает пропорционально обратному квадрату координаты, стремясь к нулю сверху: $U(x) \sim 1/x^2$. В случае строго монотонной деформирующей функции с конечной производной асимптотика потенциала $U(x)$ не меняется. В случае бесконечной производной деформирующей функции меняется числовой коэффициент в асимптотике (при $\beta \rightarrow 0$ коэффициент растет как $1/\beta^2$). Асимптотические свойства потенциала $U(x)$ важны для изучения спектра возбуждений кинка. Что, в свою очередь, принципиально для понимания резонансных явлений в кинк-антикинк рассеянии [A11, A21, 21].

Изменения асимптотик кинков проиллюстрированы примерами, в которых использованы модели с множеством физических приложений — φ^4 , φ^8 , синус-Гордон и др. [6, 21]. В качестве деформирующих функций выбраны $f(\varphi) = \sinh \varphi$ и $f(\varphi) = \arcsin \varphi$.

В разделе 3.5 рассмотрена модель, заданная лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\nu \chi^i \partial^\nu \chi^i - V(\varphi) - \gamma W(\varphi, \chi) \quad (14)$$

с потенциалами

$$V(\varphi) = (1 - \varphi^2)^2, \quad W(\varphi, \chi^i) = (\varphi^2 - \mu^2) \chi^i \chi^i + \beta (\chi^i \chi^i)^2, \quad (15)$$

где $\gamma, \beta \geq 0$, $0 \leq \mu^2 \leq 1$ — константы, а индекс i пробегает значения от 1 до 3. Найдено точное аналитическое решение в виде плоской доменной стенки с локализованной на ней конфигурацией триплета скалярных полей (ось z перпендикулярна стенке, тогда $\varphi = \varphi(z)$, $\chi^i = \chi^i(z)$; кроме того, можно выбрать ориентацию поля χ^i во внутреннем пространстве вдоль третьей оси, $\chi^i(z) = \chi(z) \cdot (0, 0, 1)$):

$$\varphi_s(z) = \tanh \alpha z, \quad \chi_s(z) = \frac{A}{\cosh \alpha z}, \quad (16)$$

где A — константа, связанная с α и γ соотношением $A^2 = (2 - \alpha^2)/\gamma$, см. рис. 12. Найденное решение аналогично ранее численно полученному в работе других авторов [15]. Сформулированы условия, которым должны удовлетворять параметры модели для существования решения (эти условия не обсуждались в работе [15]).

С помощью решения (16) получены вклады в действие, описывающие трансляцион-

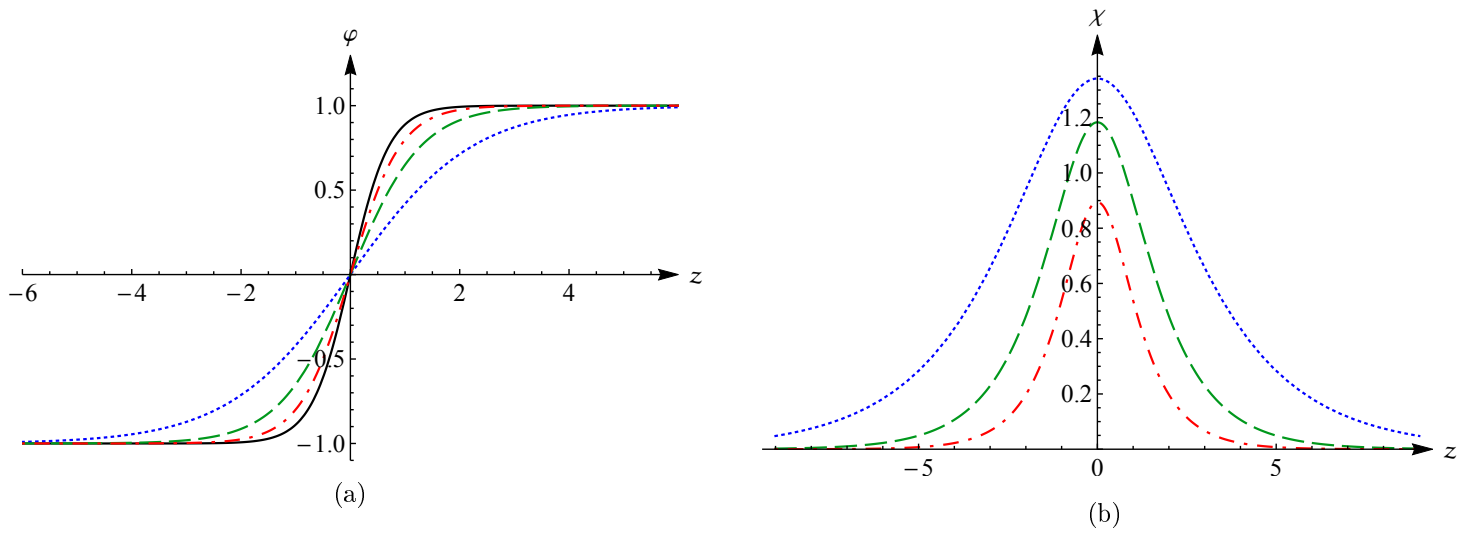


Рис. 12: (а) функция $\varphi_s(z)$ при $\gamma = 1$ для трех различных значений $q = 1 - \mu^2$: 0.1 (синяя пунктирная кривая), 0.3 (зеленая штриховая кривая) и 0.6 (красная штрих-пунктирная кривая), сплошной линией показана функция $\varphi_w(z) = \tanh(\sqrt{2} z)$; (б) функция $\chi_s(z)$ при $\gamma = 1$ для тех же значений q .

ные и ориентационные степени свободы на доменной стенке. Кроме того, в линейном приближении исследована устойчивость “голой” доменной стенки $\varphi_w(z) = \tanh(\sqrt{2} z)$, $\chi \equiv 0$, получен спектр малых возмущений такой полевой конфигурации, уточнено значение нижнего уровня спектра, приведенное в работе [15]. Сформулированы условия устойчивости “голой” доменной стенки в линейном приближении.

Четвертая глава посвящена изучению динамических свойств кинков со степенными асимптотиками.

Раздел 4.1 представляет собой введение к четвертой главе и содержит сведения о состоянии исследований кинковых решений со степенными асимптотиками, а также обзор литературы по этой тематике.

В **разделе 4.2** исследовано столкновение кинка $(-1, 0)$ и антикинка $(0, -1)$ модели φ^8 с потенциалом $V(\varphi) = \varphi^4(1 - \varphi^2)^2$. При таком выборе потенциала кинк имеет одну экспоненциальную и одну степенную асимптотику. Использовался анзац, представляющий собой начальную конфигурацию типа $(-1, 0, -1)$.

В диапазоне начальных скоростей $0.1446 < v_{\text{in}} < 0.14791$ кинки захватывают друг друга и образуют бион, а также обнаруживается квазифрактальная структура окон разлета — ситуация, встречающаяся во многих других моделях. Причиной появления окон разлета является резонансный обмен энергией между трансляционной и вибрационной модами кинков. Но в рассматриваемом случае спектр возмущений кинка не содержит вибрационных мод, поэтому предложен другой подход к объяснению окон

разлета — рассматривать резонансный обмен энергией между кинетической энергией и коллективными возбуждениями составной системы “кинк + антикинк”.

Для подтверждения гипотезы выполнен частотный анализ колебаний поля между первым и вторым соударениями кинков в нескольких двукратных окнах разлета. С другой стороны, найден дискретный спектр составной конфигурации “кинк + антикинк”. Сравнение результатов показало, что при столкновении возбуждается одна из найденных вибрационных мод системы “кинк + антикинк”.

В разделе 4.3 развит метод асимптотической оценки сил взаимодействия солитонов в случае перекрытия степенных асимптотик. Рассмотрен класс моделей с полиномиальными потенциалами $V(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \varphi^2)^2\varphi^{2n}$ для $n \geq 2$, найдено, что силы кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействия при больших расстояниях убывают степенным образом как $\frac{2n}{n-1}$ -я степень полурасстояния A .² В частности, для кинк-кинк сил в моделях φ^8 , φ^{10} и φ^{12} ($n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$) получено $F \approx 5.9085/A^4$, $F \approx 1.3784/A^3$ и $F \approx 0.9250/A^{8/3}$ соответственно. Для кинк-антикинк сил асимптотические оценки выглядят следующим образом: в моделях φ^8 , φ^{10} и φ^{12} ($n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$) получено $F \approx -1.4771/A^4$, $F \approx -0.1723/A^3$ и $F \approx -0.0714/A^{8/3}$ соответственно. Таким образом, кинк и кинк отталкиваются, в то время как кинк и антикинк притягиваются.

Сравнение с результатами численных экспериментов показало очень хорошее согласие асимптотических оценок с экспериментальными данными для $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$, см. левые верхние графики на рис. 1, 2 и 3 в статье [A10].

Кроме того, было получено отношение кинк-антикинк ($F_{\text{К-АК}}$) и кинк-кинк ($F_{\text{К-К}}$) сил взаимодействия:

$$\frac{F_{\text{К-АК}}}{F_{\text{К-К}}} = - \left[\sin \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right]^{\frac{2n}{n-1}}. \quad (17)$$

Абсолютная величина этого отношения убывает с увеличением n . При $n \rightarrow +\infty$ (т.е. при замедлении степенной асимптотики кинка) отношение стремится к 0, т.е. чем массивнее хвосты, которыми зацепляются солитоны, тем ближе отношение к нулю.

Проделанные асимптотические оценки представляют собой существенный шаг вперед в изучении сил, действующих между солитонами со степенными асимптотиками.

²В этом разделе диссертации для обозначения полурасстояния между кинками используется A , т.к. буквой a обозначено ускорение кинков.

Заключение

В целом работа объединяет в одно исследовательское направление различные фундаментальные проблемы построения кинковых решений, изучения сложной динамики их взаимодействий, а также асимптотических свойств.

В рамках представленных в диссертации исследований решены следующие основные задачи:

1. Метод коллективной координаты применен к кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействиям в модели φ^6 . Выполнено сравнение с результатами численного решения уравнения движения, установлены границы применимости метода коллективной координаты.
2. Найдены спектры возбуждений кинков модели φ^8 . Исследована динамика кинк-антикинк столкновений. Показано, что причиной появления окон разлета является резонансный обмен энергией между трансляционной и вибрационной модами кинка.
3. Исследованы процессы рассеяния кинков модели двойной синус-Гордон, получена зависимость критической скорости от параметра модели. Показано появление осциллирующих структур (осциллонов) в конечном состоянии.
4. К модели φ^4 применена процедура деформации с деформирующей функцией $\sinh \varphi$. Изучено рассеяние кинков полученной модели, обнаружены резонансные явления. Проанализировано поведение осциллонов в конечном состоянии, способных образовывать связанное состояние с различным временем жизни.
5. В модели φ^6 исследованы процессы столкновения нескольких кинков и антикинков в одной точке. Выполнен подбор начальных положений и скоростей, обеспечивающий максимизацию плотностей энергии и градиентов поля в области столкновения.
6. Исследованы процессы столкновения нескольких кинков в модели двойной синус-Гордон. Получены зависимости плотностей энергии от параметра модели, изучено разнообразие осциллирующих структур в конечных состояниях.
7. В модели φ^8 с четырьмя вакуумами изучены экзотические процессы и различные конечные состояния в столкновениях двух, трех и четырех кинков (антикинков). Обнаружено рождение кинк-антикинк пар в столкновениях осциллонов.

8. Показано, что задача нахождения явных формул для кинковых решений в модели φ^8 с четырьмя вакуумами при некоторых значениях констант модели сводится к решению алгебраических уравнений степени три и выше. В некоторых случаях решения найдены, исследованы их спектры возбуждений. В более общих случаях получены асимптотики кинков.
9. Для семейства моделей с полиномиальными потенциалами с двумя вакуумами найдены кинковые решения, изучены их свойства.
10. Изучены трансформационные свойства асимптотик кинков при деформации теоретико-полевого модели. Показано, что процедура деформации может быть применена в случае кинков, известных в неявном виде. Установлена универсальность асимптотического поведения потенциала линеаризованной задачи о возмущениях кинка, имеющего степенную асимптотику.
11. Получено точное аналитическое решение в виде плоской доменной стенки с локализованным на ней триплетом скалярных полей. Изучены свойства найденного решения.
12. Исследован процесс рассеяния кинков модели φ^8 , имеющих степенные асимптотики. Изучено влияние степенных асимптотик на динамику кинк-антикинк системы. Проанализированы резонансные явления в кинк-антикинк столкновениях.
13. Выполнены асимптотические оценки сил кинк-кинк и кинк-антикинк взаимодействия в моделях φ^{2n+4} с $n \geq 2$, произведено сравнение теоретических оценок с результатами численных экспериментов.

Литература

Основные публикации по материалам диссертации

Статьи в рецензируемых журналах:

- A1. P. A. Blinov, T. V. Gani, A. A. Malnev, V. A. Gani, V. B. Sherstyukov, *Kinks in higher-order polynomial models*, [Chaos, Solitons and Fractals](#) **165**, 112805 (2022).
- A2. V. A. Gani, A. Gorina, I. Perapechka, Ya. Shnir, *Remarks on sine-Gordon kink-fermion system: localized modes and scattering*, [Eur. Phys. J. C](#) **82**, 757 (2022).
- A3. P. A. Blinov, T. V. Gani, V. A. Gani, *Deformations of kink tails*, [Ann. Phys.](#) **437**, 168739 (2022).
- A4. V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, K. Javidan, *Exotic final states in the φ^8 multi-kink collisions*, [Eur. Phys. J. C](#) **81**, 1124 (2021).
- A5. E. Belendryasova, V. A. Gani, K. G. Zloshchastiev, *Kink solutions in logarithmic scalar field theory: Excitation spectra, scattering, and decay of bions*, [Phys. Lett. B](#) **823**, 136776 (2021).
- A6. I. C. Christov, R. J. Decker, A. Demirkaya, V. A. Gani, P. G. Kevrekidis, A. Saxena, *Kink-antikink collisions and multi-bounce resonance windows in higher-order field theories*, [Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.](#) **97**, 105748 (2021).
- A7. A. Askari, A. Moradi Marjaneh, Zh. G. Rakhmatullina, M. Ebrahimi-Loushab, D. Saadatmand, V. A. Gani, P. G. Kevrekidis, S. V. Dmitriev, *Collision of ϕ^4 kinks free of the Peierls–Nabarro barrier in the regime of strong discreteness*, [Chaos, Solitons and Fractals](#) **138**, 109854 (2020).
- A8. V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, P. A. Blinov, *Explicit kinks in higher-order field theories*, [Phys. Rev. D](#) **101**, 125017 (2020).
- A9. V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, D. Saadatmand, *Multi-kink scattering in the double sine-Gordon model*, [Eur. Phys. J. C](#) **79**, 620 (2019).
- A10. I. C. Christov, R. J. Decker, A. Demirkaya, V. A. Gani, P. G. Kevrekidis, A. Khare, A. Saxena, *Kink-kink and kink-antikink interactions with long-range tails*, [Phys. Rev. Lett.](#) **122**, 171601 (2019).

- A11. E. Belendryasova, V. A. Gani, *Scattering of the φ^8 kinks with power-law asymptotics*, [Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **67**, 414 \(2019\)](#).
- A12. I. C. Christov, R. J. Decker, A. Demirkaya, V. A. Gani, P. G. Kevrekidis, R. V. Radomskiy, *Long-range interactions of kinks*, [Phys. Rev. D **99**, 016010 \(2019\)](#).
- A13. V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, A. Askari, E. Belendryasova, D. Saadatmand, *Scattering of the double sine-Gordon kinks*, [Eur. Phys. J. C **78**, 345 \(2018\)](#).
- A14. D. Bazeia, E. Belendryasova, V. A. Gani, *Scattering of kinks of the sinh-deformed φ^4 model*, [Eur. Phys. J. C **78**, 340 \(2018\)](#).
- A15. A. Moradi Marjaneh, V. A. Gani, D. Saadatmand, S. V. Dmitriev, K. Javidan, *Multi-kink collisions in the ϕ^6 model*, [J. High Energy Phys. **2017** \(07\), 028 \(2017\)](#).
- A16. V. A. Gani, M. A. Lizunova, R. V. Radomskiy, *Scalar triplet on a domain wall: an exact solution*, [J. High Energy Phys. **2016** \(04\), 043 \(2016\)](#).
- A17. V. A. Gani, V. Lensky, M. A. Lizunova, *Kink excitation spectra in the (1+1)-dimensional φ^8 model*, [J. High Energy Phys. **2015** \(08\), 147 \(2015\)](#).
- A18. V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, M. A. Lizunova, *Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model*, [Phys. Rev. D **89**, 125009 \(2014\)](#).

Статьи в сборниках трудов конференций:

- A19. P. A. Blinov, T. V. Gani, V. A. Gani, *Domain wall thickness and deformations of the field model*, [J. Phys.: Conf. Ser. **1690**, 012085 \(2020\)](#).
- A20. P. A. Blinov, V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, *From thin to thick domain walls: An example of the φ^8 model*, [J. Phys.: Conf. Ser. **1690**, 012082 \(2020\)](#).
- A21. V. A. Gani, *Vibrations of thick domain walls: How to avoid no-go theorem*, [J. Phys.: Conf. Ser. **1690**, 012095 \(2020\)](#).
- A22. E. Belendryasova, V. A. Gani, A. Moradi Marjaneh, D. Saadatmand, A. Askari, *A new look at the double sine-Gordon kink-antikink scattering*, [J. Phys.: Conf. Ser. **1205**, 012007 \(2019\)](#).

- A23. E. Belendryasova, V. A. Gani, K. G. Zloshchastiev, *Kinks in the relativistic model with logarithmic nonlinearity*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1390**, 012082 (2019).
- A24. E. Belendryasova, V. A. Gani, *Resonance phenomena in the φ^8 kinks scattering*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **934**, 012059 (2017).
- A25. D. Bazeia, E. Belendryasova, V. A. Gani, *Scattering of kinks in a non-polynomial model*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **934**, 012032 (2017).
- A26. R. V. Radomskiy, E. V. Mrozovskaya, V. A. Gani, I. C. Christov, *Topological defects with power-law tails*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **798**, 012087 (2017).
- A27. V. A. Gani, M. A. Lizunova, R. V. Radomskiy, *Scalar triplet on a domain wall*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **675**, 012020 (2016).
- A28. V. A. Gani, V. Lensky, M. A. Lizunova, E. V. Mrozovskaya, *Excitation spectra of solitary waves in scalar field models with polynomial self-interaction*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **675**, 012019 (2016).

Список использованных источников

1. A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (2000).
2. F. J. Buijnsters, A. Fasolino, M. I. Katsnelson, *Motion of domain walls and the dynamics of kinks in the magnetic Peierls potential*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 217202 (2014).
3. R. D. Yamaletdinov, V. A. Slipko, Y. V. Pershin, *Kinks and antikinks of buckled graphene: A testing ground for the φ^4 field model*, *Phys. Rev. B* **96**, 094306 (2017).
4. В. А. Делев и др., *Кинк-антикинк взаимодействие в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика*, *Письма в ЖЭТФ*, том **109**, вып. 2, стр. 84–88 (2019).
5. В. А. Делев и др., *Сложная динамика каскада кинк-антикинк-взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика*, *Письма в ЖЭТФ*, том **110**, вып. 9, стр. 607–613 (2019).

6. P. G. Kevrekidis, J. Cuevas-Maraver (eds.), *A dynamical perspective on the ϕ^4 model: Past, present and future*, part of the nonlinear systems and complexity book series (vol. 26), Springer, Cham (2019).
7. A. Khare, I. C. Christov, A. Saxena, *Successive phase transitions and kink solutions in ϕ^8 , ϕ^{10} , and ϕ^{12} field theories*, [Phys. Rev. E **90**, 023208 \(2014\)](#).
8. A. V. Ustinov, *Solitons in Josephson junctions*, [Physica D **123**, 315 \(1998\)](#).
9. D. K. Campbell, M. Peyrard, P. Sodano, *Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation*, [Physica D **19**, 165 \(1986\)](#).
10. D. K. Campbell, M. Peyrard, *Solitary wave collisions revisited*, [Physica D **18**, 47 \(1986\)](#).
11. A. A. Boulbitch, *Crystallization of proteins accompanied by formation of a cylindrical surface*, [Phys. Rev. E **56**, 3395 \(1997\)](#).
12. D. Vanderbilt, M. H. Cohen, *Monoclinic and triclinic phases in higher-order Devonshire theory*, [Phys. Rev. B **63**, 094108 \(2001\)](#).
13. I. A. Sergienko, Yu. M. Gufan, S. Urazhdin, *Phenomenological theory of phase transitions in highly piezoelectric perovskites*, [Phys. Rev. B **65**, 144104 \(2002\)](#).
14. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Издательство Наука, Москва (1980).
15. E. Kurianovych, M. Shifman, *Non-Abelian moduli on domain walls*, [Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1450193 \(2014\)](#).
16. D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson, *Deformed defects*, [Phys. Rev. D **66**, 101701 \(2002\)](#).
17. Y. M. Shnir, *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (2018).
18. А. Е. Кудрявцев, *О солитоноподобных решениях для скалярного поля Хиггса*, [Письма в ЖЭТФ **22**, 178 \(1975\)](#).
19. V. G. Makhankov, *Dynamics of classical solitons (in non-integrable systems)*, [Phys. Rep. **35**, 1 \(1978\)](#).

20. Б. С. Гетманов, *Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ_2^4* , [Письма в ЖЭТФ **24**, 323 \(1976\)](#).
21. Т. И. Белова, А. Е. Кудрявцев, *Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля*, [УФН, том **167**, вып. 4, стр. 377–406 \(1997\)](#).
22. D. Bazeia, M. A. González León, L. Losano, J. Mateos Guilarte, *Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions*, [Phys. Rev. D **73**, 105008 \(2006\)](#).
23. C. A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson, *New results for deformed defects*, [Phys. Rev. D **69**, 067702 \(2004\)](#).
24. D. Bazeia, L. Losano, M. A. Marques, R. Menezes, *From kinks to compactons*, [Phys. Lett. B **736**, 515 \(2014\)](#).
25. A. Khare, A. Saxena, *Wide class of logarithmic potentials with power-tower kink tails*, [J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 315201 \(2020\)](#).
26. P. Kumar, A. Khare, A. Saxena, *A minimal nonlinearity logarithmic potential: Kinks with super-exponential profiles*, [Int. J. Mod. Phys. B **35**, 2150114 \(2021\)](#).
27. A. Khare, A. Saxena, *Logarithmic potential with super-super-exponential kink profiles and tails*, [Phys. Scr. **95**, 075205 \(2019\)](#).
28. Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Издательство Мир, Москва (1985) [Перевод издания: R. Rajaraman, *Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory*, North-Holland, Amsterdam (1982)].
29. R. Rajaraman, *Solitons of coupled scalar field theories in two dimensions*, [Phys. Rev. Lett. **42**, 200 \(1979\)](#).
30. В. А. Ленский, В. А. Гани, А. Е. Кудрявцев, *О доменных стенках, несущих $U(1)$ -заряд*, [ЖЭТФ, том **120**, вып. 4\(10\), стр. 778–785 \(2001\)](#).
31. H. Katsura, *Composite-kink solutions of coupled nonlinear wave equations*, [Phys. Rev. D **89**, 085019 \(2014\)](#).

32. A. Alonso Izquierdo, D. Bazeia, L. Losano, J. Mateos Guilarte, *New models for two real scalar fields and their kink-like solutions*, [Adv. in High Energy Phys. **2013**, 183295 \(2013\)](#).
33. N. S. Manton, *Forces between kinks and antikinks with long-range tails*, [J. Phys. A: Math. Theor. **52**, 065401 \(2019\)](#).
34. J. G. F. Campos, A. Mohammadi, *Interaction between kinks and antikinks with double long-range tails*, [Phys. Lett. B **818**, 136361 \(2021\)](#).
35. R. Durrer, *Topological defects in cosmology*, [New Astron. Rev. **43**, 111 \(1999\)](#).
36. E. Greenwood, E. Halstead, R. Poltis, D. Stojkovic, *Electroweak vacua, collider phenomenology, and possible connection with dark energy*, [Phys. Rev. D **79**, 103003 \(2009\)](#).
37. P. Dorey, T. Romańczukiewicz, *Resonant kink–antikink scattering through quasinormal modes*, [Phys. Lett. B **779**, 117 \(2018\)](#).
38. V. A. Gani, A. E. Kudryavtsev, *Kink-antikink interactions in the double sine-Gordon equation and the problem of resonance frequencies*, [Phys. Rev. E **60**, 3305 \(1999\)](#).
39. J. Izaac, J. Wang, [Computational Quantum Mechanics](#), Springer, Cham (2018).
40. S. W. Goatham, ϕ^6 kink scattering, [arXiv:1209.3055](#) (2012).
41. K. M. Leung, *Path-integral approach to the statistical mechanics of solitons*, [Phys. Rev. B **26**, 226 \(1982\)](#).