

На правах рукописи



Герасименюк Николай Владимирович

**Критические явления неабелевых калибровочных теорий в
решеточной регуляризации**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Владивосток — 2024

Работа выполнена в Тихоокеанском квантовом центре ДВФУ.

Научный руководитель: **Молочков Александр Валентинович**
доктор физико-математических наук, заведующий
Тихоокеанским Квантовым Центром ДВФУ

Официальные оппоненты: **Леонидов Андрей Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
лаборатория физики высоких энергий Физического
института им. П.Н.Лебедева РАН, высококвалифи-
цированный ведущий научный сотрудник; лабо-
ратория математического моделирования сложных
систем Физического института им. П.Н.Лебедева
РАН,

Теряев Олег Валерианович,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра теоретической физики ОИЯИ,
начальник сектора Лаборатории теоретической фи-
зики ОИЯИ

Жохов Роман Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
теоретический отдел ИЗМИРАН,
старший научный сотрудник

Защита состоится 2 октября 2024 г. в 15:00 на заседании диссертационного со-
вета МИФИ.1.04 при НИЯУ МИФИ по адресу: 115409, г.Москва, Каширское
шоссе, д.31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ, а также на
сайте ds.mephi.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения,
просьба направлять по адресу: 115409, г.Москва, Каширское шоссе, д.31, учено-
му секретарю диссертационного совета МИФИ.1.04.

Автореферат разослан ____ _____ 202_ г..

Телефон для справок: +7(495)324-77-77.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МИФИ.1.04,
д-р физ.-мат. наук



Маслов Михаил Михайлович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. На данный момент известно, что около пяти процентов от общей массы Вселенной приходится на барионную материю, состоящую из протонов и нейтронов, оба из которых содержат по три кварка. Сильное взаимодействие, объединяющее кварки в адроны, довольно интенсивно исследуется численно и аналитически, для чего применяется практически весь инструментарий современной физики и математики. В области высоких энергий, где константу взаимодействия можно считать малым параметром, применяются методы теории возмущения. В области низких энергий, где не удается выделить малый параметр, исследования осуществляются при помощи непертурбативных или феноменологических подходов. К последним можно отнести ряд широко известных моделей, таких как: модель Скирма, модель Намбу-Иона-Ласиньо и другие. При описании фазовой структуры КХД, эффективные модели предсказывают наличие критической точки в достаточно широкой области, но в привязке к экспериментальным данным выделяются только некоторые модели. В целом эффективные модели дают хорошее качественное поведение, однако количественно точны не все. Лагранжианы эффективных моделей задаются массами частиц или другими физическими константами (пример, f_π - константа пионного распада в модели Скирма), сами модели учитывают лишь часть свойств квантовой хромодинамики (КХД) - теории, описывающей сильное взаимодействие. Непертурбативные подходы, где вычисления производятся в решеточной регуляризации при помощи метода Монте-Карло, являются достаточно надежным инструментом при получении результатов из первых принципов КХД. Данный подход предлагает всесторонний взгляд на проблему конфайнмента, позволяет успешно восстановить спектр легких адронов, а также дает возможность выполнять исследования при наличии различных условий: внешних полей, нетривиальной топологии, вращения. Обратной стороной решеточного подхода является то, что в вычислительном отношении затраты очень дороги и требуют суперкомпьютеров самого высокого уровня. Более того, существует область конечной плотности, где из-за известной проблемы знака, когда решеточное действие КХД перестает быть действительным, метод Монте-Карло не может быть применен. В результате появляется потребность в разработке процедур которые обходят эту проблему.

На сегодня существует ряд кандидатов, позволяющих получать результаты в области конечных плотностей, их можно разделить на две группы: методы основанные на выборке значимых решеточных данных (reweighting [1]), канонический подход [2], разложение в ряд Тейлора [3; 4]) и методы генерации решеточных данных с мнимым действием (Complex Langevin method [5], Lefschetz thimble [6]). Методы второй группы достаточно активно развиваются, однако на сегодняшний день их применимость показана лишь на простых моделях. Особое внимание уделяется первой группе, которой и принадлежат основные заслуги в исследовании фазовой структуры решеточной КХД в области

конечных плотностей. Как итог, решеточный подход воспроизводит результаты в области $\mu/T < 1$, которые находятся в соответствии с эффективными моделями и экспериментальными данными [4]. В области $\mu/T > 1$ методы первой группы расходятся в прогнозах. Канонический подход и вовсе не представлен, поскольку воспроизводит мнимую вероятность в области $T > T_c$. В области $T < T_c$ метод не воспроизводит фазовый переход, однако в ряде эффективных моделей [7; 8] работает хорошо.

Исследования в области $\mu/T > 1$ планируется осуществить в ближайшем будущем на отечественном ускорителе NICA - Nuclotron-based Ion Collider Facility, на немецком ускорительном комплексе GSI - Центр по изучению тяжёлых ионов имени Гельмгольца, а также планируется запуск новых экспериментов RHIC (США) и J-PARC (Япония). В этой связи в области решеточных вычислений наблюдается всплеск интереса к новым подходам исследования, в частности к методам машинного обучения.

Нейронные сети достаточно успешно используются при анализе данных с ускорителей частиц, где поиск скрытых закономерностей, лежащих глубоко в данных, позволяет устанавливать существование экзотических связанных состояний. Такой статистический подход принципиально не зависит от природы анализируемых данных, источником которых могут служить как классические изображения, так и данные с детекторов частиц. Методы машинного обучения несут в себе мощный инструмент, который не ограничивается обработкой данных. Эти методы используются и в задачах генерации данных и в ряде других комбинированных задач, но в связке с методами решеточной теории поля эти вопросы по большей части не изучены.

Потенциальным кандидатом для решения задач решеточной теории поля могут стать GAN-архитектуры состоящие из двух отдельных нейросетей: генератор и дискриминатор. Первая нейронная сеть из случайного шума генерирует данные похожие на решеточные конфигурации, а дискриминатор тестирует полученные данные на правдоподобность. Для хорошего анализа сеть-дискриминатор должна видеть в данных физические поля, обладающие рядом свойств. В случае неабелевых теорий поля, мы показываем как должна выглядеть архитектура нейронной сети способная видеть локальную калибровочную инвариантность. Дискриминатор контролирует генератор до тех пор, пока тот не обучится создавать нужные данные. Дальнейшая задача состоит в установлении связи между параметрами теории и видом стартового шума.

В качестве первого шага была предпринята попытка исследовать довольно простые системы, состоящие, фактически, только из вакуума. Нами была поставлена задача создать нейросеть, которая способна работать с физическими полями, в нашем случае это глюонные поля, связывающие кварки в протоны, нейтроны и другие адроны на самых разных масштабах. Ожидалось, что нейронная сеть в процессе обучения, распознает такие особенности глюонов, которые обычно «прячутся» за принципом невылетания цвета и фоновым шумом, заполняющим вакуум. В результате исследований нам удалось создать нейросеть,

способную распознавать глюонные поля, которые в отличие от электромагнитных описываются не числами, а матрицами. Перед нейросетью стояла задача проанализировать, что происходит с вакуумом при переходе от бесцветного состояния к состоянию, где цветные глюоны свободно вылетают, для чего ей было необходимо построить матричную комбинацию – линию Полякова, которая давно используется при исследовании подобных фазовых переходов. Результаты исследования показывают, что нейронная сеть, обученная в одной точке пространства параметров теории, позволяет предсказывать поведение линии Полякова в другой, где нейронная сеть не обучалась.

Построенная наблюдаемая является калибровочно-инвариантной из-за естественного усреднения, возникающего в ходе обучения нейронной сети. Такое усреднение делает обучение нейронной сети более чувствительным к наблюдаемому, не зависящим от калибровки. Некалибровочно-инвариантные наблюдаемые просто зануляются в ходе обучения. Качеству данных в таком подходе уделяется особое внимание, поскольку от этого зависит степень покрытия группы $SU(N)$. Если обучающая выборка данных представляет вакуумы теории в полном объеме, то нейросеть, обученная в одной области теории, способна предсказывать поведение наблюдаемой в другой. Масштабирование такого подхода на случай больших размерностей $N_t = 2,4$ приводит к изменению нейросети, однако архитектура сети не изменяется при переходе от одной теории к другой $SU(2) \rightarrow SU(3)$.

Другой способ исследования критических явлений в неабелевых теориях - подход Ли-Янга, который в нашем случае объединяется с Каноническим подходом. Идея, которой мы следуем, основана на изучении нулей Ли-Янга - нулей большой канонической статсуммы $Z_{GC}(\mu, V, T)$, полученной в мнимой области химического потенциала. Область мнимых значений примечательна тем, что в ней отсутствует проблемы знака, а следовательно, в данной области действие КХД остается действительным, т.е. подход Монте-Карло не испытывает сложностей. Работа в такой нефизической точке позволяет получать значения канонических статсумм $Z(n, V, T)$, которые в свою очередь не зависят от химического потенциала. С другой стороны значения $Z(n, V, T)$ являются коэффициентами ряда Лорана при разложении большой канонической статсуммы $Z_{GC}(\mu, V, T)$ в ряд по активностям $\xi = e^{\mu/T}$. Данный факт позволяет восстанавливать большую каноническую статсумму, изучая нули которой оказывается возможным исследовать фазовую структуру теории во всей области μ . Таким образом, исследование фазовой структуры в действительной области завязывается на решеточных вычислениях в мнимой области. К сожалению, каноническая процедура получения коэффициентов $Z(n, V, T)$ оставляет ряд открытых вопросов из-за чего фазовая структура КХД исследована только частично. Также немаловажным остается требование вычислений с произвольной точностью, что вновь затрагивает проблему вычислительных мощностей современных компьютеров.

Интерес к подобным исследованиям усиливается тем, что в недавней работе [9] удалось показать поведения нулей Ли-Янга, полученных из экспериментальных данных RHIC. Результат работы основан на том, что авторам удалось выделить несколько канонических коэффициентов $Z(n, V, T)$ из данных барионной множественности.

Целью данной работы является изучение критических явлений в неабелевых калибровочных теориях и разработка новых методов для их исследования.

Для достижения данной цели было необходимо решить следующие **задачи**:

1. Разработать модель машинного обучения для предсказания решеточных наблюдаемых;
2. Исследовать применимость методов искусственного интеллекта к задачам экстраполяции решеточных наблюдаемых;
3. Разработать алгоритм получения канонических статсумм $Z(n, V, T)$;
4. Исследовать поведение нулей Ли-Янга в рамках Канонического подхода.

Научная новизна:

1. Было показано, что методы машинного обучения позволяют строить наблюдаемые в теориях с калибровочной группой симметрии SU(2) и SU(3);
2. В работе предложен новый способ численного продолжения физических наблюдаемых из легко достижимых, но нефизических областей пространства параметров теории, в физическую и потенциально недостижимую область;
3. В работе впервые было показано, что свёрточная архитектура, в которую не закладывалась исходная симметрия данных, способна распознавать калибровочную инвариантность в пределах статистических погрешностей;
4. Был предложен способ получения канонических статсумм, основанный на оценке интеграла Фурье в мнимой области химического потенциала;
5. Было выполнено оригинальное исследование по анализу поведения нулей Ли-Янга в области температур выше критической;
6. Было показано существование ненулевой плотности нулей Ли-Янга в пределе бесконечного объема, указывающей на наличие перехода Роберге-Вейсса.

Методология и методы исследования. Результаты представленные в работе базируются на данных полученных методами квантовой теории поля на решетке. Обучающая выборка решеточных данных была получена с использованием классического действия Вильсона и улучшенного действия Ивасаки. Методы машинного обучения в данной работе применяются для задач регрессии в рамках подхода обучения с учителем. Процедура оптимизации параметров нейронной сети основана на модификации классического алгоритма градиентного спуска с экспоненциальной скоростью затухания для оценок первого и второго

момента. Для отыскания нулей Ли-Янга использовался пакет MPSolve, реализующий метод Аберта - вариация алгоритма Ньютона с возможностью вычислений с произвольной точностью.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Современные подходы компьютерного зрения, в которые не закладывалась исходная симметрия данных, позволяют находить калибровочно-инвариантные величины в решеточных конфигурациях глюонных полей;
2. Конволюционная модель способна воспроизвести поведение параметра порядка в неабелевых калибровочных теориях с достаточно хорошей точностью в неизвестной области пространства параметров, где обучение не производилось;
3. Аналитический метод оценки интеграла Фурье для разложения большой канонической статсуммы в ряд Лорана по активностям не приводит к знакопеременному поведению коэффициентов этого ряда;
4. Показано существование слабой объемной зависимости нулей Ли-Янга в пределе больших значений барионного числа;
5. Наличие ненулевой плотности нулей Ли-Янга в области $\mu/T = i\pi/3$ указывает на присутствие фазового перехода первого рода в мнимой области химического потенциала.

Достоверность полученных результатов обеспечивается возможностью их верификации, поскольку в данной работе использовались средства общедоступных библиотек: Keras, Tensorflow, MPSolve, MPFR. Также полученные выводы находятся в соответствии с результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- Harp Workshop «Hadrons and dense matter from QCD», Владивосток, Россия, 2019 г.
- The 6th annual student scientific conference in english, Владивосток, Россия, 2019 г.
- Региональная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных по естественным наукам, Владивосток, Россия, 2020 г.
- The 7th annual student scientific conference in english, Владивосток, Россия, 2020 г.
- The MITP workshop «Machine Learning Techniques in Lattice QCD», Майнц, Германия, 2021 г.
- XXXIII International Workshop on High Energy Physics, Протвино, Россия, 2021 г.
- The 38th International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE2021), США, 2021 г.
- The JINR workshop «Infinite and Finite Nuclear Matter», Дубна, Россия, 2023 г.

Личный вклад. Вклад автора заключается в непосредственном выполнении расчетов и анализе полученных результатов, представленных в данной работе. Автор принимал участие в написании статей и лично представлял результаты на отечественных и международных конференциях. Также автор работал над улучшением метода вычисления корней полиномов больших степеней, в рамках выполнения работ по нахождению нулей Ли-Янга. В ходе обсуждений с авторами пакета MPSolve, проблем касающихся вычислений с произвольной точностью, версия MPSolve была обновлена до версии v.3.1.8. Автор участвовал в конструировании и обучении нейронных сетей, занимался анализом и обработкой решеточных данных, проводил подготовку основных решеточных наблюдаемых.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 5 — в тезисах докладов. Зарегистрированы 3 программы для ЭВМ.

Содержание работы

Изучение фазовой структуры КХД при конечных плотностях и температурах является одной из важных задач в области физики высоких энергий. При большой температуре и маленькой плотности кварк-глюонная плазма была исследована на коллайдерах RHIC (США) и LHC (Швейцария). Область высоких плотностей в ближайшем будущем будет исследована на ускорителях FAIR (Германия), NICA (Россия) и J-PARC (Япония). В связи с чем в физике высоких энергий наблюдается всплеск интереса к новым подходам исследования.

Генерация конфигураций в решеточной КХД часто требуют больших затрат, связанных с вычислительной способностью компьютеров, особенно в неабелевых калибровочных теориях с динамическими фермионами. Данная проблема накладывает ограничения на размеры решеток, а также затрудняет процесс накопления статистических данных. Помимо увеличения мощностей вычислительных машин, дальнейшие исследования решеточной КХД требуют радикального улучшения существующих алгоритмов. Современные методы машинного обучения могут предоставить возможности для улучшения скорости вычисления, подобные примеры дают генеративные состязательные сети [10] и нормализация потоков [11]. Эти методы были применены для $SU(N)$ и $U(1)$ решеточной калибровочной теории [12; 13], где авторы показывают улучшенные значения времени автокорреляции. В работе [10] улучшение автокорреляционного времени было также продемонстрировано для действительной ϕ^4 -теории. Ещё одним примером является работа [14], в которой авторы показали преимущества техник машинного обучения для оценки линии постоянной физики и для ускорения расчетов при критическом замедлении. Другое применение эти методы находят при ускорении расчетов сложных и нелокальных наблюдаемых, таких, как топологический заряд в решеточной теории Янга-Миллса [15].

Методы машинного обучения также могут быть использованы для нахождения точки фазового перехода исследуемой модели. Ключевая идея заключается в том, что хотя алгоритм машинного обучения может давать надежные результаты по обе стороны фазового перехода, но по мере приближения к линии перехода результат предсказания нейронной сети становится хуже. Этот факт играет положительную роль в определении фазовой диаграммы с помощью методов машинного обучения. Неувязка алгоритма машинного обучения может быть количественно определена и, следовательно, может служить параметром порядка, полученным на основе методов машинного обучения, и использоваться для определения местоположения фазового перехода [16].

Существуют и другие способы применения, где анализируется сама нейронная сеть, в основном, в задачах классификации. Можно привести пример, где перед нейросетью ставится задача об классификации фаз по известным решеточным конфигурациям, которые уже содержат всю информацию о физике моделируемой системы. В таком подходе нейросеть изучает решеточные конфигурации, которые были ранее сгенерированы при помощи метода Монте-Карло. Результатом обучения нейронной сети является внутренняя функция - функция решения - на основе которой алгоритм делает финальное предположение о той или иной фазе. Главный интерес, в таком подходе, падает не на само предсказание фазы, а на то, как алгоритм смог различить фазы, т.е. какую функцию решения построила внутри себя сеть. Таким образом, функция решения становится объектом дальнейшего исследования. Применимость такого подхода была недавно продемонстрирована в модели Изинга и $SU(2)$ теории Янга-Миллса [17], где авторам удалось построить функции, чувствительные к фазовому переходу.

Другая положительная черта методов машинного обучения заключается в том, что они могут быть применимы к другим физическим задачам, где генерация конфигураций традиционным методом Монте-Карло может быть затруднена. В статье [18] авторы показали, что сверточные нейронные сети могут определять фазовый переход в квантовых многофермионных системах, в которых присутствует проблема знака из-за чего традиционные подходы генерации данных перестают работать. Можно отметить, что построенная таким образом модель машинного обучения не обладает знанием о гамильтониане системы, а результат к которому она приводит, демонстрирует большой потенциал в дальнейшем ее использовании.

Нейронные сети на сегодня дают только потенциальную возможность заглянуть в область конечных плотностей, но существуют и другие подходы для решения этой задачи, к которым можно отнести метод канонических ансамблей - Канонический подход.

В области чисто мнимых значений химического потенциала $\mu_q = i\mu_{qI}$ ($\mu_{qI} \in \mathbb{R}$), фермионный детерминант принимает действительные значения. Данный факт означает, что каноническая статистическая сумма $Z_C(n, T, V)$ при конечных μ_{qI} может быть вычислена при помощи метода Монте-Карло. Можно

заметить, что $Z_C(n, T, V)$ зависит только от кваркового числа n , температуры T и объема V , но не зависит от химического потенциала. Такое наблюдение замечательно тем, что полученную в мнимой области каноническую статсумму можно использовать для построения большой канонической статсуммы $Z_{GC}(\mu_q, T, V)$, работающей уже в произвольной области μ_q . В результате канонически подход представляет собой метод получения коэффициентов $Z_C(n, T, V)$, а следовательно большой канонической статсуммы.

Возможности Канонического подхода разумно объединить с идеями Ли и Янга, которые впервые были изложены в теоремах [19; 20]. В своих работах Ли и Янг обсуждали идею появления неаналитичности в точках фазового перехода, теорема Ли-Янга была результатом к которому они пришли. Эти работы оперирует понятием нулей Ли-Янга - нулей большой канонической статсуммы, на основе которых и объясняется возникновение неаналитичности в термодинамическом пределе.

Свободная энергия становится сингулярной в точках где большая статистическая сумма обращается в нуль, а значит эти точки демонстрируют фазовую структуры теории. С момента формулировки теоремы Ли-Янга был предпринят ряд попыток для построения диаграммы КХД. Вычисления нулей Ли-Янга были выполнены в работах [21–24] в которых авторы утверждали, что фазовый переход при нулевой температуре происходит в точке $\mu = m_\pi/2$. В другой работе [25] канонический подход был применен в области мнимых температур, где были найдены нули Фишера [26] - аналог нулей Ли-Янга в области мнимых температур. В результате в данном исследовании была найдена критическая точка КХД, однако при стремлении к термодинамическому пределу оценка данной точки не явна.

Основная идея восстановления канонических статсумм подробно изложена в работе [27], где данный подход применяется для построения фазовой диаграммы КХД, основанный на вычислении барионной плотности в мнимой области химического потенциала. Другая работа [28] упоминает проблему вытекающую из такого способа восстановления, где делается замечание, что в области $T > T_c$ решеточные данные воспроизводят знакопеременное поведение канонических статсумм, что не позволяет использовать их в дальнейшем, поскольку статсуммы несут вероятностный смысл.

Для того чтобы лучше понять природу такого поведения канонических статсумм в других работах было решено проверить применимость данного подхода в эффективных моделях. В свою очередь, применимость такого подхода в моделях Nambu-Jona-Lasinio (NJL) была проверена в работах [7; 8]. Также в работе [29] были исследованы Cluster Expansion Model (CEM) и Rational Function Model (RFM), где также было обнаружено знакопеременное поведение канонических статсумм.

Канонические статистические суммы имеют феноменологическое значение, поскольку в работах [9; 30; 31] удастся получить их экспериментальные значения, которые сравниваются с результатами численных исследований.

Первая глава посвящена теоретическим основам излагаемого материала. Глава начинается с описания идеи ансамблей Гиббса для квантовых и классических систем, в дальнейшем вводятся основные понятия возникающие в статистической физике. Элементы теории поля изложены в главе "Теория сильных взаимодействий затрагивающей вопросы фундаментальных симметрий. Идеи применения численных методов к квантовым системам изложены в главе "Решеточная регуляризация". Текущее представление о фазовой структуре теории Янга-Миллса изложено в главе "Фазовая структура КХД". Глава заканчивается изложением основ машинного обучения, где дается объяснения основных идей и техник обучения нейронных сетей, имеющихся на сегодняшний день.

Квантовая теория поля, казалось, должна полностью разъяснить вопросы фундаментального устройства материи, однако на практике все оказалось гораздо сложнее. Сильное взаимодействие не укладывалось в аппарат данной теории из-за сложностей возникающих при большой константе связи. Выйти из сложившейся ситуации удалось при помощи решеточного подхода, но в области малых температур и больших плотностей и он оказался бессилён из-за так называемой проблемы знака. Область больших плотностей напрямую относится к исследованию нейтронных звезд. Область низких температур известна своими свойствами сверхпроводимости и сверхтекучести. Два эти наблюдения, при всех трудностях изучения, до сих сохраняют интерес ученых и вселяют энтузиазм при исследовании материи в таких критических условиях.

Вторая глава посвящена исследованию применимости методов машинного обучения к задачам решеточной теории поля. Ранее были приведены примеры успешного применения машинного обучения для задач КХД. В нашем исследовании мы обучали нейронные сети работать с данными глюонных полей, для чего использовали решеточные конфигурации. Данное исследование было нацелено на построение нейронной сети, способной предсказывать наблюдаемые в теориях с $SU(2)$ и $SU(3)$ калибровочной группой. Своего рода наше исследование демонстрирует потенциальную возможность построения наблюдаемых в области, где прямые вычисления затруднены.

В этой работе мы проводим моделирование неабелевой калибровочной теории Янга-Миллса с двумя и тремя цветами в решеточной регуляризации [A1; A2], для чего используем дискретное действие Вильсона

$$S[U] = \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re} [\text{Tr } U_P] \right), \quad (1)$$

где N — количество цветов. Действие Вильсона, построенное из исходных переменных-связей, формулируется в евклидовом пространстве-времени на решетке с размером $N_s^3 \times N_t$. При моделировании используются периодические граничные условия во всех измерениях. Для исследования зависимости от объема решетки, мы используем $N_t = 2, 4$ и $N_s = 8, 16, 32$. Сумма в действии вычисляется по всем плакетным углам $P = \{x, \mu\nu\}$ в каждой точке x и направлении $\mu \neq \nu$. Плакет U_P задается упорядоченным произведением неабелевых

полей U_l вдоль периметра решеточной ячейки: $U_P = \prod_{l \in \partial P} U_l$. Статистическая сумма определяется по формуле

$$Z = \int \left(\prod_l U_l \right) e^{-S[U]}, \quad (2)$$

В данной теории существует две фазы: конфайнмент и деконфайнмент. Конфайнмент соответствует малым значениям константы связи β , деконфайнмент - большим значениям. В случае двухцветной глюодинамики эти две фазы разделены фазовым переходом второго рода. В случае $N \geq 3$ наблюдается фазовый переход первого рода.

Хорошо известным параметром порядка фазового перехода деконфайнмента является петля Полякова. В решеточных расчетах удобно идентифицировать удельную петлю Полякова:

$$L = \frac{1}{N_s^3 N} \left\langle \left| \sum_x \text{Tr} \prod_{t=0}^{N_t-1} U_{x,t;4} \right| \right\rangle, \quad (3)$$

где сумма идет по всем пространственным узлам решетки x .

Для построения алгоритма машинного обучения, который может анализировать решеточные конфигурации неабелевых полей, необходимо переформулировать входные данные решеточных конфигураций в соответствующем для нейронных сетей виде. В результате нами было предложено использовать векторное представление $SU(2)$ матриц:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & a_3 + ia_4 \\ -a_3 + ia_4 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $a_1 = \text{Re}(u_{11})$, $a_2 = \text{Im}(u_{11})$, $a_3 = \text{Re}(u_{12})$, $a_4 = \text{Im}(u_{12})$. В случае $SU(3)$ матриц векторное представление осуществляется для всех элементов матрицы, поскольку элементы $SU(3)$ матрицы не зависят тривиальным образом друг от друга.

Для решеточных конфигураций с $N_t = 2$ нейронная сеть состоит из одного трехмерного сверточного слоя (convolutional layer) с 16 фильтрами и размером ядра $2 \times 1 \times 1$ с Relu функций активации. Финальный плотный слой (dense layer) с линейной функцией активации состоит из 16 нейронов. Слой усреднения (average polling layer) и слой выравнивания (flattening layer) разделяют плотный и сверточный слои. Архитектура сети претерпевает небольшие изменения в случае $N_t = 4$, в виде дополнительной комбинации конволюции и Relu-активации. Итоговые архитектуры сетей для конфигураций с $N_t = 2, 4$ представлены в Таблице 1.

Перед началом процесса обучения подготавливается 9000 конфигураций с разными параметрами N_s и N_t при одной фиксированной константе связи $\beta_{SU(2)}$ и $\beta_{SU(3)}$. В процессе обучения гарантируется, что данные из каждого вакуума наблюдаемой будут в одинаковой пропорции. Для окончательного прогноза мы

InputData($N_t = 2, N_s^2, N_s, U_\mu$)
 Conv3D + ReLU
 AveragePooling3D + Flatten
 Dense

InputData($N_t = 4, N_s^2, N_s, U_\mu$)
 Conv3D + ReLU + Conv3D + ReLU
 AveragePooling3D + Flatten
 Dense

Таблица 1 — Архитектура нейронной сети для предсказания Поляковской петли в $SU(2)$ и $SU(3)$ теории для решеток с размером $N_t = 2$ (слева) и $N_t = 4$ (справа). U_μ представляет размерность векторного представления матриц.

генерируем еще 100 конфигураций в точках с $\beta \leq \beta_{SU(2)}$ или $\beta \leq \beta_{SU(3)}$. В $SU(3)$ случае, петля Полякова становится комплексным числом, здесь сеть предсказывает действительную и мнимую части отдельно. В ходе оптимизации мы выбираем среднеквадратичную ошибку петли Полякова (MSE) в качестве функции потерь. Алгоритм оптимизации параметров нейронной сети осуществляется при помощи метода Адама. Более подробно алгоритм обучения представлен в работе [A3].

В результате нами была построена и обучена нейронная сеть, способная предсказывать поведение петли Полякова в области $\beta < \beta_{SU(N)}$ на основе данных только из одной точки β . На Рисунке 1 показан результат нейросети при прогнозировании Поляковской петли во всем диапазоне констант связи β для случая $SU(2)$ теории.

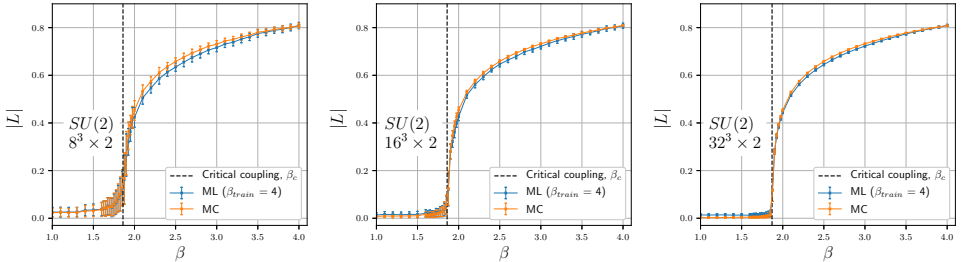


Рис. 1 — График Поляковской петли в $SU(2)$ калибровочной теории для $N_t = 2$ и $N_s = 8, 16, 32$. Стандартные выкладки, выполняемые на данных Монте-Карло (MC), показаны синей линией. Предсказания машинного обучения (ML) показаны оранжевым цветом. Вертикальная пунктирная линия демонстрирует критическое значение β полученное путем фитирования восприимчивости Поляковской петли. Для оценки каждой точки на графике использовалось по 100 конфигураций для всех трех размеров решеток. Результаты для других размеров представлены в тексте диссертации.

Другим важным аспектом этого предсказания является проверка инвариантности построенной наблюдаемой по отношению к калибровочным преобразованиям. Для этой проверки мы полностью изменяем конфигурацию, используя набор различных равномерно распределенных $SU(2)$ или $SU(3)$ -матриц. Мы

осуществляем одно глобальное калибровочное изменение решеточных данных и далее делаем прогноз на каждом таком шаге калибровки, уже для измененной конфигурации глюонных полей. На рисунке 2 показан результат такого теста для случая $SU(2)$ -теории с размером решетки равным $N_t = 4, N_s = 16$ в разных точках β .

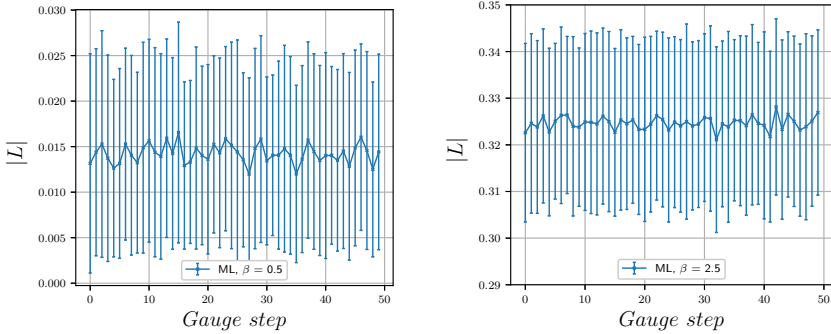


Рис. 2 — Зависимость предсказания Поляковской петли от числа случайных калибровочных $SU(2)$ преобразований. Результаты получены в точке $\beta = 2.5$ (область деконфайнмента) и $\beta = 0.5$ (область конфайнмента) для $SU(2)$ теории с размером решетки $16^3 \times 4$.

Проделанная работа представляет собой одно из первых исследований методов машинного обучения в непертурбативных теориях поля. В частности, сверточная нейронная сеть была обучена предсказывать петлю Полякова при довольно высоком значении константы связи, что соответствует нефизической области теории. Затем обученная нейронная сеть используется для вычисления петли Полякова на конфигурациях Монте-Карло в других областях констант связи. В итоге было показано, что существует хорошее согласие между наблюдаемой, вычисленной с использованием ее аналитического определения и полученной с помощью машинного обучения.

Мы также продемонстрировали, что классическую нейронную сеть с прямой связью можно использовать для восстановления простых наблюдаемых и прогнозирования их свойств в критической области теории. Наша работа потенциально подразумевает, что методы машинного обучения могут предсказывать другие, более сложные наблюдаемые и, таким образом, применяться к областям, недоступным для стандартных методов Монте-Карло. Кроме того, мы продемонстрировали, как калибровочно-неинвариантная архитектура нейронной сети способна давать калибровочно-инвариантные решения в пределах статистических погрешностей.

Подобная нейросеть [A4] потенциально также может быть использована для генерации решеточных конфигураций в GAN-архитектурах, где данная нейросеть может выступать в роли дискриминатора.

Третья глава посвящена исследованию фазовой структуры КХД в области конечных плотностей, где внимание уделяется области мнимых значений химпотенциала при $T/T_c = 1.35$ [A5]. В данной мнимой области присутствует так называемый переход Роберге-Вейсса, а область действительных значений не имеет каких-то фазовых особенностей. В области чисто мнимых значений химического потенциала $\mu_q = i\mu_{qI}$ ($\mu_{qI} \in \mathbb{R}$) фермионный детерминант принимает действительные значения. Данный факт означает, что каноническая статистическая сумма $Z_n \equiv Z_C(n, T, V)$ при конечных μ_{qI} может быть вычислена при помощи метода Монте-Карло. В дополнение можно сказать, что $Z_C(n, T, V)$ представляют собой коэффициенты ряда Лорана для большой канонической статсуммы $Z_{GC}(\mu_q, T, V)$, которую можно легко восстановить воспользовавшись разложением

$$Z_{GC}(\mu_q, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi_q^n, \quad (5)$$

что аналогично выражению для барионного случая

$$Z_{GC}(\mu_B, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(3n, T, V) \xi_B^n, \quad (6)$$

где барионный химический потенциал $\mu_B = 3\mu_q$ и активность $\xi_B = \xi_q^3 = e^{3i\mu_q/T}$. В результате структура теории при действительном μ_q определяется из области чисто мнимых значений химического потенциала $\mu_q = i\mu_{qI}$ ($\mu_{qI} \in \mathbb{R}$).

Общая идея восстановления канонических статсумм была описана в работе [27], где был продемонстрирован численный подход для отыскания Z_n . Данный подход подразумевал вычисление плотности числа кварков в области чисто мнимых значений $\mu_q = i\mu_{qI}$. В свою очередь, в работе [32] было показано, что при $T > T_{RW}$, в области мнимых значений химпотенциала кварковая плотность может быть хорошо аппроксимирована полиномом нечетной степени:

$$\frac{n_{qI}}{T^3}(\theta_q) = \sum_{k=1}^{N_{poly}} \alpha_{2k-1} \theta_q^{2k-1}. \quad (7)$$

Профитировав решеточные данные для кварковой плотности в мнимой области и получив коэффициенты α_{2k-1} можно найти Z_{GC} из

$$\frac{n_{qI}}{T^3} = \frac{1}{VT^2} \frac{\partial}{\partial \mu_{qI}} \ln Z_{GC}(\mu_{qI}, T, V). \quad (8)$$

Из полученного выражения для Z_{GC} можно найти канонические статсуммы Z_n . Для их отыскания необходимо воспользоваться преобразованием Фурье,

поскольку в мнимой области оно в точности воспроизводит выражение 5. Следовательно, Z_n будут являться образом для Z_{GC} и выражаться через обратное преобразование Фурье.

$$Z_C(n, T, V) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\theta, T, V) \Big|_{\theta_R=0}. \quad (9)$$

Получив Z_n и подставив их в исходное выражение 5 можно найти искомое Z_{GC} , но уже для произвольных μ_q .

Данный подход оказался не совсем удачен в области $T > T_c$, поскольку следуя данной процедуре можно восстановить только определенное количество Z_n . Так как после некоторого $n = n_{max}$ при численном интегрировании 9 начинают появляться отрицательные значения, которые не несут какого-либо физического смысла [27; 28], а природа такого поведения ставит под сомнение саму процедуру получения Z_n .

В наших исследованиях [A5—A7] предлагается другая процедура получения канонических статсумм Z_n . Мы также начинаем с гипотезы о том, что плотность числа кварков хорошо описывается выражением 7. При оценке кварковой плотности для $T/T_c = 1.35$ оказывается достаточно использовать всего два коэффициента α_1 и α_3 . При более низких температурах требуется учитывать вклад дополнительного коэффициента α_5 . В результате мы работаем с плотностью вида

$$\hat{\rho} = a_1 \hat{\mu} + a_3 \hat{\mu}^3 + a_5 \hat{\mu}^5, \quad -\pi/3 < \hat{\mu} < \pi/3 \quad (10)$$

где $\hat{\mu} = \mu/T$, $\hat{\rho} = \rho/T^3$ и $\rho = n/V$.

Основная идея нашего подхода заключается в аналитической оценке интеграла 9 методом перевала, где мы приходим к оценке вида

$$Z_{nA} = \frac{e^{-VT^3 F_n(\hat{\mu}_0)}}{e^{-VT^3 F_0(\hat{\mu}_0)}} \frac{\sqrt{F_0''(\hat{\mu}_0)}}{\sqrt{F_n''(\hat{\mu}_0)}}, \quad \text{где} \quad F_n(\hat{\mu}) = -\rho(n)\hat{\mu} + \frac{1}{2}a_1\hat{\mu}^2 + \frac{1}{4}a_3\hat{\mu}^4, \quad (11)$$

Более подробно процедура получения данного результат представлена в тексте диссертации.

На Рисунке 3 демонстрируется согласие между Z_n , полученными аналитическим способом, Z_{nA} и Z_{nN} , вычисленными в работе [27] при помощи численного интегрирования. Предложенный подход дает правильное поведение Z_n до $\hat{\rho} = \hat{\rho}_c$ для которого $n_{max} \approx 300$, что в барионных терминах соответствует $n_B \approx 100$. Также нами были вычислены относительные ошибки $R = (Z_{nN} - Z_{nA})/Z_{nN}$, из которых следует, что отклонение от численного результата стремится к нулю в пределе бесконечного объема для всех значений плотности, рассмотренных нами в доступной области.

Далее демонстрируются нули Ли-Янга вычисленные с использованием коэффициентов Z_{nA} . Высокоточные значения Z_{nA} вычисляются при помощи

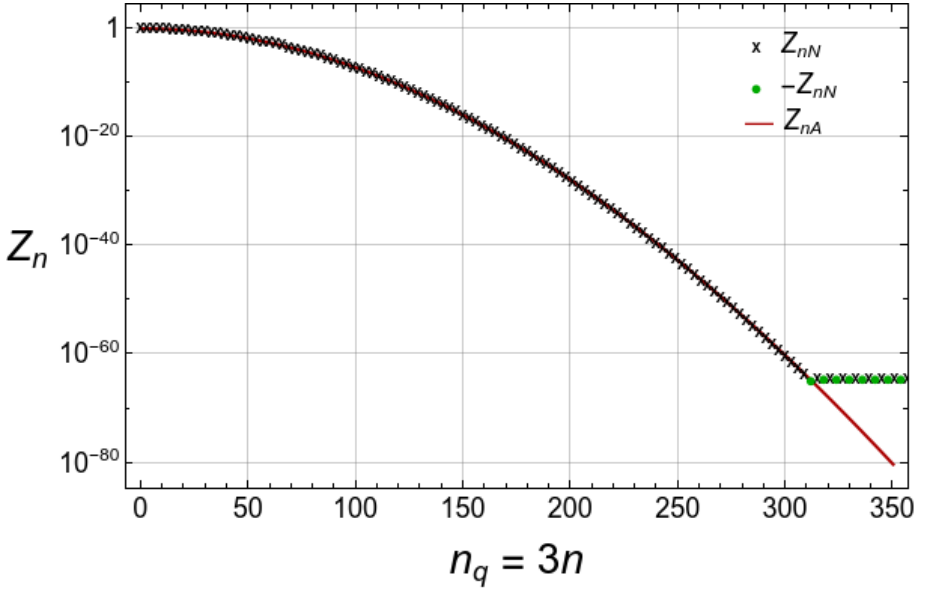


Рис. 3 — Сравнение аналитических Z_{nA} и численных Z_{nN} , полученных на решеточных данных в мнимой области химического потенциала для $T/T_c = 1.35$.

библиотеки GNU MPFR [33], позволяющей выполнять вычисления с произвольной точностью. В данном случае вычисления производились с точностью 6000 значащих цифр.

Вычисление корней полинома высокой степени, является очень сложной задачей. В данной работе был использован очень эффективный пакет MPSolve v.3.1.8 (Multiprecision Polynomial Solver) [34], который предоставляет возможность вычисления корней полинома с произвольной точностью.

Аналитическое выражение для Z_n вместе с использованием пакета MPSolve позволяет работать с полиномами произвольной степени, ограничиваясь только лишь вычислительными затратами на получения нулей Ли-Янга. Это позволяет существенно улучшить результаты предыдущих работ для $T > T_{RW}$ [28].

Основная задача исследования - это понять свойства нулей Ли-Янга в окрестности фазового перехода Роберге-Вейсса ($\xi_B = -1$), поскольку в ранних исследованиях при $T > T_c$ метод не воспроизводил этот переход. В практических расчетах объем решетки ($V = a^3 N_s^3$) и пределы в разложении по активностям 6 конечны. В связи с этим мы обрезаем данный ряд сверху и снизу до значения $\pm N_{max}$. Чтобы сделать вывод о пределе бесконечного объема, мы должны изучить зависимость нулей Ли-Янга от параметров N_s и N_{max} .

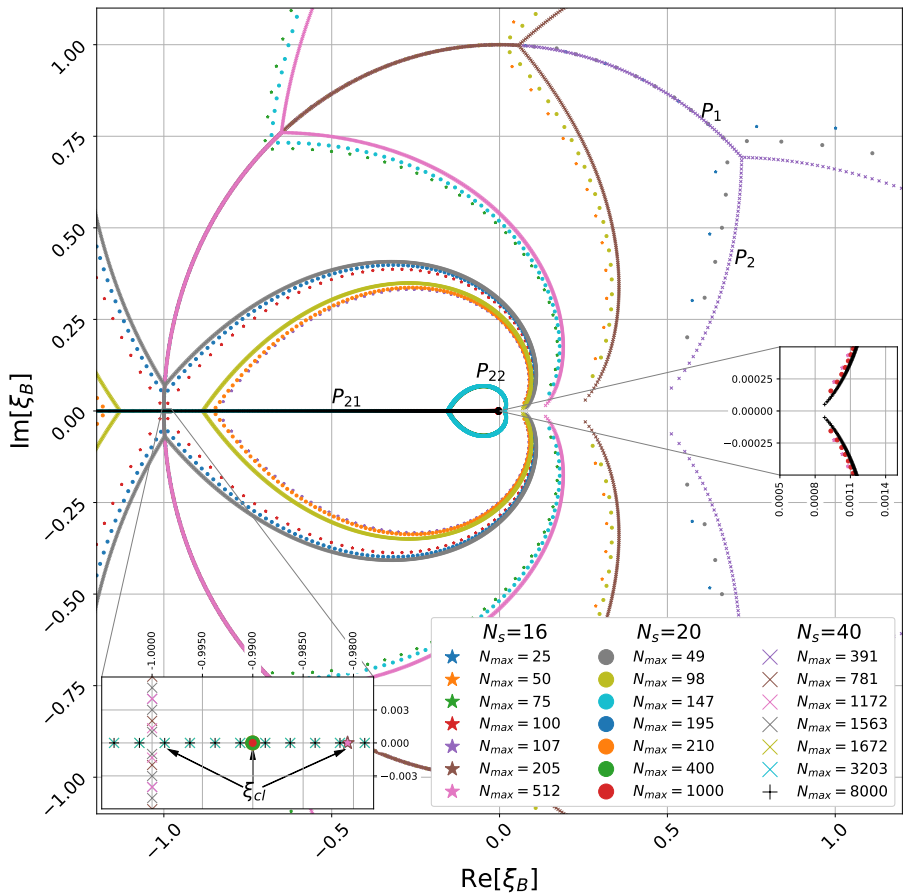


Рис. 4 — Демонстрация зависимости нулей Ли-Янга от N_{max} и V для $N_s = 16, 20, 40$. Нули Ли-Янга построены для постоянных значений кварковой плотности $\rho_{max} = n_{max}/V = 1.17, 2.24, 3.52, 4.69, 5.02, 9.61, 24$.

На Рис. 4 показаны результаты проделанных вычислений. При малых значениях N_{max} нули Ли-Янга состоят из двух частей: первая часть, P1 распределена по окружности $|\xi_B| = 1$ и другой части, P2 образующую кривую, начинающуюся на окружности в конечной точке P1 и продолгающуюся к действительной положительной оси. Также было замечено, что область нулей P1 сжимается до $\xi_B = -1$ с увеличением ρ_{max} так что один конец P2 двигается по окружности в направлении $\xi_B = -1$. Здесь мы подтверждаем предыдущие наблюдения, что видно из сравнения нулей Ли-Янга для $\rho_{max} = 1.17, 2.24, 3.52, 4.69$ на Рис. 4. Но, благодаря аналитической оценке интеграла Фурье вычисления с гораздо большей максимальной плотностью $\rho_{max} =$

5.02, 9.91, 24 демонстрируют поведение нулей в пределе бесконечного объема, что было недоступно ранее.

На Рис. 4 видно, что P1 полностью исчезает при $\rho_{max} > 4.7$. Также видно, что P2 разделяется на две части при $\rho_{max} > 4.7$: P21, состоящий из нулей Ли-Янга на отрицательной вещественной оси $-1 < \xi_B < -\xi_{B0}$ при этом ξ_{B0} движется к нулю с увеличением ρ_{max} и другая изогнутая часть P22, соединяющая $-\xi_{B0}$ с точкой немного выше положительной действительной оси, которая при увеличении плотности перемещается к действительной оси.

Далее мы описываем свойства нулей на действительной отрицательной оси. Нами обнаружено, что для фиксированного объема нули начинают появляться, когда N_{max} превышает некоторое значение, примерно равное 64×4.7 . Сначала появляются нули Ли-Янга, наиболее близкие к $\xi_B = -1$. Затем с увеличением N_{max} появляются нули все более удаленные от $\xi_B = -1$. Также нами замечено, что нули, лежащие на действительной оси, совпадают с нулями для других N_{max} . В результате при увеличении ρ_{max} и рассмотрев предел больших объемов, мы обнаруживаем, что практически все нули Ли-Янга ложатся на действительную ось.

Далее нами показано, что в бесконечном пределе имеется ненулевая плотность нулей в области $\xi_B = -1$, на что указывает анализ расстояний между соседними нулями Ли-Янга. Формула, связывающая плотность нулей Ли-Янга с разрывом средней плотности числа частиц, была получена в [19; 20]. В данном исследовании аппроксимируется нормированная плотность нулей Ли-Янга расположенных на действительной оси, определяемая как

$$g(\theta_R) = \frac{1}{N_s^3} \frac{dN_{LYZ}(\theta_R)}{d\theta_R} \approx \frac{1}{N_s^3 \Delta\theta_R}, \quad (12)$$

где $N_{LYZ}(\theta_R)$ — количество нулей в интервале $(0, \theta_R)$ и $\Delta\theta_R$ — расстояние между соседними нулями Ли-Янга на вещественной отрицательной полуоси. Наши нули Ли-Янга воспроизводят и подтверждают данную зависимость. Подробные аналитические выкладки подтверждающие факт разрыва средней плотности $\Delta\hat{\rho}_I$ были представлены в работе [A5] и выполнены Рогалевым Р.Н..

Другое указание на существование перехода при $T/T_c = 1.35$ следует из численного анализа нулей в области $\xi = \xi_{RW}$. На Рис. 5 видно, что в пределе $N_s^3 \rightarrow \infty$, расстояние от ближайшего нуля Ли-Янга до точки Роберге-Вейсса стремится к нулю линейно, т.е. в пределе бесконечного объема должна существовать ненулевая плотность нулей Ли-Янга, свидетельствующая о наличии нуля $\xi_B = -1$, отвечающего переходу Роберге-Вейсса.

Суммируя текущий результат можно сказать что, в более ранней работе [28] подобные вычисления для нулей Ли-Янга были проделаны с использованием ограниченного числа канонических статистических сумм Z_n , т.к. было обнаружено, что канонические стутсуммы могут быть численно вычислены только для ограниченного диапазона n . Чтобы обойти это ограничение, в нашем же исследовании было использовано приближенное аналитическое выражение,

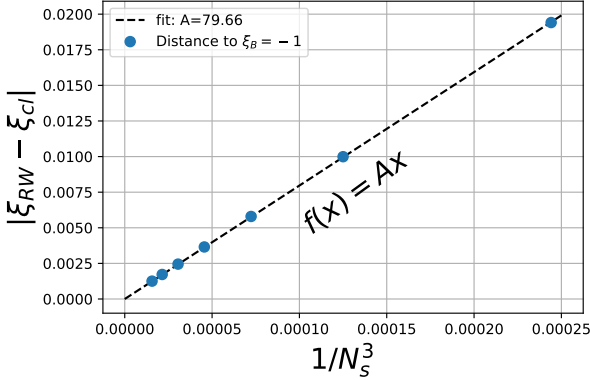


Рис. 5 — Расстояние от точки перехода Роберге-Вейсса (ξ_{RW}) до ближайшего нуля Ли-Янга (ξ_{cl}) как функция от обратного объема. Два ближайших к точке Роберге-Вейсса нуля Ли-Янга имеют значения $\text{Re}(\mu) = \pm A/2$, где A может быть интерпретировано как $A^{-1} = 2g(0)$

где нами было продемонстрировано, что полученные Z_n очень хорошо согласуются со значениями из предыдущих работ. В обоих случаях согласие улучшается с увеличением объема. Используя новые значения Z_n , мы получили новое поведение для кварковой плотности в окрестности фазового перехода Роберге-Вейсса при $\theta_I = \frac{\pi}{3}$, что согласуется с первыми принципами. Нами также показано, что в пределе бесконечного объема появляется разрыв в зависимости $\hat{\rho}(\theta_I)$, свидетельствующий о переходном поведении первого рода.

Мы полагаем, что наши результаты, полученные при высокой температуре $T = 1.35$, где фазовые переходы отсутствуют в области реального химический потенциал, дают указания для расчета нулей Ли-Янга при низкой температуре, когда фазовый переход или кроссовер на реальных μ_B присутствует.

В **заключении** работы сформулированы основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Выводы работы вытекают из целей и задач данного исследования:

- В работе было показано, что алгоритм машинного обучения, в который не закладывалась исходная симметрия данных, позволяет восстановить калибровочно-инвариантный параметр порядка после процедуры обучения на решеточных конфигурациях в одной нефизической точке пространства параметров модели.
- В работе также было продемонстрировано, что архитектура нейронной сети не требует кардинальных изменений при переходе от теории с калибровочной группой $SU(2)$ к теории с группой $SU(3)$. Изменения при переходе заключается лишь в увеличении числа входных параметров. С другой стороны было установлено, что архитектура нейронной сети зависит от величины временного направления во входных данных.

- Было показано, что построенный нейронной сетью параметр порядка восстанавливает критическое поведение системы в физической области, т.е. в той области, где обучение нейронной сети не проходило. В результате нейронная сеть, обученная для одной (нефизической) константы связи β , способна эффективно предсказывать параметр порядка теории во всей области значений β с хорошей точностью.
- В другой части работы было показано, что использование метода асимптотической оценки для вычисления интеграла Фурье приводит к аналитическим выражениям для канонических статсумм Z_n , что позволяет избежать проблему отрицательных значений Z_n . Было показано, что предложенный алгоритм воспроизводит правильное поведения плотности числа кварков в окрестности перехода Роберге-Вейсса.
- В работе было показано, что полученные коэффициенты Z_n не имеют отрицательных значений, которые возникали в ряде других работ. Данный результат приводит к возможности исследования системы при увеличении максимальной плотности, которая теперь ограничена только вычислительными ресурсами.
- В рамках исследования фазовой структуры теории при $T/T_c = 1.35$ было показано, что увеличение максимальной плотности числа кварков, приводит к появлению нулей Ли-Янга на оси вещественных и отрицательных значений активности ξ_B . Для получения результатов в области больших плотностей была использована более эффективная процедура для вычисления нулей Ли-Янга, основанной на модификации метода Аберта. В пределе малых плотностей полученные результаты подтверждаются другими работами, в которых присутствовало ограничение максимальной плотности.
- При исследовании расстояний между нулями Ли-Янга было показано существование ненулевой плотности нулей в области $\xi_B = -1$, соответствующей точке фазового перехода Роберге-Вейсса. Также было установлено, что расстояния между нулями Ли-Янга, лежащими на отрицательной оси активности ξ_B , линейно зависят от $1/V$ и не зависят от степени разложения ряда по активностям N_{max} .

Публикации автора по теме диссертации

- A1. Программа для реализации друхуровневого интегратора системы уравнений Гамильтона: Св. о Рег. ПрЭВМ no. 2019663437 [Текст] / Н. Герасименюк [и др.]. — Заявл. 2019.
- A2. Программа для реализации максимальной абелевой калибровки в решеточной теории поля: Св. о Рег. ПрЭВМ no. 2020666325 [Текст] / Н. Герасименюк [и др.]. — Заявл. 2020.

- A3. Machine-learning physics from unphysics: Finding deconfinement temperature in lattice Yang-Mills theories from outside the scaling window [Text] / N. Gerasimeniuk [et al.] // Phys. Rev. D (Q1). — 2020. — Vol. 103, no. 014509. — Scopus, WoS.
- A4. Программа для предсказания фазового перехода в теории Янга-Миллса с двумя цветами: Св. о Рег. ПрЭВМ no. 2019666516 [Текст] / Н. Герасименюк [и др.]. — Заявл. 2019.
- A5. Numerical study of the Roberge-Weiss transition [Text] / N. V. Gerasimeniuk [et al.] // Phys. Rev. D (Q1). — 2023. — Vol. 107, issue 1. — P. 014508. — Scopus, WoS.
- A6. Analytic Continuation in Lattice QC₂D [Text] / N. V. Gerasimeniuk [et al.] // Phys. Part. Nucl. (Q4). — 2021. — Vol. 52, no. 4. — P. 529—535. — Scopus, WoS.
- A7. Lee-Yang Zeroes in the Baryon Fugacity Plane: The Role of High Densities [Текст] / N. Gerasimeniuk [и др.] // Particles (Q3). — 2023. — Т. 6, № 3. — Scopus, WoS.

Список литературы

1. *Ferrenberg, A.* New Monte Carlo technique for studying phase transitions [Text] / A. Ferrenberg, R. Swendsen // Phys. Rev. Lett. — 1988. — Vol. 61. — P. 2635—2638.
2. Lattice QCD at Finite Density: An Introductory Review [Text] / S. Muroya [et al.] // Progress of Theoretical Physics. — 2003. — Vol. 110, no. 4. — P. 615—668.
3. Equation of state and heavy-quark free energy at finite temperature and density in two flavor lattice QCD with Wilson quark action [Text] / S. Ejiri [et al.] // Physical Review D. — 2010. — Vol. 82, no. 1.
4. *Nagata, K.* EoS of finite density QCD with Wilson fermions by multi-parameter reweighting and Taylor expansion [Text] / K. Nagata, A. Nakamura // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 4.
5. Perturbation theory without gauge fixing [Text] / G. Parisi, Y. S. Wu, [et al.] // Sci. Sin. — 1981. — Vol. 24, no. 4. — P. 483—496.
6. *Aarts, G.* Lefschetz thimbles and stochastic quantization: Complex actions in the complex plane [Текст] / G. Aarts // Physical Review D. — 2013. — Т. 88, № 9.
7. *Wakayama, M.* Search of QCD phase transition points in the canonical approach of the NJL model [Текст] / M. Wakayama, A. Hosaka // Physics Letters B. — 2019. — Т. 795. — С. 548—553.

8. *Wakayama, M.* Use of the canonical approach in effective models of QCD [Текст] / M. Wakayama, S.-i. Nam, A. Hosaka // Phys. Rev. D. — 2020. — Т. 102. — С. 034035.
9. *Nakamura, A.* Probing QCD phase structure using baryon multiplicity distribution [Текст] / A. Nakamura, K. Nagata // Progress of Theoretical and Experimental Physics. — 2016. — Т. 2016, № 3. — С. 033D01.
10. *Pawlowski, J. M.* Reducing Autocorrelation Times in Lattice Simulations with Generative Adversarial Networks [Text] / J. M. Pawlowski, J. M. Urban // Mach. Learn. Sci. Technol. — 2020. — Vol. 1, no. 045011.
11. *Albergo, M. S.* Flowbased generative models for Markov chain Monte Carlo in lattice field theory [Text] / M. S. Albergo, G. Kanawar, P. E. Shanahan // Phys. Rev. D. — 2019. — Vol. 100, no. 034515.
12. Sampling using SU(N) gauge equivariant flows [Text] / D. Boyda [et al.] // Phys. Rev. D. — 2021. — Vol. 103, no. 074504.
13. Equivariant flow-based sampling for lattice gauge theory [Text] / G. Kanwar [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2020. — Vol. 125, no. 121601.
14. *Shanahan, P. E.* Machine learning action parameters in lattice quantum chromodynamics [Text] / P. E. Shanahan, D. Trewartha, W. Detmold // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 97, no. 094506.
15. *Matsumoto, T.* Classifying Topological Charge in SU(3) Yang-Mills Theory with Machine Learning [Text] / T. Matsumoto, M. Kitazawa, Y. Kohno.
16. *Nieuwenburg, E. P.* Learning phase transitions by confusion [Text] / E. P. Nieuwenburg, Y.-H. Liu, S. D. Huber // Nature Physics. — 2017. — Vol. 13.
17. *Wetzel, S. J.* Machine Learning of Explicit Order Parameters: From the Ising Model to SU(2) Lattice Gauge Theory [Text] / S. J. Wetzel, M. Scherzer // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 96, no. 184410.
18. Machine learning quantum phases of matter beyond the fermion sign problem [Text] / P. Broecker [et al.] // Scientific Reports. — 2017. — Vol. 7, no. 8823.
19. *Yang, C. N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. 1. Theory of condensation [Text] / C. N. Yang, T. D. Lee // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 87, no. 404.
20. *Yang, C. N.* Statistical theory of equations of state and phase transitions. 2. Lattice gas and Ising model [Text] / C. N. Yang, T. D. Lee // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 87, no. 410.
21. The critical points of strongly coupled lattice QCD at nonzero chemical potential [Текст] / I. M. Barbour [и др.] // Physical Review D. — 1997. — Т. 56, № 11.
22. Results on finite density QCD [Текст] / I. M. Barbour [и др.] // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. — 1998. — Т. 60, № 1/2. — С. 220—233.

23. Chiral symmetry restoration and realisation of the Goldstone mechanism in the $U(1)$ Gross-Neveu model at non-zero chemical potential [Текст] / I. Barbour [и др.] // Nuclear Physics B. — 1999. — Т. 557, № 1/2. — С. 327—351.
24. *Barbour, I.* Complex zeros of the partition function for lattice QCD [Текст] / I. Barbour, A. Bell // Nuclear Physics B. — 1992. — Т. 372, № 1. — С. 385—402.
25. *Fodor, Z.* Lattice determination of the critical point of QCD at finite T and μ [Текст] / Z. Fodor, S. D. Katz // Journal of High Energy Physics. — 2002. — Т. 2002, № 03.
26. *Fisher, M. E.* Lectures in Theoretical Physics 7c [Текст] / M. E. Fisher // Nuclear Physics B. — 1965. — С. 1.
27. New approach to canonical partition functions computation in $N_f=2$ lattice QCD at finite baryon density [Text] / V. G. Bornyakov [et al.] // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 95, no. 094506.
28. Lee-Yang zeros in lattice QCD for searching phase transition points [Text] / M. Wakayama [et al.] // Phys. Rev. B. — 2019. — Vol. 793. — P. 227.
29. Quark Density in Lattice QC_2D at Imaginary and Real Chemical Potential [Текст] / A. Begun [и др.]. — 2021.
30. Canonical partition functions in lattice QCD at finite density and temperature [Text] / V. Bornyakov [et al.] // 37th International Symposium on Lattice Field Theory - Lattice2019. — 2019.
31. Lee-Yang zero distribution of high temperature QCD and the Roberge-Weiss phase transition [Текст] / K. Nagata [и др.] // Physical Review D. — 2015. — Т. 91, № 9.
32. *Takahashi, J.* Quark number densities at imaginary chemical potential in $N_f=2$ lattice QCD with Wilson fermions and its model analyses [Text] / J. Takahashi, H. Kouno, M. Yahiro // Phys. Rev. D. — 2014. — Vol. 91, no. 014501.
33. MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding [Text] / L. Fousse [et al.] // ACM Transactions on Mathematical Software. — 2007. — Vol. 33, no. 2.
34. *Bini, D. A.* Solving secular and polynomial equations: A multiprecision algorithm [Text] / D. A. Bini, L. Robol // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 272. — P. 276.

Герасименюк Николай Владимирович

Критические явления неабелевых калибровочных теорий в решеточной регуляризации

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

