На правах рукописи

Быкова Надежда Дмитриевна

Исследование динамики логистического уравнения с запаздыванием методами бифуркационного анализа

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в *Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ»*.

Научный руководитель:	*Кащенко Сергей Александрович,* *доктор физико-математических наук,* *профессор*
Официальные оппоненты:	*Малинецкий Георгий Геннадьевич,* *доктор физико-математических наук,* *профессор,* *ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,* *заведующий отделом моделирования нелинейных процессов* *Лерман Лев Михайлович,* *доктор физико-математических наук,* *профессор,* *кафедра дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ,* *профессор*
Ведущая организация:	*Физический факультет МГУ*

Защита состоится «25» декабря 2015 г в 15:00 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.130.09* при *Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ»*, расположенном по адресу: *115409, г. Москва, Каширское ш., 31.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *НИЯУ «МИФИ»* и на сайте http://ods.mephi.ru/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,

доктор физико-математических наук, профессор *Леонов А.С.*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Логистическое уравнение с запаздыванием, являясь одним из простейших уравнений с запаздыванием, обладает сложной колебательной динамикой, кроме того оно является модельным для широкого класса задач с запаздыванием из приложений. Эти особенности модели обеспечивают актуальность выполненного в работе исследования. Отметим, что это уравнение находит значительное применение в экологии и радиофизике.

Цели и задачи диссертационной работы: Цель работы состоит в изучении качественного поведения решений логистического уравнения с запаздыванием в случае двухчастотного и одночастотного быстро осциллирующего возмущения параметров, а также для системы из двух и трех логистических уравнений с запаздыванием и большим запаздывающим управлением. В связи с этим можно выделить следующие задачи:

1. Определение в пространстве параметров областей устойчивости и неустойчивости простейших режимов задачи, определение критических значений параметров.

2. Построение нормальных и квазинормальных форм в близком к критическому случае.

3. Аналитическое и численное исследование устойчивых решений полученных нормализованных систем.

Научная новизна. Научная новизна проявляется в следующем.

1. В первой и второй главе предполагается, что варьируется параметр запаздывания. Вопрос о динамике решений рассматриваемого уравнения с воздействием на коэффициент запаздывания ранее не изучался.

2. В третьей главе рассматривается локальная динамика систем из двух и трех логистических уравнений с запаздыванием, в предположении, что на

систему оказывается большое запаздывающее управление.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость проведенного диссертационного исследования заключается в том, что использованные в работе методы, полученные в диссертации результаты могут быть использованы для решения широкого круга задач нелинейной динамики.

Методология и методы исследования. Основными методами исследования являются нелинейный локальный анализ, метод нормальных и квазинормальных форм, методы асимптотических разложений. Выполнен обширный численный эксперимент.

Положения, выносимые на защиту:

1. Изучено качественное поведение решений логистического уравнения с запаздыванием при двухчастотном возмущении, в пространстве параметров выделены области существования и устойчивости циклов и торов различной структуры, а также области нерегулярных колебаний. Фазовые перестройки в этом случае связаны с бифуркациями потери симметрии, с каскадами бифуркаций удвоения периодов и бифуркациями расщепления сепаратрис.

2. Для логистического уравнения с быстро осциллирующим запаздыванием получены условия, при которых происходит процесс, состоящий из неограниченного числа «рождений» из состояния равновесия и последующей «гибели» устойчивого цикла.

3. Основываясь на методе квазинормальных форм, показано, что системы из двух и трех связанных логистических уравнений с большим запаздывающим управлением могут обладать сложной динамикой. Кроме того обнаружено явление мультистабильности.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations(Москва, 2014 г.), Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики» (Москва, 2014 г.).

Кроме того, результаты неоднократно обсуждались на семинаре «Нелинейная динамика» Ярославского государственного университета им.П.Г.Демидова.

Диссертация выполнена при поддержке проекта № 984 «Методы исследования динамики сингулярно возмущенных бесконечномерных систем» в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 5 статей в журналах, рецензируемых ВАК [1–5] и 3 тезисов докладов [6–8].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 105 страниц, включая 32 рисунка. Библиография включает 95 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первых двух главах рассматривается одно логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u, \tag{1}$$

в предположении, что запаздывание определенным образом зависит от времени.

В первой главе изучается случай двухчастотного возмущения величин запаздывания и мальтузианского коэффициента, а именно предполагается выполнение следующих соотношений

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon r_{11} \sin \omega_1 t + \varepsilon r_{12} \sin \omega_2 t, \\ T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon T_{11} \sin \omega_1 t + \varepsilon T_{12} \sin \omega_2 t, \\ \omega_1 &= \frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_1, \\ \omega_2 &= \frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_2, \end{aligned} \tag{2}$$

смысл которых объяснен ниже. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ и $r_0 T_0 = \pi/2$. При выполнении условий $r = r_0$, $T = T_0$ и $r_0 T_0 = \pi/2$ в уравнении (1) состояние равновесия u_0 теряет устойчивость и от него ответвляется цикл, таким образом, соотношения (2) означают, что величины параметров r и T выбраны близкими к критическим, а частоты возмущения близки к удвоенной частоте собственных колебаний, так как нас интересует случай параметрического резонанса.

Далее ставится вопрос о локальной динамике (в окрестности u_0) уравнения (1) при выполнении условий (2). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2), тогда в некоторой достаточно малой (в метрике $C_{[-T,0]}$) окрестности u_0 уравнение (1) имеет локальное двумерное устойчивое инвариантное интегральное многообразие, на котором это уравнение представимо с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$ в виде скалярного комплексного уравнения*

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha \xi + A(\tau) \bar{\xi} + d|\xi|^2 \xi, \tag{3}$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$\begin{gathered} A(\tau) = \alpha_1 \exp(i \delta_1 \tau) + \alpha_2 \exp(i \delta_2 \tau), \\ \alpha_1 = T_{11} \frac{r_0^2}{2i(1 + i\pi/2)}, \\ \alpha_2 = T_{12} \frac{r_0^2}{2i(1 + i\pi/2)}, \\ d = -\frac{r_0(3\pi - 2 + i(\pi + 6))}{10(1 + \pi^2/4)}, \end{gathered}$$

отметим, что $\operatorname{Re} d < 0$. *Функция* $\xi(\tau)$ *связана с решением (1) соотношением*

$$u(t,\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}\Big[\xi(\varepsilon t)\exp\big(i\pi(2T_0)^{-1}t\big) + \\ + \bar{\xi}(\varepsilon t)\exp\big(-i\pi(2T_0)^{-1}t\big)\Big] + \varepsilon u_2(t,\tau) + \\ + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (4)$$

где $u_j(t,\tau), j = 2,3$ *—* $4T_0$*-периодические по* t *функции. Тем самым, устойчивому циклу уравнения (3) отвечает устойчивое периодическое решение (1) удовлетворяющее формуле (4).*

Доказательство теоремы осуществляется путем стандартной замены метода нормальных форм.

Далее будем изучать уравнение (3) и произведем в нем следующие замены

$$\xi = v\exp\left(\frac{i}{2}\delta_1\tau\right), \qquad \delta_2 - \delta_1 = \mu\,(\delta_2 > \delta_1), \qquad \mu\tau = \tau_1.$$

Тогда получаем уравнение с 2π - периодическими коэффициентами

$$\mu\frac{dv}{d\tau_1} = \alpha_0 v + (\alpha_1 + \alpha_2\exp(i\tau_1))\bar{v} + d|v|^2 v, \quad (5)$$

здесь $\alpha_0 = \alpha - i\delta_1$. Уравнение (5) исследовалось при различных значениях параметра μ.

В статьях[1,2] исследовалась на устойчивость линейная часть (5). Приведем здесь соответствующие результаты. Сначала представим линейную часть (5) в вещественной форме

$$\mu\frac{dw}{d\tau_1} = B(\tau_1)w, \quad w = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} v \\ \operatorname{Im} v \end{pmatrix}, \\ B(\tau_1) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\alpha_0 + B_1(\tau_1) & -\operatorname{Im}\alpha_0 + B_2(\tau_1) \\ \operatorname{Im}\alpha_0 + B_2(\tau_1) & \operatorname{Re}\alpha_0 - B_1(\tau_1) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

[1] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Раскачивание «качелей» при помощи двухчастотной силы // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1978. С. 19–25.

[2] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Параметрический резонанс в системах с запаздыванием при двухчастотном возмущении // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 113–118.

где $B_1(\tau_1) = \operatorname{Re}\alpha_1 + \operatorname{Re}\alpha_2\cos\tau_1 - \operatorname{Im}\alpha_2\sin\tau_1$, $B_2(\tau_1) = \operatorname{Im}\alpha_1 + \operatorname{Re}\alpha_2\sin\tau_1 + \operatorname{Im}\alpha_2\cos\tau_1$. При достаточно больших μ в результате применения принципа усреднения задача сводится к случаю параметрического резонанса при одночастотном возмущении, который хорошо изучен[3].

Предположим теперь, что

$$0 < \mu \ll 1,$$

тогда, исходя из результатов статей[4,5,6], устойчивость нулевого решения системы (6) тесно связана с поведением функции

$$\rho(\tau_1) = \det\big(B(\tau_1) - \operatorname{Re}\alpha_0 \cdot E\big). \tag{7}$$

Здесь $B(\tau_1)$ — матрица линейной части уравнения (5).

В зависимости от того является ли функция $\rho(\tau_1)$ положительной, отрицательной или знакопеременной, выделяются три варианта в исследовании системы (6). Учитывая вид матрицы $B(\tau_1)$ в (6) имеем

$$\rho(\tau_1) = (\operatorname{Im}\alpha_0)^2 - (B_1^2(\tau_1) + B_2^2(\tau_1)), \tag{8}$$

тем самым, подходящим образом меняя $\operatorname{Im}\alpha_0$, можно добиться выполнения любого из этих условий. Следуя статье[4], нетрудно обосновать следующее утверждение, описывающее динамику системы (6).

Теорема 2. *Имеют место следующие варианты поведения решений системы* (6)*:*

---

[3] *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

[4] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Раскачивание «качелей» при помощи двухчастотной силы // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1978. С. 19–25.

[5] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Параметрический резонанс в системах с запаздыванием при двухчастотном возмущении // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 113–118.

[6] *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

1. Пусть $\rho(\tau) > 0$ при всех $\tau > 0$, тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ нулевое решение системы (6) асимптотически устойчиво.

2. Пусть $\rho(\tau) < 0$ при всех $\tau > 0$, тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ нулевое решение (6) асимптотически устойчиво (неустойчиво), если

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{-\rho(\tau)}d\tau + \operatorname{Re}\alpha_0 < 0\ (> 0). \tag{9}$$

3. Наконец, в случае знакопеременной функции $\rho(\tau)$ задача (6) является системой с точками поворота. При этом, если для нее выполнено условие

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{|\rho(\tau)| - \rho(\tau)}{2}}d\tau > \operatorname{Re}\alpha_0, \tag{10}$$

то устойчивость и неустойчивость решений системы (6) бесконечно чередуются при $\mu \to 0$. (Отметим, что, если в (10) неравенство заменить на противоположное, то нулевое решение асимптотически устойчиво при достаточно малых μ.)

Перечисленные свойства решений системы (6) позволяют сделать выводы о локальной устойчивости или неустойчивости нулевого решения нелинейного уравнения (5) при достаточно больших или достаточно малых μ. При условно «средних» значениях параметра μ применялись численные методы. Было выяснено, что в этом случае могут наблюдаться нерегулярные колебания, а фазовые перестройки связаны с бифуркациями потери симметрии, с каскадами бифуркаций удвоения периодов и бифуркациями расщепления сепаратрис. Наглядное представление о фазовых перестройках, происходящих с уравнением (5) в области неупорядоченных колебаний, дает построенный график зависимости старшего ляпуновского показателя аттрактора уравнения (5) от параметра $\nu = 1/\mu$.

Таким образом, при условиях (2) динамика (1) достаточно богата и разнообразна. При этом случай двухчастотных возмущений принципиально сложнее случая одночастотного возмущения, когда $\omega_1 = \omega_2$. Отметим, что в линейной постановке задача о параметрическом резонансе при двухчастотных возмущениях рассматривалась в статьях[7,8].

Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Во второй главе рассматривается уравнение (1) в предположении, что параметр запаздывания T имеет вид

$$T = T_0 + af(\omega t), \qquad T_0 > 0, \qquad 0 < a < T_0, \qquad \omega \gg 1 \tag{11}$$

и функция $f(s)$ является периодической с нулевым средним. Таким образом запаздывание является периодически зависимым и быстро осциллирующим по времени.

Ставится вопрос о локальной — в окрестности состояния равновесия $u_0 \equiv 1$ — динамике уравнения (1) при условии (11).

Были рассмотрены три вида функции f:

- $f(s) = \operatorname{sign}(\sin s)$;
- $f(s) = s, \text{ при } -1 \leqslant s < 1$;
- $f(s)$ — 2-периодичная функция и

$$f(s) = \begin{cases} -1, \text{ при } -\alpha \leqslant s \leqslant 0, \\ \dfrac{\alpha}{2-\alpha}, \text{ при } 0 < s < 2-\alpha. \end{cases}$$

В каждом из этих случаев применялся принцип усреднения[9], с его помощью формулировались критерии устойчивости состояния равновесия u_0 и в первых

[7] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Раскачивание «качелей» при помощи двухчастотной силы // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль, 1978. С. 19–25.

[8] *Кащенко С. А., Колесов Ю. С.* Параметрический резонанс в системах с запаздыванием при двухчастотном возмущении // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 2. С. 113–118.

[9] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1958. 408 с.

двух случаях ставился вопрос о локальной динамике в окрестности u_0 в критическом случае — рассматривается такое значение параметра r, что устойчивость u_0 сменяется неустойчивостью. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (11),* $\operatorname{Re} d < 0$ *и существует последовательность* $\omega_n \to \infty$*, для которой* $\inf \operatorname{Re} \lambda_1(\omega_n) > 0$*, тогда существует такое число* N_0*, что для всех* $n \geqslant N_0$ *существует устойчивое решение уравнения (1) с асимптотикой вида*

$$u(t, \omega_n) = 1 + \omega_n^{-1/2} \left(\xi(\omega_n^{-1} t) \exp\left(i \frac{\pi}{2T_0} t \right) + \bar{\xi}(\omega_n^{-1} t) \exp\left(-i \frac{\pi}{2T_0} t \right) \right) + O(\omega_n^{-1}), \tag{12}$$

где функция $\xi(\tau)$ *удовлетворяет скалярному комплексному уравнению*

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda \xi + d|\xi|^2 \xi. \tag{13}$$

Здесь $\lambda = \lambda_1(\omega)/\omega + O(\omega^{-2})$*,* $\lambda_1(\omega)$ *— ограниченная функция, а* d *— некоторая величина, не зависящая от* ω*.*

Замечание 1. *В случае* $\operatorname{Re} d < 0$ *и* $\inf \operatorname{Re} \lambda_1(\omega_n) < 0$ *для любого достаточно большого* n *все решения исходной системы уравнений из малой и независящей от* n *окрестности нуля стремятся к* u_0 *при* $t \to \infty$*.*

Замечание 2. *Если* $\operatorname{Re} d > 0$ *и* $\inf \operatorname{Re} \lambda_1(\omega_n) < 0$ *задача (1) имеет неустойчивое решение с асимптотикой (12).*

Замечание 3. *В случае* $\operatorname{Re} d > 0$ *и* $\inf \operatorname{Re} \lambda_1(\omega_n) > 0$ *задача перестает быть локальной.*

Интересующему нас состоянию равновесия u_0 уравнения (1) в уравнении (13) соответствует нулевое решение, динамика в окрестности которого определяется знаками величин $\operatorname{Re} \lambda$ и $\operatorname{Re} d$. Было выяснено, что в случае $f(s) = \operatorname{sign}(\sin s)$ величина $\operatorname{Re} d$ является отрицательной, а $\operatorname{Re} \lambda$ — знакопеременной.

Это означает, что при $\omega \to \infty$ в уравнении (13) (а следовательно и в уравнении (1)) происходит неограниченный процесс «рождения» из состояния равновесия и «гибели» устойчивого цикла.

В случае $f(s) = s$, при $-1 \leqslant s < 1$ $\operatorname{Re} d$ по-прежнему отрицательна, а $\operatorname{Re}\lambda$ один раз пересекает ось абсцисс. Таким образом, в зависимости от значений параметров задачи уравнение (13) вместе с уравнением (1) может иметь устойчивый цикл (при $\operatorname{Re}\lambda(\omega) > 0$).

В последнем случае был поставлен вопрос о существовании значения параметра α, при котором величина $\operatorname{Re} d$ не является строго отрицательной, в отличие от двух других рассмотренных случаев. Такое значение удалось обнаружить.

Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 3].

В третьей главе рассматриваются системы из двух и трех связанных логистических уравнений с запаздыванием и большим запаздывающим управлением. В первом случае исследуется система:

$$\begin{aligned} \dot u &= r[1 - u(t-T)]u + \gamma(v(t-h) - u), \\ \dot v &= r[1 - v(t-T)]v + \gamma(u(t-h) - v). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь r – мальтузианский коэффициент, T – время запаздывания, γ – коэффициент запаздывающего управления, h – временная задержка запаздывающего управления. Все эти коэффициенты положительны. И, кроме того,

$$\gamma \gg 1.$$

Применяемая в работе методика исследования базируется на результатах работ[10,11,12,13,14]. Отметим, что мы будем рассматривать решения системы (14) с положительными начальными (при некотором $t = t_0$) функциями $\varphi(s) \in C_{[-H,0]}$, где $H = \max(T, h)$. Решения с такой начальной функцией остаются положительными при всех $t > t_0$. Применив специальный асимптотический метод локального анализа – метод квазинормальных форм, разработанный в статье Кащенко С.А.[15], получаем специальную нелинейную систему уравнений для некоторых вещественных функций $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$, не содержащую малых и больших параметров, нелокальная динамика, которой определяет в главном поведение решений исходной системы в ограниченной при $\gamma \to \infty$ области фазового пространства $C = C_{[-H,0]} \times C_{[-H,0]}$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h}\left[F_\Delta(\xi+\eta) + F_\Delta(\xi-\eta)\right] + \frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{1}{2h}\left[F_\Delta(\xi+\eta) - F_\Delta(\xi-\eta)\right] + \frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{16}$$

$$\xi\,(\tau, x+h) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta\,(\tau, x+h) \equiv -\eta(\tau, x). \tag{17}$$

Здесь $\varepsilon = \gamma^{-1}$, $\tau = \varepsilon t$, $x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})\,t$, $\Delta = T(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})$, z — произвольное вещественное число, θ_z — величина из интервала $[0,2)$, для которой выражение $z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z$ является нечетным целым. Нелинейность определяется функцией $F_\Delta(w) = rw\,[1 - w(\tau, x - \Delta)]$, здесь $w = w(\tau, x)$. Имеет место следующая теорема, связывающая решения краевой задачи (15) – (17) с

[10] *Кащенко С.А.* Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением // Моделирование и анализ информационных систем, 2014, Т. 21, №5, с. 61-77.

[11] *Kashchenko S.A.* Dynamics of the Logistic Equation with Delay and Delay Control // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24. No 8. P. 1440017

[12] *Кащенко И.С.* Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443. № 1. С. 9–13.

[13] *Кащенко И.С.* Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления // Доклады Академии наук. 2011. Т. 437. № 6. С. 743–747.

[14] *Кащенко С.А.* Динамика нелинейного уравнения второго порядка с большим коэффициентом запаздывающего управления // Доклады Академии наук, 2014, Т. 457, №6, с. 635-638.

[15] *Кащенко С.А.* Уравнения Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38, №3. С. 457–465.

решениями исходной системы.

Теорема 4. *Пусть при некоторых значениях* $z \in (-\infty, \infty)$ *и* $\theta_0 \in [0, 2)$ *краевая задача (15) – (17) имеет ограниченное вместе с первой и второй производной по* x *при* $\tau \to \infty$ *решение* $(\xi_0(\tau, x),\ \eta_0(\tau, x))$ *и пусть последовательность* $\varepsilon_m \to 0$ *определяется из условия* $\theta_z(\varepsilon, z) = \theta_0$. *Тогда система уравнений (14) имеет асимптотическое по невязке при* $\varepsilon_m \to 0$ *решение*

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)) = (\xi_0(\tau, x) + \eta_0(\tau, x),\ \xi_0(\tau, x) - \eta_0(\tau, x)) + o(1),$$

где $\tau = \varepsilon_m t$, $x = (z\varepsilon_m^{-1/2} + \theta_0)(1 - \varepsilon_m h^{-1})t$.

Краевую задачу (15) – (17) удобно переписать, сделав замену $U(\tau, x) = \xi(\tau, x) + \eta(\tau, x)$ и $V(\tau, x) = \xi(\tau, x) - \eta(\tau, x)$. Тогда приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_\Delta(U) + z^2 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_\Delta(V) + z^2 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{19}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(\tau, x + h) &\equiv V(\tau, x), \\ V(\tau, x + h) &\equiv U(\tau, x). \end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что анализ краевых задач типа реакция—диффузия с отклонением пространственного аргумента также рассматривались в статьях[16,17,18].

Краевая задача (18) – (20) была приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью аппроксимации второй производной по

[16] *So J. W. H., Wu J. H., Yang Y.* Numerical Hopf bifurcation analysis on the diffusive Nicholson's blowflies equation // Appl. Math. Comput. 2000. № 111. P. 53–69.

[17] *Wu J. H.* Introduction to neural dynamics and signal transmission delay // In: De Gruyter series in nonlinear analysis and applications. Berlin: de Gruyter, 2002.

[18] *Wu J. H., Zou X. F.* Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay // J. Dyn. Differ. Equations. 2001. Vol. 13. P. 651–687.

пространственной переменной, как второй разделенной разности и исследовалась численно при конкретных значениях параметров:

$$\varepsilon = 0.1, \quad T = 1, \quad h = 0.6,$$

при изменении параметра z, а параметр r брался равным одному из значений: 1, 1.5 или 2.

В результате численного эксперимента установлено, что уменьшение параметра z приводит к усложнению пространственной динамики: вместо одного устойчивого периодического режима может появляться два и более сосуществующих.

Далее рассматриваются две системы из трех логистических уравнений с запаздыванием с двумя типами «диффузионных» связей:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - 2u_1 + u_3(t-h)], \\ \dot{u}_2 &= F(u_2) + \gamma[u_1(t-h) - 2u_2 + u_3(t-h)], \\ \dot{u}_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) + u_2(t-h) - 2u_3] \end{aligned} \tag{21}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= F(u_1) + \gamma[u_2(t-h) - u_1], \\ \dot{u}_2 &= F(u_2) + \gamma[u_3(t-h) - u_2], \\ \dot{u}_3 &= F(u_3) + \gamma[u_1(t-h) - u_3], \end{aligned} \tag{22}$$

где $F(u) = ru[1 - u(t-T)]$.

Проводя аналогичные рассуждения, было получено уравнение относительно переменной $\xi(\tau, x)$, определяющее в главном поведение решений системы (21)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} F_\Delta(\xi) + z^2 (2h)^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{23}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x). \tag{24}$$

Связь между решениями (21) и (23), (24) устанавливает формула

$$u_j(t, \varepsilon) = \xi(\tau, x) + O(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \gamma^{-1}$, $\tau = \varepsilon t$,

$$x = (z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1})\, t,$$
$$\Delta = T(z\varepsilon^{-1/2} + \theta)(2 - \varepsilon h^{-1}).$$

В случае же системы (22) была получена краевая задача относительно переменных $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = (2h)^{-1} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (2h)^{-1} r \Big[\xi - \xi\xi(\tau, x - \Delta) - \\ - \exp\left(\frac{2\pi i T}{3h}\right) \eta\overline{\eta}(\tau, x - \Delta) - \\ - \exp\left(-\frac{2\pi i T}{3h}\right) \overline{\eta}\eta(\tau, x - \Delta)\Big], \quad (25)$$

$$\xi(\tau, x + h) \equiv \xi(\tau, x),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = (2h)^{-1} z^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{2\pi i}{3h^2}\eta + \\ + (2h)^{-1} r \Big[\eta - \eta\xi(\tau, x - \Delta) - \\ - \exp\left(-\frac{2\pi i T}{3h}\right) \xi\eta(\tau, x - \Delta)\Big], \quad (26)$$

$$\eta(\tau, x + h) \equiv \eta(\tau, x).$$

В этом случае справедливо утверждение, аналогичное утверждению для системы из двух уравнений, о связи грубых решений краевых задач (23), (25), (26) и решений исходных систем (21), (22).

Результаты третьей главы опубликованы в работе [4].

В Заключении перечислены основные результаты работы.

Список публикаций

1. Быкова Н. Д., Глызин С. Д., Кащенко С. А. Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении в логистическом уравнении с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 3. С. 86–98.

2. Быкова Н. Д., Григорьева Е. В. Применение принципа усреднения к логистическому уравнению с быстро осциллирующим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 89–93.
3. Быкова Н. Д. Вычисление ляпуновской величины для логистического уравнения с быстро осциллирующим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 3. С. 121–128.
4. Быкова Н. Д., Кащенко С. А. Корпоративная динамика систем логистических уравнений с запаздыванием и с большим запаздывающим управлением // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 3. С. 356–371.
5. Быкова Н. Д. О применении принципа усреднения к логистическому уравнению с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 1. С. 129–130.
6. Быкова Н. Д. О применении принципа усреднения к логистическому уравнению с быстро осциллирующим запаздыванием // The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, 22-29 августа 2014 г, Москва, РУДН. 2014. С. 131–132.
7. Быкова Н. Д. Параметрический резонанс в логистическом уравнении с запаздыванием // Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики», 28-29 ноября 2014 г., Москва, МГУ. 2014. С. 108–109.
8. Быкова Н. Д., Кащенко С. А. Динамика пары логистических уравнений с большим коэффициентом запаздывающего управления // Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики», 28-29 ноября 2014 г., Москва, МГУ. 2014. С. 110–111.