

На правах рукописи

**ЧМЫХОВ МИХАИЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2008

Работа выполнена в Московском инженерно-физическом институте  
(государственном университете)

Научный руководитель: Заслуженный деятель науки РФ,  
Лауреат Государственной премии СССР,  
доктор физико-математических наук,  
профессор Кудряшов Николай Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
начальник математического отдела  
профессор Трощев Виталий Ефимович,  
ГНЦ РФ ТРИНИТИ

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Клочихин Владимир Леонидович,  
МГУПИ

Ведущая организация: Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша РАН

Защита состоится «10» декабря 2008 г. в 16 часов 30 минут  
на заседании диссертационного совета Д212.130.09 в Московском  
инженерно-физическом институте по адресу: 115409, г. Москва, Ка-  
ширское шоссе, д. 31, тел. 324-84-98, 323-92-56

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИФИ.

Просим принять участие в работе совета или прислать отзыв в одном  
экземпляре, заверенный печатью организации.

Автореферат разослан «\_\_\_» октября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук, профессор Леонов А.С.

# Общая характеристика работы

*Объектом исследования* диссертационной работы являются задачи нелинейной теплопроводности и их применение для математического моделирования процессов, встречающихся в физике и в природе.

*Актуальность работы.*

Нелинейные параболические уравнения второго порядка служат основой многих математических моделей, используемых в физике, механике, биологии, химии и экологии. Например, нелинейное уравнение теплопроводности при определенных условиях описывает процессы электронной и ионной теплопроводности в плазме, адиабатической фильтрации газов и жидкостей в пористых средах, течения крови в мелких кровеносных сосудах, распространения выбросов отрицательной плавучести, диффузии нейтронов и альфа-частиц в реакторных материалах, химической кинетики и биологической активности.

Использование основных законов сохранения (энергии, массы, числа частиц и т.д.) при математическом моделировании различных физических процессов нередко приводит к одним и тем же нелинейным уравнениям параболического типа. Среди уравнений указанного типа особенно часто встречается нелинейное уравнение теплопроводности. Его универсальный характер дает основание утверждать, что изучение краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности остается до настоящего времени актуальной темой исследования.

Нелинейное уравнение теплопроводности является обобщением хорошо известного линейного уравнения теплопроводности, изучение которого входит в обязательную университетскую программу курса математической физики. Главное отличие нелинейного уравнения теплопроводности от линейного заключается в том, что коэффициент теплопроводности в нелинейном уравнении зависит от температуры. Поэтому для решений нелинейного уравнения не выполняется принцип суперпозиции и многие методы решения задач математической физики, в частности, метод Фурье и метод функций Грина, становятся неприменимыми.

Исследованию процессов нелинейной теплопроводности и фильтрации газа и жидкости в пористой среде посвящены работы отечественных ученых Я.Б. Зельдовича, Г.И. Баренблатта, П.Я. Кочиной, О.А. Олейник, А.С. Калашникова, А.С. Компанейца, С.Н. Кружкова, С.П. Курдюмова, О.А. Ладыженской, А.П. Михайлова, В.Н. Николаевского, А.А. Самарского, И.М. Соболя, В.Е. Трощиева и многих других.

Нелинейные процессы теплопроводности впервые изучались в работе Я.Б. Зельдовича и А.С. Компанейца<sup>1</sup>. Авторами рассмотрен процесс распространения тепла с помощью механизма лучистой теплопроводности из мгновенного точечного источника для плоской задачи. Решение этой задачи получено в аналитическом виде.

В той же работе было установлено, что скорость распространения тепла для процессов нелинейной теплопроводности является конечной, в отличие от задач, описываемых линейным уравнением теплопроводности. Я.Б. Зельдович и А.С. Компанеец показали, что решения ряда нелинейных задач теплопроводности являются обобщенными и допускают существование разрывов производных на фронте тепловой волны.

В работах П.Я. Кочиной<sup>2</sup> и Г.И. Баренблатта с соавторами<sup>3</sup> показано, что некоторые процессы фильтрации газа и жидкости в пористой среде описываются уравнением, аналогичным нелинейному уравнению теплопроводности.

В работе В.Ш. Шагапова и Г.Р. Галиаскаровой<sup>4</sup> установлено, что процесс распространения и накопления выбросов отрицательной плавучести на горизонтальной поверхности с учетом сопротивления флоры и земной поверхности в ряде случаев может описываться уравне-

---

<sup>1</sup> *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник посвященный 70 — летию академика А.Ф. Иоффе. — М.: Из - во АН СССР, 1950. — С. 61 — 71.

<sup>2</sup> *Полубаринова-Кочина П. Я.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории фильтрации // Доклады АН СССР. — 1948. — Т. 63, № 6. — С. 623–627.

<sup>3</sup> *Баренблатт Г. И., Енттов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972. — 288 с.

<sup>4</sup> *Шагапов В. Ш., Галиаскарова Г. Р.* О динамике накопления атмосферных выбросов отрицательной плавучести в безветренную погоду // ИФЖ. — 2002. — Т. 75, № 2. — С. 22–27.

нием нелинейной теплопроводности.

О.А. Олейник и А.С. Калашников доказали теоремы существования и единственности решения задачи Коши и решений краевых задач для уравнений параболического типа, а также сформулировали теоремы сравнения, на основании которых с помощью автомодельных решений получили условия конечной скорости распространения температурных волн.

А.А. Самарский и И.М. Соболев<sup>5</sup> в 1963 году с помощью численного моделирования задач нелинейной теплопроводности показали существование „остановившейся” температурной волны, не проникающей из горячей среды в холодную. В дальнейшем явление локализации тепла исследовалось в целом ряде работ С.П. Курдюмова и его учеников.

Ряд автомодельных решений задач газовой динамики и нелинейной теплопроводности представлен в учебнике П.П. Волосевича, Е.И. Леванова<sup>6</sup>.

Однако, несмотря на многочисленные исследования процессов нелинейной теплопроводности, аналитические решения ряда задач нелинейной теплопроводности до настоящего времени не найдены и, в частности, до сих пор не получены точные решения целого ряда краевых задач, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности.

*Целью диссертационной работы* является построение приближенных решений одномерных краевых задач нелинейной теплопроводности и применение этих решений для прогнозирования зон фильтрации газов из подземной полости.

*Методы исследования.* В диссертационной работе использовано сочетание аналитических и численных методов исследования. При формулировке математических моделей использованы законы сохранения. Построение приближенных аналитических решений проводилось в среде аналитических вычислений *MAPLE* с использованием автомо-

---

<sup>5</sup> Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1963. — Vol. 3, No. 4. — P. 703–719.

<sup>6</sup> Волосевич П. П., Леванов Е. И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. — М.: Изд-во МФТИ, 1997. — 240 с.

дельных переменных. При построении интегральных кривых для дифференциальных уравнений использовался метод Рунге—Кутты четвертого порядка. Для численного решения двумерных задач использовался метод переменных направлений с итерациями по коэффициенту теплопроводности.

*В диссертационной работе решены следующие задачи:*

- предложен метод построения приближенных решений первой и второй краевых задач нелинейной теплопроводности при степенной и экспоненциальной зависимостях от времени температуры в начале координат и при нулевом начальном условии;
- получены приближенные решения одномерных задач (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) нелинейной теплопроводности при температуре, заданной в начале координат в виде степенной и экспоненциальной функций и при нулевой начальной температуре среды;
- получены приближенные решения одномерных задач (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) нелинейной теплопроводности при заданном потоке энергии в начале координат в виде степенной и экспоненциальной функций и при нулевой начальной температуре среды;
- получены формулы, описывающие положение и скорость фронта тепловой волны в одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задачах нелинейной теплопроводности при заданной температуре в начале координат (степенная и экспоненциальная функции) и при заданном потоке (степенная и экспоненциальная функции) для нулевой начальной температуры среды;
- получены „инженерные” формулы для описания решений краевых задач нелинейной теплопроводности;

- проведено численное моделирование двумерной задачи фильтрации газа в пористой среде из цилиндрического резервуара, а также сравнение результатов численного моделирования с полученными приближенными решениями задач нелинейной теплопроводности.

*Научная новизна работы.*

- Предложен метод построения приближенных решений краевых задач для уравнения нелинейной теплопроводности при нулевой начальной температуре и при заданной температуре (тепловом потоке) в начале координат;
- Впервые получены приближенные решения плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной задач нелинейной теплопроводности при нулевой начальной температуре и при заданной температуре в начале координат в виде степенной и экспоненциальной функций от времени;
- Впервые получены приближенные решения плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке в начале координат в виде степенной функции от времени и при нулевом начальном условии;
- Определены положение и скорость фронта тепловой волны при заданной температуре в начале координат (плоский и цилиндрически—симметричный случай) и при заданном потоке (плоский, цилиндрически—симметричный и сферически—симметричный случай);
- Показана возможность применения автомодельных решений для оценки параметров газа при его фильтрации в пористой среде из подземного резервуара.

*Обоснованность и достоверность* результатов работы определяется выбором математических моделей, основанных на законах сохранения, а также подтверждается сравнением полученных приближенных решений с результатами численного моделирования процессов, описываемых уравнением нелинейной теплопроводности.

*Апробация работы.* Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- на XXXII международной летней школе-конференции «Advanced problems in Mechanics" АРМ'2004 », Санкт-Петербург, Россия, 24 июня — 1 июля 2004 года;
- на XXXIII международной летней школе-конференции «Advanced problems in Mechanics" АРМ'2005 », Санкт-Петербург, Россия, 28 июня — 5 июля 2005 года;
- на XIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2006» на секции Механико—математического факультета, Москва, Россия, 12 – 15 апреля 2006 года;
- на Научных Сессиях МИФИ в 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 и 2008 годах;
- на семинаре кафедры прикладной математики МИФИ „Современные проблемы математики” в 2005, 2006, 2007 и 2008 годах;

*Практическая значимость работы.* Полученные в диссертационной работе приближенные решения задач нелинейной теплопроводности могут быть использованы для прогнозирования зон загрязнения окружающей среды аэрозольными выбросами и для оценки положения фронта газа при его фильтрации в пористой среде. Полученные решения также могут быть использованы для тестирования программных комплексов, моделирующих процессы нелинейной теплопроводности и фильтрации газа в пористой среде.



*На защиту выносятся:*

- приближенные решения краевых задач нелинейной теплопроводности (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) при заданной температуре на границе в виде степенной и экспоненциальной функций и при нулевой начальной температуре;
- приближенные решения краевых задач нелинейной теплопроводности (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) при заданном потоке тепла в виде степенной и экспоненциальной зависимостей от времени на границе и при нулевой начальной температуре;
- формулы, описывающие зависимость от времени координаты фронта тепловой волны для случаев плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной задач нелинейной теплопроводности при нулевом начальном условии и при степенной и экспоненциальной зависимостях температуры от времени в начале координат;
- формулы для прогнозирования зависимости давления газа от координаты в случае его одномерной (плоской и цилиндрически—симметричной) фильтрации в пористой среде при заданной концентрации газа в начале координат и при нулевом давлении газа в начальный момент времени;
- результаты численного моделирования двумерной задачи фильтрации газа в пористой среде из цилиндрического источника и их сравнение с приближенными решениями задач нелинейной теплопроводности;

*Структура и объем диссертации.* Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, двух приложений, списка литературы. Диссертация содержит 143 машинописных страницы и 23 рисунка. В список литературы включено 117 наименований.

# Краткое содержание работы

Во введении обсуждается актуальность темы исследования, приводится общая характеристика диссертационной работы, а также ее структура, дается краткий обзор литературы по тематике работы.

В первом разделе предложен ряд математических моделей, при описании которых используется нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $T(x, t)$  — температура среды,  $x$  — координата,  $t$  — время,  $n$  — показатель степени ( $n > 0$ ), который характеризует лучистую или электронную теплопроводность среды и  $\varkappa$  — коэффициент, характеризующий тепловой поток.

Приведена математическая модель, описывающая процесс распространения тепла с помощью механизма лучистой теплопроводности. Предлагается вывод уравнения фильтрации газа в пористой среде.

Показано, что уравнение нелинейной теплопроводности может быть использовано при описании течения грунтовых вод.

Предложен вывод системы уравнений, характеризующих процесс распространения выбросов отрицательной плавучести. Без учета инерционных слагаемых эта система уравнений сведена к уравнению нелинейной теплопроводности.

Показано, что течение крови в мелких кровеносных сосудах описывается уравнением нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial S}{\partial t} = A \frac{\partial}{\partial x} \left( S^{\frac{3}{2}} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения сосуда,  $A$  — параметр, характеризующий физические свойства стенки сосуда и окружающих тканей.

Во втором разделе приведены аналитические решения нелинейного уравнения теплопроводности при мгновенном точечном источнике. Рассмотрены случаи плоского, цилиндрически—симметричного и сферически—симметричного распространения тепла. Показано, что

скорость распространения тепла во всех трех случаях конечна. Приведены формулы, описывающие положение и скорость фронта тепловой волны.

Показано, что при стремлении к нулю показателя нелинейности  $n$ , решения нелинейных задач теплопроводности с мгновенным точечным источником переходят в фундаментальные решения линейных задач теплопроводности.

Сформулирована гипотеза о конечной скорости распространения тепла для краевых задач нелинейного уравнения теплопроводности.

В третьем разделе сформулирована постановка и получены приближенные решения одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности при нулевом начальном условии и при заданной температуре в начале координат в виде степенной зависимости от времени.

Постановка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\varkappa}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu u^n \frac{\partial u}{\partial r} \right), & r > 0, & \quad t > 0, \\ u(r=0, t) &= u_0 t^k, & u(r, t=0) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью преобразования

$$u = v^{\frac{1}{n}}$$

краевая задача (3) сведена к задаче

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\varkappa v}{r} v v_r + \varkappa v v_{rr} + \frac{\varkappa}{n} v_r^2, & r > 0, & \quad t > 0, \\ v(r=0, t) &= v_0 t^{nk}, & v(r, t=0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя автомодельные переменные

$$v(r, t) = A t^m f(\theta), \quad \theta = \frac{Br}{t^p}, \quad (5)$$

где  $A, B, m, p$  — величины, зависящие от параметров задачи (3), задачу (4) сведем к краевой задаче для обыкновенного дифференциального

уравнения:

$$\begin{aligned} f f_{\theta\theta} + \frac{1}{n} f_{\theta}^2 + \frac{\nu}{\theta} f f_{\theta} + \frac{m_{\nu} + 1}{2} \theta f_{\theta} - m_{\nu} f &= 0, \\ f(\theta = 0) &= 1, \quad f(\theta \rightarrow \infty) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку в задачах нелинейной теплопроводности при нулевом начальном условии скорость распространения тепла конечна, то существует координата  $\theta = \alpha$  такая, что

$$f(\theta = \alpha) = 0, \quad \frac{df}{d\theta} \neq 0. \quad (7)$$

Решение краевой задачи в этом случае становится обобщенным. Условие (7) соответствует существованию скачка первой производной решения в точке  $\theta = \alpha$ . Предположение (7) позволяет искать решение краевой задачи (6) в виде ряда

$$f(\theta) = \sum_{i=0}^N \beta_i (\alpha - \theta)^i, \quad \theta \leq \alpha. \quad (8)$$

Разработан алгоритм нахождения коэффициентов ряда  $\beta_i$ . При этом, параметр  $\alpha$ , характеризующий координату теплового фронта, определяется из граничного условия краевой задачи (6). Для проведения вычислений в соответствии с разработанным алгоритмом создан комплекс прикладных программ, реализованный в среде аналитических вычислений *MAPLE*.

Приближенные аналитические решения исходных задач нелинейной теплопроводности находятся с учетом полученных решений для  $f(\theta)$  по формуле

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 t^k \left( f \left( x / \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, & 0 \leq x \leq \alpha \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}}; \\ 0, & \alpha \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}} \leq x < \infty. \end{cases} \quad (9)$$

Координата теплового фронта при заданных значениях  $k$  и  $n$  и при

вычисленном значении  $\alpha$  определяется формулой

$$x_* = \alpha \sqrt{\chi u_0^n t^{kn+1}}. \quad (10)$$

Скорость теплового фронта находится по формуле

$$V = \frac{dx_*}{dt} = 0,5 \alpha (kn + 1) \sqrt{\chi u_0^n t^{kn-1}}. \quad (11)$$

Отклонение численного решения краевой задачи (6) с использованием метода Рунге—Кутты четвертого порядка от приближенного аналитического решения, полученного в работе, составляет  $< 0,1\%$  (рис.1).

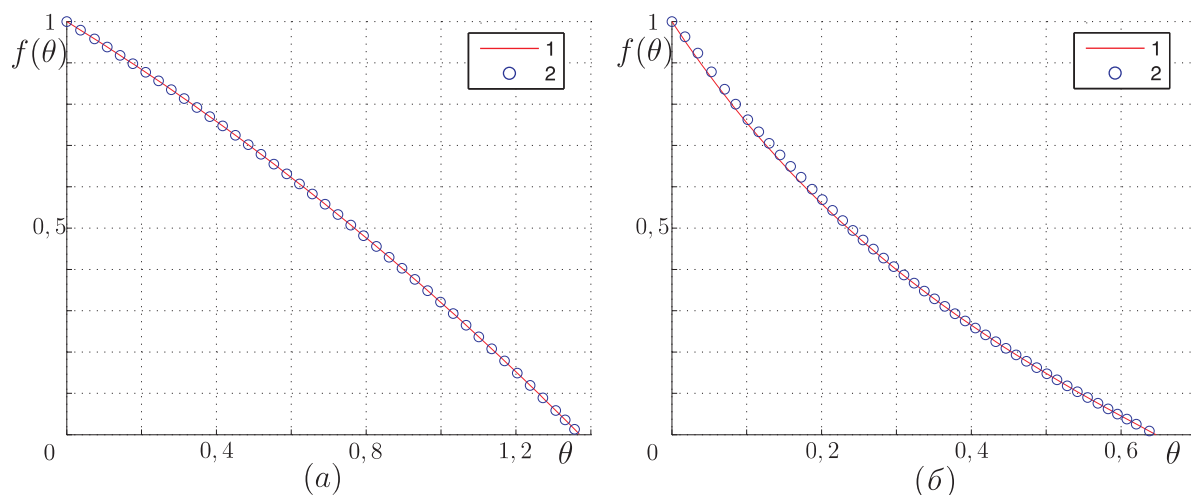


Рис. 1. Сравнение приближенного аналитического решения (8) с численным решением задачи (6) для (а) плоской ( $n = 4/3; k = 1$ ) и (б) цилиндрически—симметричной ( $n = 4/3; k = 0$ ) задач: 1 — приближенное аналитическое решение; 2 — численное решение.

В четвертом разделе сформулирована задача о распространении тепловой волны при нулевой начальной температуре и при заданном потоке энергии в начале координат в виде степенной зависимости от времени. Получены приближенные решения плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричных задач нелинейной теплопроводности. Постановка задачи имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\varkappa}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu u^n \frac{\partial u}{\partial r} \right), & r > 0, & \quad t > 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( r^\nu u^n \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= -q_0 t^k, & u(r, t = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{12}$$

С помощью замены

$$u = v^{\frac{1}{n}},$$

задача (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}v_t &= \frac{\varkappa \nu}{r} v v_r + \varkappa \nu v_{rr} + \frac{\varkappa}{n} v_r^2, & r > 0, & \quad t > 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( r^\nu v^{\frac{1}{n}} \frac{\partial v}{\partial r} \right) &= -q_0 n t^k, & v(r, t = 0) &= 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Используя автомодельные переменные

$$v(r, t) = A t^m f(\theta), \quad \theta = \frac{B r}{t^p}\tag{14}$$

с соответствующими значениями параметров  $A, B, m, p$ , задача (12) сведена к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}f f_{\theta\theta} + \frac{1}{n} f_\theta^2 + \frac{\nu}{\theta} f f_\theta + \frac{m_\nu + 1}{2} \theta f_\theta - m_\nu f &= 0, \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \theta^\nu f^{\frac{1}{n}} \frac{df}{d\theta} \right) &= -1, \quad f(\theta \rightarrow \infty) = 0.\end{aligned}\tag{15}$$

Как и в случае заданной температуры на границе, решение краевой задачи (15) найдено в виде ряда (8) (где  $\alpha$  — граница теплового фронта). Решение плоской задачи ( $\nu = 0$ ) находится по алгоритму, аналогичному краевой задаче (6). В случаях цилиндрически—симметричной ( $\nu = 1$ ) и сферически—симметричной ( $\nu = 2$ ) задач непосредственно из граничного условия найти значение параметра  $\alpha$  не удастся. В этих случаях ( $\nu = 1; 2$ ) решение получено с использованием асимптотиче-

ских разложений при  $\theta \rightarrow 0$  с учетом граничного условия задачи (15):

$$f_0(\theta) = \begin{cases} \left( \frac{n+1}{n} \left( \frac{1}{\nu-1} \theta^{1-\nu} - C \right) \right)^{\frac{n}{n+1}}, & \nu \neq 1; \\ \left( \frac{n+1}{n} \ln \left( \frac{C}{\theta} \right) \right)^{\frac{n}{n+1}}, & \nu = 1; \end{cases} \quad (16)$$

Решения краевых задач при  $\nu = 1; 2$  можно представить в виде

$$f(\theta) = \begin{cases} f_0(\theta), & 0 < \theta < \theta_1; \\ f_S(\theta), & \theta_1 \leq \theta \leq \alpha; \\ 0, & \alpha < \theta; \end{cases} \quad (17)$$

где  $\theta_1$  — значение координаты сращивания асимптотических решений при  $\theta \rightarrow 0$  и при  $\theta \rightarrow \alpha$ . Условие сращивания — равенство значений функции  $f(\theta)$  и теплового потока.

Алгоритм сращивания решений реализован в среде аналитических вычислений *MAPLE*. В качестве критерия выбора решений использовалось условие минимизации меры отклонения полученного приближенного аналитического решения от точного.

Проведено сравнение полученных приближенных аналитических решений задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке на границе (плоская, цилиндрически—симметричная и сферически—симметричная задачи) с численными решениями краевой задачи (15). Для случаев плоской и сферически—симметричной задач результаты сравнения решений приведены на рис. 2.

Найдены формулы (аналогичные (10) и (11)), описывающие временные зависимости координаты теплового фронта для одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности при степенной зависимости от времени потока тепла в начале координат от времени и при нулевой начальной температуре среды.

В пятом разделе найдены „инженерные” формулы для решения одномерных (плоской и цилиндрически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности. Показано, что в широком диапазоне парамет-

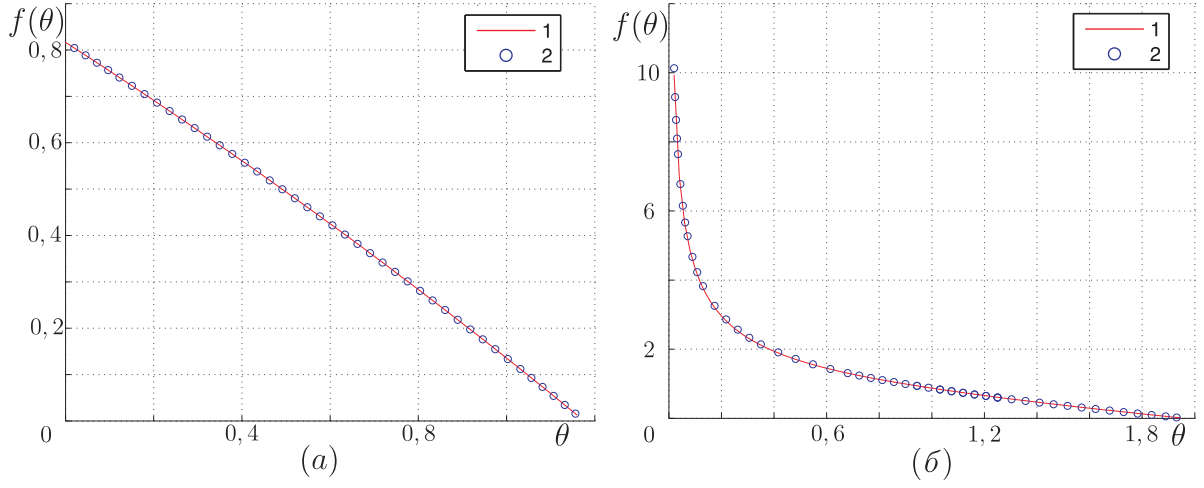


Рис. 2. Сравнение приближенного аналитического решения (17) с численным решением задачи (15) для (а) плоской ( $n = 1; k = 0$ ) и (б) сферически—симметричной ( $n = 1; k = 0$ ) задач: 1 — приближенное аналитическое решение; 2 — численное решение.

ров математической модели решения таких задач выражаются формулами

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\alpha_1 n (nk + 1) (\alpha_1 - \theta) + \frac{1}{4} \frac{n (nk - 1) (\alpha_1 - \theta)^2}{n + 1} \quad (18)$$

(при заданной температуре на границе в виде степенной функции от времени и нулевой начальной температуре);

$$f(\theta) = \alpha_2 n \left( \frac{nk + n + 1}{n + 2} \right) (\alpha_2 - \theta) + \frac{n(nk - 1)}{2(n + 1)(n + 2)} (\alpha_2 - \theta)^2 \quad (19)$$

(при заданном потоке тепла на границе в виде степенной функции от времени и нулевой начальной температуре).

На рис. 3 (а) представлены линии уровня относительного отклонения решения (18) задачи (15) при  $\nu = 0$  от численного решения. Относительное отклонение вычислено для координаты теплового фронта.

На рис. 3 (б) представлены линии уровня относительного отклонения решения (19) задачи (15) при  $\nu = 0$  от численного решения.

Из рис. 3 видно, что в обширном диапазоне значений параметров  $n$  и  $k$  погрешность не превышает 1%, поэтому в качестве приближенных решений задач нелинейной теплопроводности можно использо-



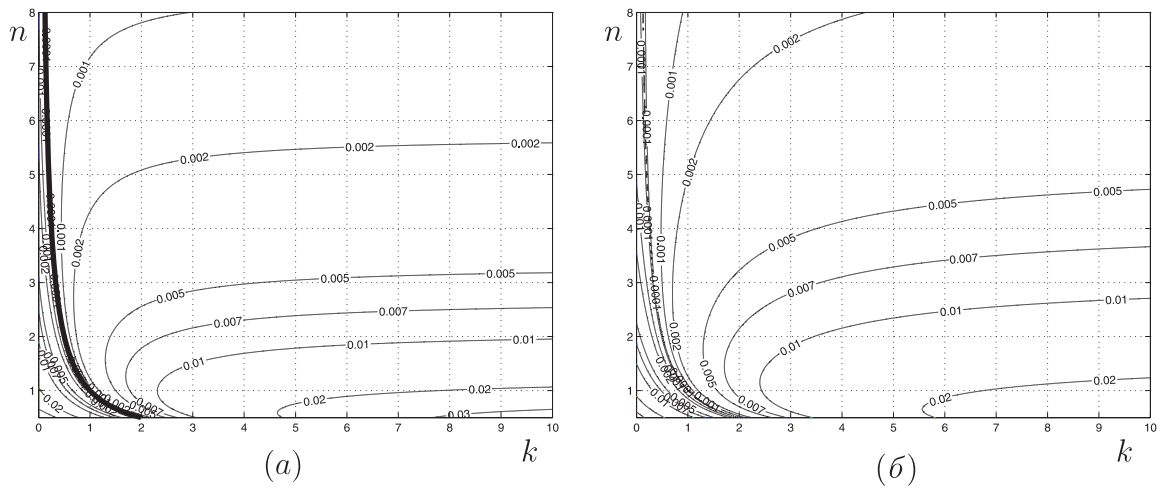


Рис. 3. Линии уровня относительного отклонения (а) решения (18) и (б) (19) в зависимости от значений параметров  $n$  и  $k$  задачи.

вать формулы (18) и (19). Эти формулы будем называть "инженерными".

Зависимости значений параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  от величины  $k$  при фиксированных значениях  $n$  представлены на рис. 4.

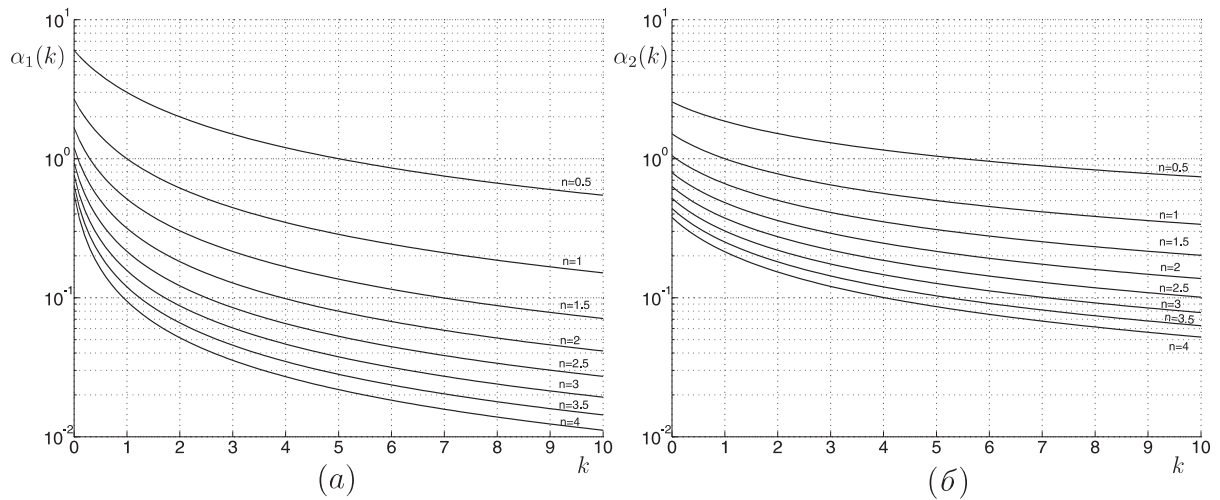


Рис. 4. Значение  $\alpha_1$  (а) и  $\alpha_2$  (б) в зависимости от  $n$  и  $k$ .

Проведено численное моделирование процесса фильтрации газа из подземного резервуара при заданном давлении в резервуаре и при отсутствии газа в пористой среде в начальный момент времени (рис. 5).

Задача, описывающая процесс фильтрации газа в безразмерных

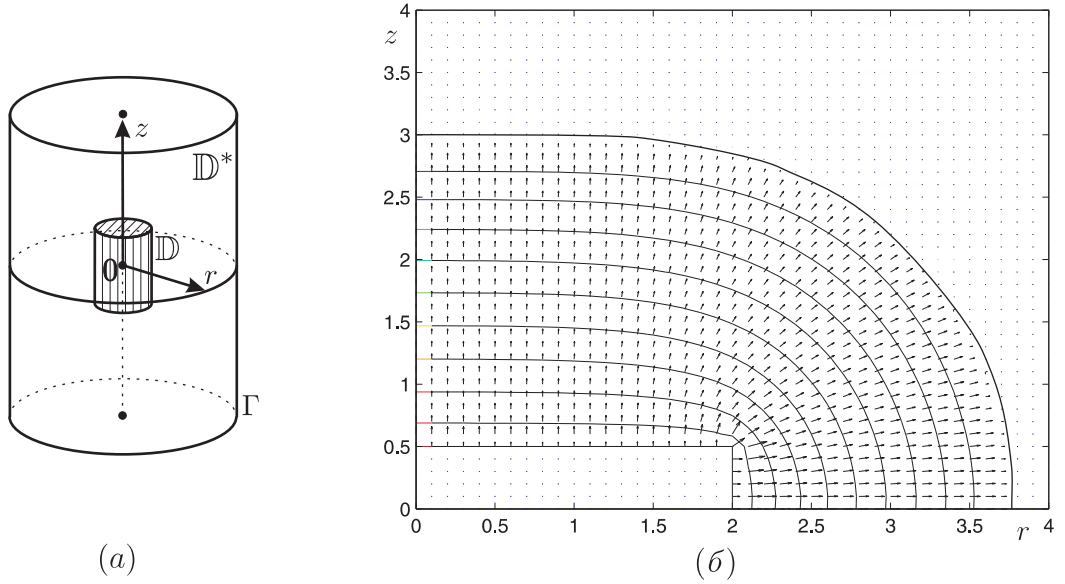


Рис. 5. (а) Схема задачи (20); (б) результаты численного моделирования: линии уровня давления газа (стрелками указано поле скоростей).

переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( u^n \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u^n \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ u(\vec{r} \in \mathbb{D}^*, t = 0) &= 0, \\ u(\vec{r} \in \mathbb{D}, t) &= t^k, \quad u(\vec{r} \in \Gamma, t) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 6(а) и 6(б) представлены результаты сравнения численного решения задачи (20) по оси  $OZ$  и в радиальном направлении с полученными в третьем разделе приближенными аналитическими решениями.

На рис. 6(а) представлены результаты сравнения плотности газа вдоль оси  $OZ$ . Сплошная линия соответствует результатам численного моделирования в безразмерные моменты времени  $t = 0, 5; 1; 1, 5; 2; 2, 5; 3; 3, 5; 4$ . Точками изображены значения плотности, рассчитанные по формуле (18).

На рис. 6(б) представлены результаты сравнения плотности газа в радиальном направлении. Сплошная линия соответствует результатам численного моделирования в моменты времени  $t = 0, 1; 0, 5; 1; 1, 5$ . Точками отмечены значения плотности газа, рассчитанные по приближенной формуле (19).

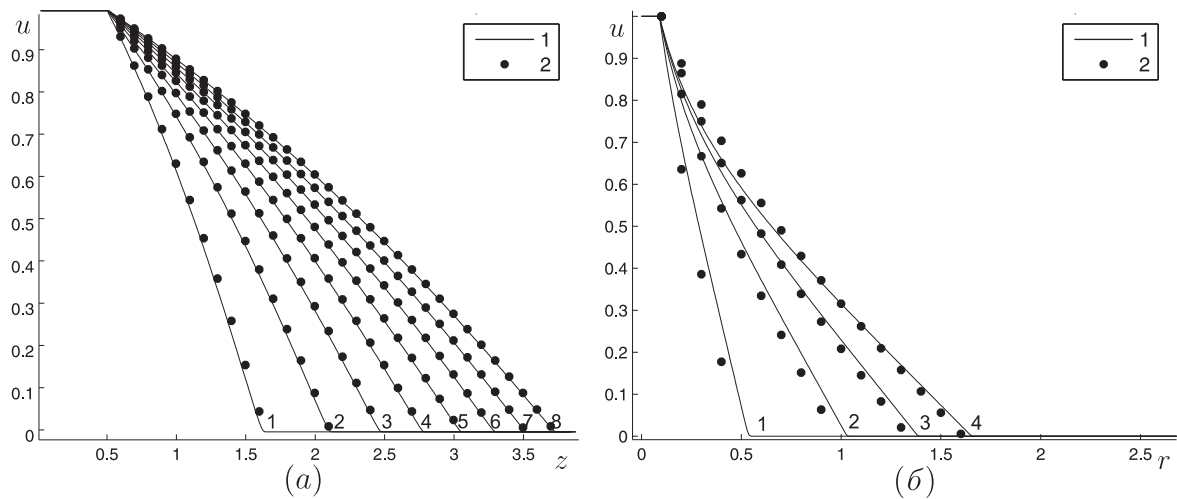


Рис. 6. Сравнение численного решения задачи (20) с приближенными аналитическими решениями: (а) по оси  $OZ$  и (б) по радиальному направлению.

Из рисунка 6 видно, что относительное отклонение данных, полученных с помощью численных методов, и решений, полученных по формулам (18) и (19), составляет не более 1,5% (6(а)) и 9% (6(б)).

Рис. 6(а) и 6(б) иллюстрируют возможность использования приближенных формул, полученных в результате выполнения диссертационной работы, для оценки решений двумерных задач нелинейной теплопроводности. Большая погрешность результатов в радиальном направлении объясняется тем, что цилиндрически—симметричная задача не допускает оператор сдвига в радиальном направлении.

В приложение А вынесено приближенное решение одномерной (плоской) краевой задачи нелинейной теплопроводности для случая начальной нулевой температуры и при заданной экспоненциальной зависимости температуры от времени в начале координат.

Приложение Б содержит приближенные решения одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности при нулевой начальной температуре и при заданном потоке в начале координат в виде экспоненциальной функции от времени.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы:

- Показано, что основным уравнением для описания выбросов отрицательной плавучести и течения крови в мелких кровеносных сосудах является уравнение нелинейной теплопроводности;
- Получены приближенные решения одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности при нулевом начальном условии и при заданной температуре в начале координат в виде степенной и экспоненциальной зависимостей от времени;
- Найдены временные зависимости положения и скорости фронта тепловой волны при заданной температуре на границе в виде степенной и экспоненциальной зависимостей от времени и при нулевой начальной температуре;
- Получены приближенные решения одномерных (плоской, цилиндрически—симметричной и сферически—симметричной) задач нелинейной теплопроводности при нулевом начальном условии и при заданном потоке тепла в начале координат в виде степенной и экспоненциальной зависимостей от времени;
- Получены „инженерные” формулы для описания решений краевых задач нелинейной теплопроводности;
- Показано, что для описания плотности газа при его фильтрации из подземной полости можно использовать приближенные решения полученные в диссертационной работе.

*Результаты диссертационной работы представлены в работах:*

1. Кудряшов Н.А., Чмыхов М.А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007, т.47, №1, с.113-123
2. Кудряшов Н.А., Чмыхов М.А. Приближенные решения первой и второй краевых задач нелинейной теплопроводности на полубесконечной прямой. Инженерная физика. 2007, №3, с.12-15
3. Кудряшов Н.А., Романов Г.С., Чмыхов М.А. Численное моделирование распространения уединенной волны над подводными препятствиями. Инженерно—физический журнал. 2004. Т.77, №4. С. 156-163
4. N.A. Kudryashov, M.A. Chmykhov Analytical solution of the smog propogation. // Proceeding of the XXXII Summer School-Conference "Advanced problems in Mechanics"APM'2004 St.Petersburg: RAS, 2004, p.252-256
5. M.A. Chmykhov, N.A. Kudryashov Approximate solutions of nonlinear heat equation for given flow. // Proceeding of the XXXIII Summer School-Conference "Advanced problems in Mechanics"St.Petersburg: RAS, 2005, p.55-60
6. Чмыхов М.А. Приближенные решения задач распространения выбросов отрицательной плавучести, Материалы XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов—2006». Том I. - М.: Изд-во МГУ, 2006. - 451 с.
7. Чмыхов М.А. Разрушение уединенной волны при прохождении над подводными препятствиями //Науч. сессия МИФИ-2003: Сб. науч. тр. В 14 т. М.: МИФИ, 2003. Т. 7. С. 112-113

8. Чмыхов М.А. Математическое моделирование распространения смога большой плотности //Науч. сессия МИФИ-2004: Сб. науч. тр. В 15 т. М.: МИФИ, 2004. Т. 7. С. 104-105
9. Чмыхов М.А. Аналитическое решение задач распространения выброса отрицательной плавучести //Науч. сессия МИФИ-2005: Сб. науч. тр. В 15 т. М.: МИФИ, 2005. Т. 7. С. 115-116
10. Чмыхов М.А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности //Науч. сессия МИФИ-2006: Сб. науч. тр. В 16 т. М.: МИФИ, 2006. Т. 7. С. 110-111
11. Кудряшов Н.А., Чмыхов М.А. Точность приближенных решений одномерных задач нелинейной теплопроводности //Науч. сессия МИФИ-2007: Сб. науч. тр. В 17 т. М.: МИФИ, 2007. Т. 7. С. 108-109.
12. Кудряшов Н.А., Чмыхов М.А. Применение приближенных решений при численном моделировании двумерных задач нелинейной теплопроводности //Науч. сессия МИФИ-2008: Сб. науч. тр. В 15 т. М.: МИФИ, 2007. Т. 9. С. 75-76.