На правах рукописи

ДЕМИНА МАРИЯ ВЛАДИМИРОВНА

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И ЕГО ВЫСШИХ АНАЛОГОВ

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена в Национальном Исследовательском Ядерном Университете «МИФИ»

Научный руководитель: Заслуженный деятель науки РФ,
Лауреат Государственной премии СССР,
доктор физико-математических наук,
профессор Кудряшов Николай Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Аксенов Александр Васильевич,
Московский Государственный
Университет им. М.В. Ломоносова

доктор физико-математических наук,
профессор
Маймистов Андрей Иванович,
Национальный Исследовательский
Ядерный Университет «МИФИ»

Ведущая организация: Ярославский Государственный Университет
им. П.Г. Демидова

Защита состоится «*16*» *декабря* 2009 г. в *15* часов *00* минут на заседании диссертационного совета Д212.130.09 в Национальном Исследовательском Ядерном Университете «МИФИ» по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31, тел. (495) 324-84-98, (495) 323-92-56

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Национального Исследовательского Ядерного Университета «МИФИ».

Автореферат разослан «___» *ноября* 2009 г.
Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Объектом исследования диссертационной работы являются нелинейные дифференциальные уравнения — источники специальных функций нелинейной математической физики: второе уравнение Пенлеве, его высшие аналоги и ряд других уравнений [1–5]. Особое внимание уделяется изучению асимптотического поведения решений и разработке методов построения точных решений.

Актуальность работы определяется большим количеством математических и физических приложений рассматриваемых уравнений. Построение решений многих прикладных задач связано с интегрированием некоторого дифференциального уравнения или системы таких уравнений. В XVIII веке задача интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения сводилась к представлению общего решения (полного интеграла) через элементарные функции или интегралы от них. В результате возник термин — интегрирование дифференциального уравнения в квадратурах. Однако проинтегрировать в квадратурах удавалось далеко не все дифференциальные уравнения. Это привело к развитию приближенных и качественных методов исследования дифференциальных уравнений. Качественные методы изучают общие свойства интегральных кривых без явного их отыскания. В рамках качественной теории исследуются особые точки интегральных кривых, взаимное расположение кривых семейства, рассматриваются вопросы устойчивости и т. д.

В то же время к решениям дифференциальных уравнений можно подходить с другой точки зрения. В своих работах Коши начал рассматривать решения как функции комплексной переменной. Этот шаг позволял использовать мощные методы теории функций комплексной переменной. Переход в комплексную область оказался весьма продуктивным [6]. В частности, для широкого класса уравнений Коши доказал существование аналитических решений. Правда, результаты Коши носили локальный характер.

В XIX столетии начали активно развиваться теория специальных функций математической физики, теория эллиптических функций. Некоторые ученые задались вопросом: а нельзя ли расширить набор функций, которым оперирует математика. В 1884 году Л. Фукс [7] и А. Пуанкаре [8, 9] предложили искать нелинейные дифференциальные уравнения, общие решения которых определяют новые специальные функции. По существу, задача, поставленная Фуксом и Пуанкаре, состояла из двух подзадач. Первая из них — чисто классификационная — предполагала поиск уравнений, общие решения которых являются функциями в том смысле, что униформизация (разрезы на комплексной плоскости, Римановы поверхности) делает отображение однозначным. В рамках первой подзадачи необходимо исследовать характер особых точек общего решения (критические, некритические; подвижные, неподвижные) и отбирать уравнения с общими решениями без критических подвижных особых точек. Вторая подзадача состояла в выборе уравнений, общие решения которых не выражаются через ранее известные функции.

Среди решений нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, полиномиально зависящих от искомой функции, ее производной и аналитически от независимой переменной, новых функций найти не удалось. И только в начале XX века французский математик П. Пенлеве со своими учениками [10–12], рассматривая достаточно широкий класс дифференциальных уравнений второго порядка, нашел шесть уравнений с общими решениями, определяющими новые нелинейные специальные функции. Эти уравнения называют уравнениями Пенлеве, а их общие решения — трансцендентами Пенлеве. Большое количество работ посвящено изучению свойств уравнений Пенлеве и их общих решений: исследуются асимптотические и групповые свойства, строятся преобразования Бэклунда, пары Лакса, рациональные, алгебраические и функциональные точные решения, дискретные аналоги уравнений и т. д.

Классификационная работа на уравнениях второго порядка не закончилась. Среди уравнений четвертого и более высоких порядков были найдены хорошие кандидаты на роль уравнений, определяющих новые специальные функции. Такие уравнения называют высшими аналогами уравнений Пенлеве. К сожалению, с ростом степени и порядка рассматриваемого уравнения возрастает и сложность вычислений.

В 70–ые годы XX века М. Абловиц, А. Рамани и Х. Сигур обнаружили интересную связь между интегрируемыми дифференциальными уравнениями в частных производных и обыкновенными дифференциальными уравнениями, общие решения которых не имеют критических подвижных особых точек [13,14]. Отсутствие критических подвижных особых точек в общем решении дифференциального уравнения называют свойством Пенлеве. Оказалось, что обыкновенные дифференциальные уравнения, возникающие как редукции уравнений в частных производных, к которым применим метод обратной задачи рассеяния, имеют свойство Пенлеве. Это был еще один способ строить уравнения со свойством Пенлеве. Однако, утверждение Абловица, Рамани и Сигура скорее гипотеза, чем доказанный факт, поэтому строгая проверка наличия у уравнения свойства Пенлеве требует дополнительного исследования.

В дальнейшем уравнения Пенлеве стали появляться в различных областях математики и физики: в теории чисел [15] и теории ортогональных многочленов [16], нелинейной оптике [17], теории относительности [18], физике плазмы [19–21], статистической механике и теории квантовой гравитации [22–24] и т. п. Также, целый ряд нелинейных эволюционных уравнений имеет решения, выражаемые через трансценденты Пенлеве [2,4]. Среди этих уравнений уравнения Кортевега – де Вриза, Кадомцева — Петвиашвили, Буссинеска, нелинейное уравнение Шредингера и т. д.

Таким образом, трансценденты Пенлеве играют ту же роль для нелинейной математики и физики, что и классические специальные функции для линейных теорий. Введение в рассмотрение специальных функций, определяемых нелинейными дифференциальными уравнениями, позволило считать разрешимыми большое количество ранее нерешенных прикладных задач.

В то время как уравнениям Пенлеве посвящено много работ, их высшим аналогам и другим нелинейным уравнениям со свойством Пенлеве не уделено достаточно внимания. Тем не менее, эти уравнения также встречаются при описании физических процессов и явлений. Кроме того, среди них могут быть уравнения, общие решения которых определяют новые специальные функции. Все это делает актуальной задачу изучения свойств таких уравнений.

Целью диссертационной работы является исследование свойств решений высших аналогов второго уравнения Пенлеве.

Методика исследования. В диссертационной работе использовались аналитические методы исследования. Для получения асимптотических разложений решений применялись методы Пенлеве – анализа и степенной геометрии. При построении специальных и рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений, а также исследовании их свойств использовались методы аналитической теории дифференциальных уравнений и комплексного анализа. Проведение сложных аналитических вычислений и визуализация полученных результатов осуществлялись с помощью вычислительных систем Maple и Matlab.

В диссертационной работе решались следующие задачи:

1. Изучить асимптотическое поведение решений высших аналогов второго уравнений Пенлеве.

2. Построить точные решения высших аналогов и неинтегрируемых обобщений уравнений Пенлеве.

3. Классифицировать рациональные решения обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

4. Изучить свойства специальных полиномов, связанных с рациональными решениями высших аналогов второго уравнения Пенлеве.

Научная новизна работы. Впервые найдены асимптотики и асимптотические разложения решений всех представителей иерархии второго уравнений Пенлеве.

Предложен новый метод построения точных решений нелинейных дифференциальных разложений. Метод основан на использовании информации об асимптотическом поведении решений дифференциального уравнения. С помощью предложенного метода найдено несколько новых точных решений ряда обобщений уравнений Пенлеве.

Впервые получены необходимые и достаточные условия существования рациональных решений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Предложено представление рациональных решений через логарифмическую производную специальных полиномов (обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева).

Показано, что корни обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева регулярным образом располагаются на комплексной плоскости.

Впервые найдено дифференциально — разностное соотношение, позволяющее последовательно строить обобщенные полиномы Яблонского — Воробьева.

Получены новые иерархии дифференциальных уравнений, связанные преобразованиями Бэклунда с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве. В частности, впервые построены иерархии обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют обобщенные полиномы Яблонского — Воробьева.

Найдены новые алгебраические соотношения для корней полиномов Яблонского — Воробьева и некоторых других семейств полиномов.

Обоснованность и достоверность результатов работы подтверждены тем, что, во-первых, они базируются на строгих, логически выверенных посылках; во-вторых, корректно применен математический аппарат; в–третьих, проведены анализ и сравнение с известными результатами исследований других авторов, работающих в этой области. Кроме того, в качестве обоснования результатов выступают публикации в реферируемых журналах и выступления на научных семинарах.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Continuous and discrete Painlevé equations”, Финляндия, Турку, 25–28 марта 2006 года.

2. Международная конференция “Nonlinear evolution equations and dynamical systems”, Испания, Л’Аметлла де Мар, 17–23 июня 2007 года.

3. Международная конференция “Анализ и особенности”, посвященная 70–летию Владимира Игоревича Арнольда, Россия, Москва, 20–24 августа 2007 года.

4. Ежегодная “Научная сессия МИФИ”, Россия, Москва, январь 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 годов.

5. Семинар кафедры прикладной математики Московского Инженерно–физического института (Государственного университета) “Проблемы современной математики”.

Практическая значимость работы. Асимптотические и точные решения рассматриваемых в работе уравнений могут быть использованы при проверке результатов численного моделирования прикладных задач, в математическом описании которых встречаются эти уравнения. Метод многоугольников Ньютона, предложенный в диссертационной работе, может использоваться для построения точных решений большого количества нелинейных дифференциальных уравнений. Подход, с помощью которого в работе строились и исследовались свойства обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева, применим к некоторым другим семействам специальных полиномов. Связь между обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве и иерархией модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза позволяет находить решения вышеперечисленных уравнений в частных производных.

На защиту выносятся:

1. результаты анализа асимптотического поведения решений высших аналогов второго уравнения Пенлеве;
2. метод многоугольников Ньютона для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений;
3. точные решения высших аналогов и неинтегрируемых обобщений уравнений Пенлеве;
4. рациональные решения обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве, представление рациональных решений через специальные полиномы;
5. дифференциально – разностные соотношения и обыкновенные дифференциальные уравнения для обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева;
6. иерархии дифференциальных уравнений, связанные с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве;
7. результаты исследования свойств нулей обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева и некоторых других специальных полиномов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, заключения, приложения, списка литературы. Диссертация содержит 160 машинописных страниц и 24 рисунка. В список литературы включено 111 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении обсуждается актуальность темы исследования, приводится общая характеристика диссертационной работы, а также ее структура, дается краткий обзор литературы по тематике работы.

В первом разделе рассматриваются физико–математические модели, в которых встречаются уравнения Пенлеве и их высшие аналоги.

В частности, приводится подробная постановка задачи о сферическом измерительном зонде в плазме. Кроме того, показывается что второе уравнение Пенлеве возникает при описании электрического поля в полупроводнике. Дается краткий обзор основных свойств уравнений Пенлеве. Далее в первом разделе с использованием групповых свойств иерархии модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза приводится вывод обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве, $N^{\text{ый}}$ представитель этой иерархии является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2N$ и содержит $N+1$ параметров

$$P_2^{(N)}[\alpha_N, t_1, \ldots, t_N]: \quad \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) R_N[w_z - w^2] - zw - \alpha_N = 0. \quad (1)$$

В этом соотношении выражение $R_N[w_z - w^2]$ определяется равенством

$$R_N[w_z - w^2] \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{N} t_k L_k[w_z - w^2], \quad (2)$$

где $L_k[y]$, $y \stackrel{def}{=} w_z - w^2$ — оператор Ленарда, который задается рекуррентной формулой

$$L_{k+1}[y] = (\partial_z^3 + 4y\partial_z + 2y_z)L_k[y], \quad L_0[y] = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

При $N = 1$, $t_1 = 1$ уравнение (1) становится вторым уравнением Пенлеве

$$w_{zz} - 2w^3 - zw - \alpha_1 = 0. \quad (4)$$

В первом разделе показывается, что уравнение Кортевега – де Вриза (KdV), модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (mKdV)

$$\begin{aligned} &\mathrm{KdV}: \quad u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \\ &\mathrm{mKdV}: \quad u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и уравнения их иерархий имеют решения, выражаемые через решения обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Второй раздел посвящен исследованию асимптотического поведения решений высших аналогов второго уравнения Пенлеве в окрестности различных точек комплексной плоскости. В начале раздела изложены методы Пенлеве – анализа и степенной геометрии [25,26], используемые для проведения асимптотического анализа решений нелинейных дифференциальных уравнений. Строятся многоугольники Ньютона иерархии второго уравнения Пенлеве и обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве (см. рисунок 1). Затем на примере иерархии второго уравнения Пенлеве ищутся степенные и нестепенные асимптотики, степенные (степенно–логарифмические) разложения решений в окрестности нуля, бесконечности и произвольной точки $z_0 \neq 0$. Также во втором разделе исследуются вопросы, связанные с проверкой уравнений иерархии на наличие свойства Пенлеве.

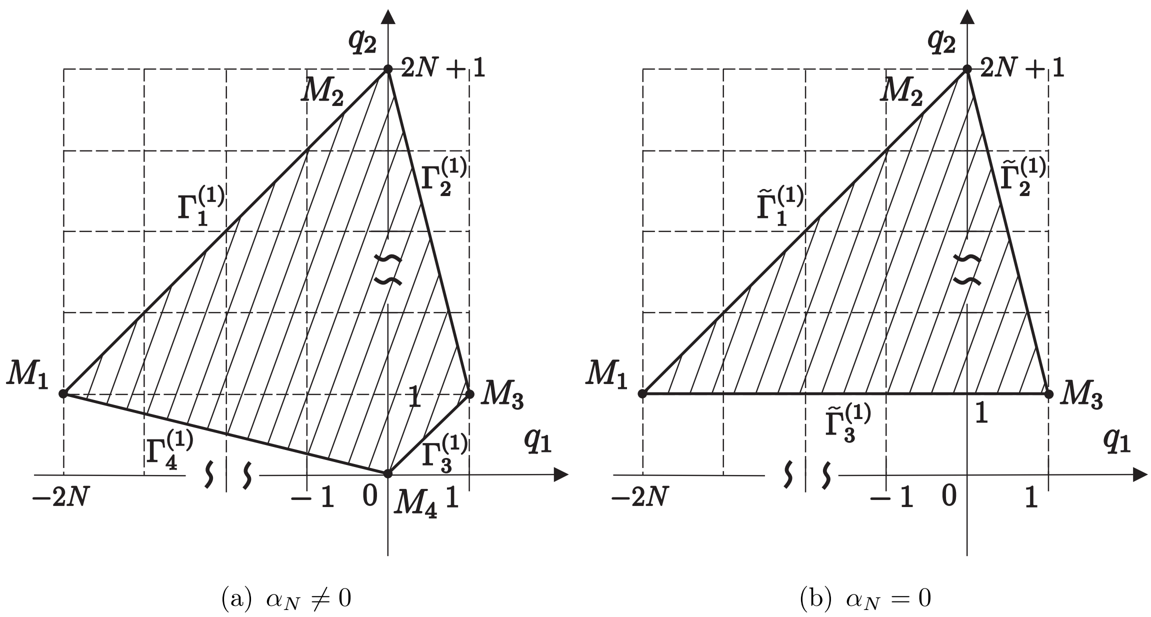


Рис. 1. Многоугольник уравнения (1).

Третий раздел посвящен задаче построения точных решений уравнений Пенлеве, их высших аналогов и обобщений. В начале раздела дается обзор методов нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Далее подробно разбирается алгоритм метода многоугольников Ньютона, приводятся примеры применения метода. В частности, рассматриваются уравнения Пенлеве, их высшие аналоги и неинтегрируемые обобщения. Строятся семейства специальных решений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Будем искать точные решения некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка N

$$E_N[z, w(z)] = 0, \tag{6}$$

здесь выражение $E_N[z, w(z)]$ полиномиально зависит от независимой переменной z, функции $w(z)$ и ее производных. Предположим, что искомое точное решение одновременно является решением еще одного дифференциального уравнения меньшего порядка. Такое уравнение называют простейшим уравнением [27–29]. Алгоритм метода многоугольников Ньютона можно разбить на несколько шагов. На *первом шаге* строится многоугольник Ньютона L_1, соответствующий изучаемому уравнению. На *втором шаге* выбирается многоугольник Ньютона L_2 для простейшего уравнения в соответствии со следующим правилом: все или некоторая часть ребер многоугольника L_2 должны быть параллельны соответствующим ребрам многоугольника L_1. Кроме того, многоугольник L_2 должен задавать уравнения, порядок которых меньше N. На *третьем шаге* выписывается дифференциальное уравнение для многоугольника L_2, т.е. простейшее уравнение

$$M_j[z, w(z); \{A_k\}] = 0, \quad j < N. \tag{7}$$

Заметим, что многоугольник не определяет дифференциальное уравнение единственным образом. Коэффициенты $\{A_k\}$ простейшего уравнения находятся на *четвертом шаге*, подстановкой уравнения (7), разрешенного относительно старшей производной, в исходное уравнение необходимое число раз и приравниванием нулю выражений при различных степенях функции $w(z)$, ее производных до порядка $j-1$ включительно и независимой переменной z. Если простейшее уравнение (7) не разрешимо относительно старшей производной, то необходимо рассмотреть условия совместности уравнений (6) и (7), в результате возникнут алгебраические соотношения для определения коэффициентов простейшего уравнения. Отметим, что при решении алгебраической

Таблица 1. Схема метода многоугольников Ньютона

Шаг 1	Построение многоугольника, соответствующего исходному уравнению	L_1
Шаг 2	Построение многоугольника, соответствующего простейшему уравнению	L_2
Шаг 3	Выбор простейшего уравнения	$M_j[z, w(z); \{A_k\}] = 0$
Шаг 4	Определение коэффициентов простейшего уравнения	$\{A_k\}$

системы уравнений довольно часто возникают условия существования искомого точного решения, которые даются соотношениями, связывающими параметры исходного уравнения. В Таблице 1 кратко изложена схема метода многоугольников Ньютона.

Метод многоугольников Ньютона может быть использован для поиска точных решений как интегрируемых дифференциальных уравнений, таких как уравнения Пенлеве, так и неинтегрируемых. Кроме того, рассматриваемый метод применим и к уравнениям $E_N[z, w(z)] = 0$, где $E_N[z, w(z)]$ – выражение, в которое независимая переменная z, функция $w(z)$ и ее производные могут входить в произвольных вещественных степенях. Этот факт является большим достоинством метода многоугольников, поскольку другие методы, как правило, не позволяют непосредственно строить решения таких уравнений. Метод многоугольников Ньютона обобщает целый ряд методов поиска точных решений. Это такие методы, как метод гиперболических и эллиптических функций, метод подстановок, метод простейших уравнений. Большое достижение состоит в том, что простейшее уравнение не является априорно заданным, а определяется с учетом перечисленных выше соображений. В то же время метод нагляден и прост в применении.

В качестве одного из примеров в диссертационной работе строятся точные решения нелинейного дифференциального уравнения

$$w_{zz} - 2w^{2k+1} - zw^k - \alpha = 0, \quad k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Это уравнение можно рассматривать как неинтегрируемое обобщение второго уравнения Пенлеве. Многоугольник L_1, соответствующий уравнению (8) при $\alpha \neq 0$, $k \neq -1/2$, — это трапеция, с вершинами $Q_1 = (-2, 1)$, $Q_2 = (0, 2k+1)$, $Q_3 = (1, k)$, $Q_4 = (0, 0)$. В качестве многоугольника L_2 для простейшего уравнения был выбран треугольник, изображенный на рисунке 2. Координаты вершин треугольника имеют вид $M_1 = (-1, 1)$, $M_2 = (0, k+1)$, $M_3 = (1, 0)$. Простейшее уравнение можно записать следующим образом

$$w_z - Aw^{k+1} - Bz = 0. \tag{9}$$

Соотношение (9) позволяет исключить из уравнения (8) производную. Коэффициенты A и B находятся приравниванием нулю в получившемся равенстве выражений при w^{2k+1}, zw^k, w^0:

$$A = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad B = \left(\frac{1}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Неинтегрируемое обобщение второго уравнения Пенлеве (8) имеет точные решения, являющиеся одновременно решениями уравнения (9), если выполнено условие $\alpha = (2(k+1))^{-1/2}$, при этом $k \neq -1$, $k \neq -1/2$.

Заметим, что уравнение (8) при $k \neq -1/2$ позволяет строить автомодельные решения неинтегрируемого обобщения модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза

$$(v^k)_t - 2(v^{2k+1})_x + v_{xxx} = 0, \quad k \neq 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Если функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению (8) при $k \neq -1/2$, то уравнение (11) имеет решения вида

$$v(x,t) = \varphi(t)w(z), \quad z = x\psi(t), \tag{12}$$

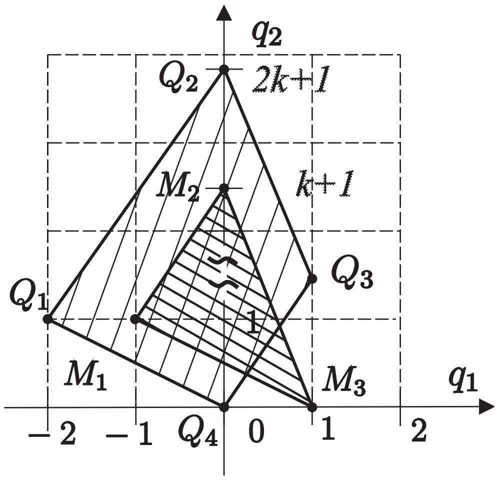


Рис. 2. Многоугольники уравнений (8) и (9)

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ выглядят следующим образом

$$\varphi(t) = \left(\frac{2k+1}{k}t\right)^{-\frac{1}{2k+1}}, \quad \psi(t) = \left(\frac{2k+1}{k}t\right)^{-\frac{k}{2k+1}}. \qquad (13)$$

Далее в третьем разделе рассматриваются вопросы существования у автономных нелинейных дифференциальных уравнений мероморфных решений, предлагается алгоритм построения таких решений.

Четвертый раздел посвящен исследованию свойств рациональных решений высших аналогов второго уравнения Пенлеве. Приводится вывод преобразований Бэклунда, связывающих решения уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве при различных значениях параметров. Пусть $w(z;\alpha_N)$ — решение уравнения (1) при фиксированных значениях параметров t_1, …, t_N, тогда справедливы равенства

$$w(z;-\alpha_N) = -w, \quad w \stackrel{def}{=} w(z;\alpha_N), \qquad (14)$$

$$w(z;\alpha_N \pm 1) = -w + \frac{2\alpha_N \pm 1}{2R_N[\mp w_z - w^2] - z}, \; w \stackrel{def}{=} w(z;\alpha_N). \qquad (15)$$

Соотношение (15) получено в предположении, что выражения, стоящие в знаменателе, в ноль не обращаются, т.е. $2R_N[\mp w_z - w^2] - z \neq 0$. Это соотношение определяет преобразования Бэклунда между решениями $w(z;\alpha_N)$, $w(z;\alpha_N \pm 1)$ $N^{\text{ого}}$ представителя рассматриваемой иерархии дифференциальных уравнений.

Получено доказательство теоремы, дающей необходимые и достаточные условия существования рациональных решений у обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Теорема 1. *Уравнение $P_2^{(N)}[\alpha_N, t_1, \ldots, t_N]$ имеет рациональные решения тогда и только тогда, когда $\alpha_N \in \mathbb{Z}$. При фиксированных значениях параметров $t_1, \ldots, t_N$ и выполнении условия $\alpha_N = n \in \mathbb{Z}$ рациональное решение единственно.*

Рассматривается общий вид рационального решения. С помощью асимптотического анализа решений уравнений иерархии показано, что рациональное решение $w^{(N)}(z;n)$ имеет вид

$$w^{(N)}(z;n) = \sum_{l=1}^{N} \left[\sum_{j=1}^{n_l} \frac{l}{z - z_{l,j}} - \sum_{j=1}^{n_{-l}} \frac{l}{z - z_{-l,j}} \right], \tag{16}$$

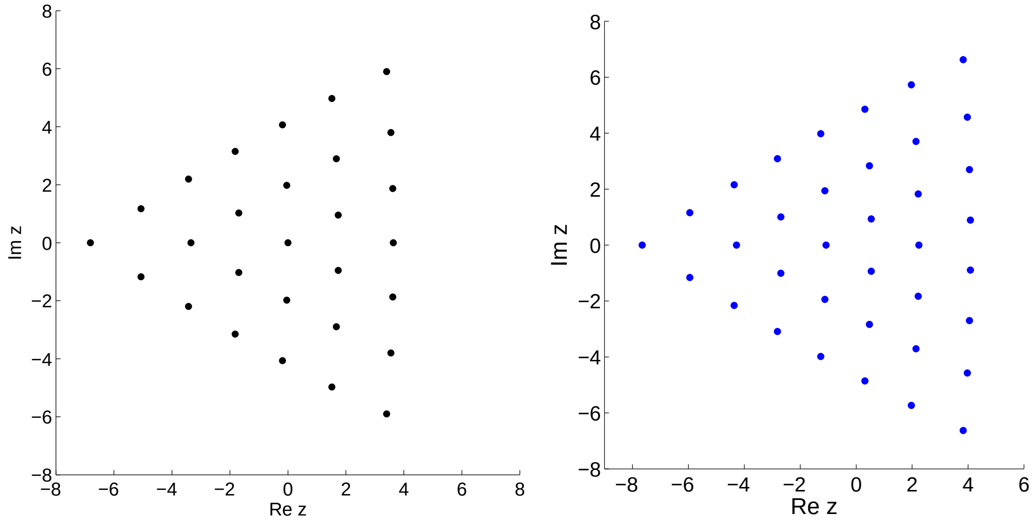
где $z_{l,j}$ $(j = 1 \ldots n_l)$ и $z_{-l,j}$ $(j = 1 \ldots n_{-l})$ — полюса рационального решения с вычетами l и $-l$ соответственно.

Далее в четвертом разделе предложено представление рациональных решений через логарифмическую производную специальных полиномов, так называемых, обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева.

Теорема 2. *Рациональные решения $N^{ого}$ уравнения обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве выражаются через логарифмическую производную специальных полиномов из семейства $\{V_n^{(N)}(z; t_1, \ldots, t_N)\}$, т. е. справедливо равенство*

$$w(z;n) = \frac{d}{dz} \ln \frac{V_{n-1}}{V_n}, \quad V_n \stackrel{def}{=} V_n^{(N)}(z; t_1, \ldots, t_N), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

В конце раздела подробно рассматриваются свойства рациональных решений отдельных представителей обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. Показывается, что рациональные решения изучаемых уравнений и связанные с ними специальные полиномы могут быть построены с помощью асимптотических разложений решений



(a) полином $V_7^{(1)}(z;1)$ (b) полином $V_8^{(1)}(z;1)$

Рис. 3. Корни обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева.

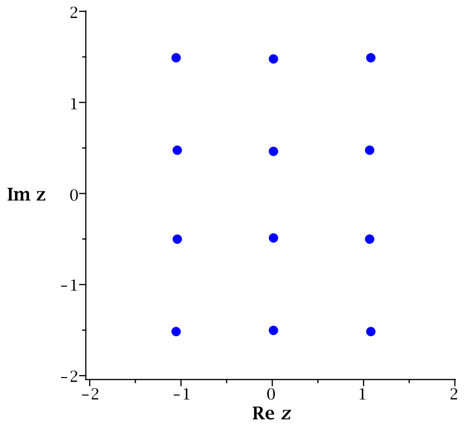
в окрестности бесконечности. Данный подход также применим к рациональным решениям и специальным полиномам некоторых других нелинейных дифференциальных уравнений.

Пятый раздел посвящен изучению свойств обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева. В разделе выводятся дифференциально — разностные рекуррентные формулы для полиномов. Одна из полученных формул позволяет последовательно находить каждый полином

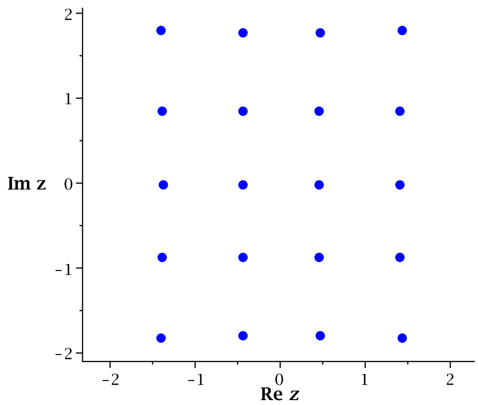
$$V_{n+1}^{(N)}\,V_{n-1}^{(N)} = (V_n^{(N)})^2 \left\{ z - 2\,R_N \left[2\,\frac{d^2}{dz^2}\left(\ln V_n^{(N)}\right)\right]\right\}. \tag{18}$$

Далее строятся иерархии дифференциальных уравнений, связанные преобразованиями Бэклунда с обобщенной иерархией второго уравнения Пенлеве. В частности, приводится вывод иерархии дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют обобщенные полиномы Яблонского — Воробьева. Ее $N^{\text{ый}}$ представитель, имеющий порядок $2N+2$, выглядит следующим образом

$$\tilde{R}_{N+1}\left[2\frac{d^2}{dz^2}\ln q\right] - 2\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\ln q\right) = 0, \tag{19}$$



(a) полином $H_{3,4}(z)$



(b) полином $H_{4,5}(z)$

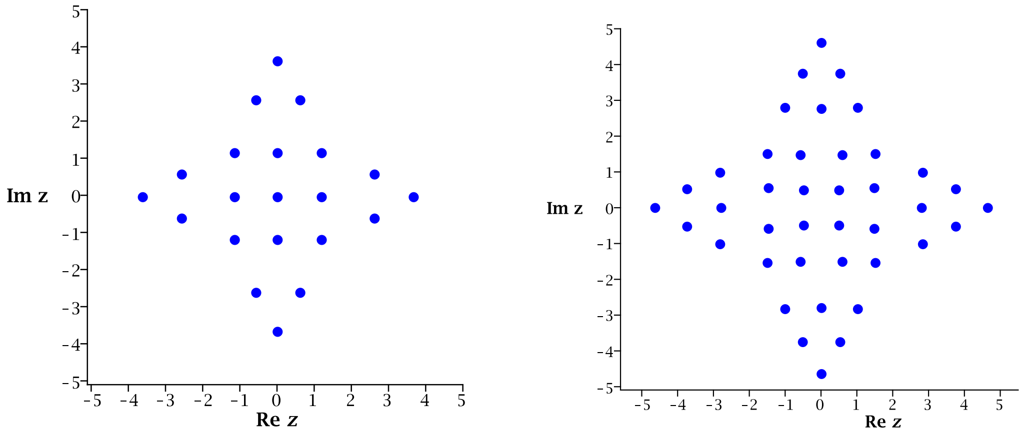
Рис. 4. Корни обобщенных полиномов Эрмита.

где введено обозначение

$$\tilde{R}_{N+1}[y] \overset{def}{=} \sum_{m=1}^{N} t_m \, L_{m+1}\,[y]\,. \tag{20}$$

Изучаются свойства нулей обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева. Выводятся алгебраические соотношения для корней полиномов и полюсов рациональных решений. Приводится электростатическая интерпретация некоторых из полученных соотношений. Кроме того, подход, использованный для получения алгебраических соотношений, применяется при построении аналогичных соотношения для корней обобщенных полиномов Эрмита $\{H_{m,n}(z)\}$ и Окамото $\{Q_{m,n}(z)\}$. В качестве примера, приведем по одному из полученных соотношений для рассматриваемых полиномов

$$\begin{aligned}
&\{V_n^{(1)}(z;1)\}: \quad \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n(n+1)/2} \frac{1}{(z_i-z_j)^2} + \frac{z_j}{12} = 0;\\
&\{H_{m,n}(z)\}: \quad \sum_{i=1,\, i\neq j}^{nm} \frac{1}{(z_i-z_j)^2} + \frac{z_j^2}{3} + \frac{2\,(n-m)}{3} = 0; \\
&\{Q_{m,n}(z)\}: \quad \sum_{i=1,\, i\neq j}^{m^2+n^2+mn-m-n} \frac{1}{(z_i-z_j)^2} - \frac{z_j^2}{9} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$



(a) полином $Q_{3,3}(z)$ (b) полином $Q_{4,4}(z)$

Рис. 5. Корни обобщенных полиномов Окамото.

В пятом разделе исследуется расположение корней обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева на комплексной плоскости. В качестве примера строятся корни некоторых представителей обобщенных полиномов Яблонского — Воробьева, а также обобщенных полиномов Окамото и Эрмита (см. рисунки 3, 4, 5). Показывается, что корни рассматриваемых полиномов регулярным образом располагаются на комплексной плоскости. В частности, корни обобщенных полиномов Яблонского – Воробьева $\{V_n^{(1)}(z;1)\}$ имеют приближенно треугольную структуру (см. рисунок 3). Далее в пятом разделе подробно рассматриваются полиномы Яблонского — Воробьева для первых уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве. Дается вывод формул для коэффициентов полиномов и сумм степеней их корней.

В *приложение* вынесены вопросы, связанные с построением экспоненциальных добавок к асимптотическим разложениям. Строятся добавки к разложениям решений уравнений иерархии второго уравнений Пенлеве.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие результаты:

- построены асимптотики и асимптотические разложения решений уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве в окрестности нуля, бесконечности и точки $z = z_0$;

- предложен метод построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, с помощью которого найдены точные решения высших аналогов и неинтегрируемых обобщений уравнений Пенлеве;
- разработан алгоритм нахождения мероморфных решений автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений;
- показано, что уравнение Кортевега — де Вриза, модифицированное уравнение Кортевега — де Вриза и уравнения их иерархий имеют решения, выражаемые через решения обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве;
- найдены необходимые и достаточные условия существования рациональных решений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве, получен общий вид рациональных решений;
- предложено представление рациональных решений через специальные полиномы (обобщенные полиномы Яблонского – Воробьева);
- найдены обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциально–разностные соотношения, которым удовлетворяют обобщенные полиномы Яблонского – Воробьева, полученные соотношения позволяет рекуррентно строить полиномы;
- показано, что корни обобщенных полиномов Яблонского – Воробьева регулярным образом располагаются на комплексной плоскости;
- получены формулы для коэффициентов полиномов Яблонского – Воробьева и алгебраические соотношения, которым удовлетворяют корни полиномов и полюса рациональных решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Список литературы

1. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.

2. *Gromak V.I., Laine I. and Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2002. – 304 p.

3. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. – Минск: Университетское, 1990 – 160 с.

4. *The Painlevé Property, One Century Later* / Ed. by R. Conte. – CRM series in Mathematical Physics. – Berlin, Springer–Verlag, 1999. – 810 p.

5. *Clarkson P.A.*, Painlevé equations — non-linear Special Functions / Ed. by F. Marcellan and W. van Assche. – Orthogonal Polynomials and Special Functions: Computation and Application. – Berlin, Springer–Verlag, 2006. – Vol. 1883. – P. 331–411.

6. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – Москва: Гостехиздат, 1941 – 398 с.

7. *Fuchs L.* Über differentialgleichungen deren intégrale feste verzweigungspunkte besitzen // Sitz. Acad. Wiss, Berlin. – 1884. – P. 669–720.

8. *Poincaré H.* Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta Math. – 1886. – Vol. 8. – P. 295-–344.

9. *Poincaré H.* Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires // Acta Math. – 1887. – Vol. 10. – P. 310-–312.

10. *Painlevé P.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm. – Paris. – 1897.

11. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bull. Soc. Math. France. – 1900. – Vol. 28. – P. 201–261.

12. *Painlevé P.* Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur, dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1–86.

13. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

14. *Ablovitz M.J., Ramani A., Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary diferential equations of Painlevé type. II // J. Math. Phys. 1980. – Vol. 21. – P. 1006–1015.

15. *Montgomery H.L.* The pair correlation of zeros of the zeta function / Ed by H. G. Diamond. – Analytic Number Theory. – Providence, RI: Amer. Math. Soc. – Proc. Sympos. Pure Math., 1973. – P. 181–193.

16. *Magnus A.P.* Painlevé–type differential equations for the recurrence coefficients of semi–classical orthogonal polynomials // J. Comp. Appl. Math. – 1995. – Vol. 57. – P. 215–237.

17. *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1991. – 328 с.

18. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatterig. – Cambridge University Press, 1991. – 358 p.

19. *De Boer P.C.T., Ludford L.S.S.* Spherical electric probe in a continuum gas // Plasm. Phys. – 1975. – Vol. 17. – P. 29–43.

20. *Kashevarov A.V.* The Second Painlevé Equation in the Electrostatic–Probe Theory: Numerical Solutions // Comp. Math. and Math. Phys. – 1998. – Vol. 38, No. 6. – P. 950-–958.

21. *Кашеваров А.В.* Второе уравнение Пенлеве в теории электрического зонда. Численные решения в случае неполного поглощения

заряженных частиц поверхностью // Ж. тех. физ. – 2004. – Т. 74, вып. 1. – С. 1–9.

22. *Wu T.T., McCoy B.M., Tracy C.A. Barouch E.* Spin–spin correlation functions of the two–dimentional Ising model: Exact theory in the scaling region // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 13. – P. 316–374.

23. *Brezin E., Kazakov V.A.* Exactly solvable field theories of closed strings // Phys. Lett. B. – 1990. – Vol. 236. – P. 144–150.

24. *Gross D.I., Migdal A.A.* Nonperturbative two–dimentional quantum graviti // Phys. Rev. Lett. – 1990. – Vol. 64. – P. 127–130.

25. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. – М.: Наука, Физматлит, 1998. – 288 с.

26. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. – 2004. – Т. 59, вып. 3. – С. 31–80.

27. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. – 2005. – Vol. 24. P. 1217-–1231.

28. *Kudryashov N.A.* Exact solutions of generalized Kuramoto–Sivashinsky equation // Phys. Lett. A. – 1990. – Vol. 147, No. 5–6. – P. 287–291.

29. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. – М: МИФИ, 2008. – 352 с.

Основные результаты диссертации представлены в работах:

1. Demina M.V., Kudryashov N.A. Power and non–power expansions of the solutions for the fourth-order analogue to the second Painlevé equation // Chaos, Solitons and Fractals. – 2007. – Vol. 32, No. 1. – P. 124–144.

2. Kudryashov N.A., Demina M.V. Special polynomials associated with the fourth-order analogue to the Painlevé equations // Phys. Lett. A. – 2007. – Vol. 363, No. 5–6. P. 346–355.

3. Kudryashov N.A., Demina M.V. Polygons of differential equations for finding exact solutions // Chaos, Solitons and Fractals. – 2007. – Vol. 33, No. 5. – P. 1480–1496.

4. Demina M.V., Kudryashov N.A. The Yablonskii - Vorob'ev polynomials for the second Painlevé hierarchy // Chaos, Solitons and Fractals. – 2007. – Vol. 32, No. 2. P. 526–537.

5. Kudryashov N.A., Demina M.V. Relations between zeros of special polynomials associated with the Painlevé equations // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 368, No. 3–4. P. 227–234.

6. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Специальные полиномы и рациональные решения иерархии второго уравнения Пенлеве // ТМФ. – 2007. – Т. 153, вып. 1. – С. 58–67.

7. Kudryashov N.A., Demina M.V. The generalized Yablonskii-Vorob'ev polynomials and their properties // Phys. Lett. A. – 2008. – Vol. 372, No. 29. – P. 4885–4890.

8. Демина М.В., Кудряшов Н.А., Синельщиков Д.И. Метод многоугольников для построения точных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, вып. 12. – С. 2151–2162.

9. Kudryashov N.A., Demina M.V. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear evolution equations // Applied Mathematics and Computation. – 2009. – Vol. 210. – P. 551–557.

10. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Модифицированный метод простейших уравнений // Науч. сессия МИФИ-2005: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2005. – Т. 7. – С. 105–106.

11. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Степенные и нестепенные разложения автомодельных решений модифицированного уравнения Кортевега — де Вриза пятого порядка // Науч. сессия МИФИ-2006: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2006. – Т. 7. – С. 112–113.

12. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Иерархия второго уравнения Пенлеве: локальный анализ, построение рациональных решений // Науч. сессия МИФИ-2007: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2007. – Т. 7. – С. 114–115.

13. Kudryashov N.A., Demina M.V. Special polynomials associated with the Painlevé hierarchies / International Workshop. - Spain, L'Ametlla de Mar, 17-23 June: Book of abstracts. - P. 36.

14. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Асимптотические разложения решений и специальные полиномы иерархии второго уравнения Пенлеве / Международная конференция "Анализ и особенности". – Москва, 20 – 24 августа 2007: Сб. науч. тр. – М.: МИАН, 2007. – С. 46–48.

15. Демина М.В., Кудряшов Н.А. Обобщенная иерархия второго уравнения Пенлеве и ее свойства // Науч. сессия МИФИ-2008: Сб. науч. тр. в 17 т. – М.: МИФИ, 2008. – Т. 9. – С. 62–63.