На правах рукописи

ЕРДАКОВА НАДЕЖДА НИКОЛАЕВНА

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ И ЗАДАЧ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск 2012

Работа выполнена на Кафедре теоретической физики и Лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Алексей Владимирович Борисов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Павлович Маркеев, Институт проблем механики РАН
	доктор физико-математических наук, Сергей Юрьевич Мисюрин, Институт машиноведения РАН им. А. А. Благонравова
Ведущая организация:	Институт прикладной механики Уральского отделения РАН (ИПМ УрО РАН)

Защита диссертации состоится «*15*» *февраля* 2012 г. в *15* часов *00* минут на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Московском инженерно-физическом институте по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31. Тел. 324-84-98, 323-92-56.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ.

Автореферат разослан «*13*» *января* 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор — А. С. Леонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время в связи с бурным развитием компьютерных технологий с одной стороны и методов качественного анализа динамических систем с другой стороны появляются новые возможности для исследования нерешенных проблем нелинейной динамики. Актуальной задачей становится разработка современных компьютерных комплексов, с помощью которых можно изучать динамику сложных систем, в том числе с большим числом степеней свободы. Численно реализованные топологические методы в нелинейных интегрируемых системах и выполнение компьютерных исследований при изучении систем многих частиц ведет к новым результатам в областях динамики, где чисто аналитические методы не позволяют получить описание эволюции системы.

В диссертационной работе представлены аналитические и численные методы нелинейной динамики и статистической механики, с помощью которых, с одной стороны, можно исследовать динамику интегрируемых систем, с другой стороны — анализировать вопросы, связанные с проблемами статистической механики в системах с большим числом степеней свободы.

Изучение вопросов неравновесной статистической механики, главным образом, анализ механизма стремления динамической системы к состоянию термодинамического равновесия, подробно развиваемый в работах В. В. Козлова [4,5], является крайне значимой задачей нелинейного анализа, прикладной и теоретической механики. Несмотря на многолетний интерес к данной проблеме, восходящей к работам Гиббса и Пуанкаре, эти вопросы и по сей день остаются актуальными в научной среде, находятся в сфере постоянного научного обсуждения [12, 14, 21].

С точки зрения физики в целом и теоретической и прикладной механик в частности приоритетной проблемой, поставленной перед статистической механикой, является объяснение такого явления движения жидкости как турбулентность. Проблема турбулентности — глобальная многосторонняя иерархическая проблема. Имея как минимум пятивековую историю [10] и современные качественные научные результаты [7, 19], турбулентность как задача до сих пор остается нерешенной. На данный момент развито несколько моделей турбулентности, широко используются различные подходы (теоретический, феноменологический, компьютерный эксперимент), возникают новые задачи, связанные с моделированием процесса, учетом вязкости, критериями перехода потока в турбулентный режим, перемешиванием и т. д. Такой разносторонний подход к решению задачи определяет ее феномен как одну из центральных задач механики и гидродинамики. На сегодняшний день при описании проблемы турбулентности широко используются статистические методы и вихревое представление модели процесса, что, в свою очередь, подчеркивает значимость развития современных методов в исследованиях вихревой динамики.

В первой части диссертационной работы рассмотрены новые модельные задачи статистической механики, построенные согласно понятиям, моделям и гипотезам, развитым за многолетнюю историю вопроса. С помощью разработанного комплекса программ численно реализованы эксперименты с системой многих частиц в отрезке, проверены теоремы и гипотезы различных источников [4, 9, 11]. В частности, исследована модель гамильтоновой неконсервативной системы многих частиц, асимптотически теряющей свойство обратимости, но приходящей лишь к состоянию статистического равновесия, что противоречит представлению о связи теплового равновесия с потерей динамической памяти [9].

Во второй и третьей частях диссертационной работы с помощью разработанных компьютерных методов исследована актуальная и хорошо известная задача о движении вихрей в кольцевой области. Впервые задачу о движении точечных вихрей в круге рассмотрел А. Гринхилл в 1877 г. [16], который с помощью метода зеркальных отображений исследовал движение одного и двух вихрей внутри и вне круговой области. Исследованиями устойчивости полигональных вихревых конфигураций внутри и вне круга в разное время занимались Дж. Дж. Томсон [20], в честь которого данные конфигурации названы «томсоновскими», Т. Хавелок [17], решивший в 1931 году задачу о линейной устойчивости томсоноских конфигураций внутри круга, Л. Куракин [6], изучающий данную задачу в нелинейной постановке, и др. В наше время по задаче о движении вихрей в круговой области ставятся натурные эксперименты с жидкостями и магнито-гидродинамическими средами [8,15], в связи с проблемой описания динамики сверхтекучего жидкого гелия II между вращающимися концентрическими цилиндрами в работах [3, 18] возникает задача о движении точечных вихрей в кольцевой области. Благодаря методам качественного анализа, развитым в работе [2], топологическим методам [1] и компьютерным технологиям появилась возможность провести полное исследование динамики двух вихрей в кольцевой области, получить классификацию движения двух вихрей в кольцевой области при равных по модулю интенсивностях вихрей, разрешить задачу о нахождении критериев существования устойчивых полигональных конфигураций вихрей в кольцевой области.

Цель диссертационной работы

Целью диссертационной работы является исследование одномерных динамических систем с большим числом степеней свободы и динамики точечных вихрей в кольцевой области методами математического моделирования и теории динамических систем.

Методы исследования

Исследование математических моделей в диссертационной работе основывается на сочетании численных и аналитических методов нелинейной динамики. При построении математических моделей и в ходе их аналитического исследования использовались законы сохранения и методы гамильтоновой механики. При построении численных решений применялись аналитические и численные методы нахождения корней уравнений и интегрирования уравнений движения. Для исследования динамики интегрируемых систем использовались топологические методы бифуркационного анализа и теории устойчивости. При исследовании полигональных конфигураций вихрей в кольце использовались методы линейной алгебры. Для получения статистического описания одномерных систем многих частиц применялись аналитические и численные методы расчета статистических характеристик. Реализация численных алгоритмов проводилась на языке C++ и в пакете прикладных программ MAPLE.

В диссертационной работе решены следующие задачи:

- разработаны математические модели одномерного газа в отрезке при различных условиях;
- разработаны алгоритмы исследования динамики и статистического описания моделей одномерного газа в отрезке, на основе которых реализован комплекс программ, позволяющий проводить численное моделирование процессов релаксации одномерных систем многих частиц;
- изучено влияние параметров исследуемых одномерных систем многих частиц на процесс их релаксации;
- проведено аналитическое и численное исследование системы двух вихрей в кольцевой области;
- показано, что система двух вихрей в кольцевой области интегрируема по Лиувиллю;

- разработан пакет программ, в рамках которого реализованы численные методы анализа динамики системы двух точечных вихрей в кольцевой области (в том числе методы топологического анализа и теории устойчивости);
- доказан факт существования относительных хореографий для случая равных интенсивностей вихрей;
- выполнена полная классификация типов движения системы двух вихрей в кольцевой области в зависимости от параметров системы при равных по модулю интенсивностях вихрей;
- найдены критерии устойчивости полигональных конфигураций системы N вихрей в кольцевой области.

Научная новизна работы

- Предложены математические модели и численные методы статистического описания одномерного газа в отрезке при различных условиях.
- С помощью компьютерного эксперимента показано, что:
  - одномерная система невзаимодействующих (статистически независимых) частиц газа (свободных и в поле тяжести) приходит лишь к состоянию статистического равновесия; данная система обратима во времени, в том числе после установления равновесия;
  - система невзаимодействующих частиц газа в отрезке с подвижной стенкой, движущейся по заданному периодическому закону и перераспределяющей энергию в системе, не может служить моделью термостата, так как система не приходит в состояние теплового равновесия (система необратима во времени);
  - система невзаимодействующих частиц газа в отрезке, разделенном подвижным поршнем конечной массы (отличной от массы частицы), взаимодействующим с остальными частицами по законам сохранения классической и релятивистской энергии и импульса, приходит в состояние термодинамического равновесия с плотностью распределения частиц по координатам и скоростям, зависящей от средней энергии системы; данные системы обратимы во времени в том числе и при численной реализации.
- Построен гамильтониан системы двух вихрей в кольцевой области и проведена редукция системы к одной степени свободы; получены уравнения движения приведенной системы двух вихрей в кольцевой области.

- Выполнены бифуркационный анализ системы двух точечных вихрей в кольцевой области и классификация типов движения при равных по модулю интенсивностях.
- Проведена классификация абсолютного движения вихрей в кольцевой области в зависимости от областей фазового портрета приведенной системы в случае равных интенсивностей.
- Указаны условия устойчивости полигоналных конфигураций системы N вихрей в кольцевой области в зависимости от параметров кольца.

Обоснованность и достоверность результатов

Достоверность результатов работы определяется выбором математических моделей, основанных на законах сохранения энергии и импульса, применением численных и аналитических методов интегрирования различной степени точности с оценкой погрешности расчета, а также сравнением результатов численных расчетов с тестовыми результатами, полученными ранее другими авторами для частных случаев.

Апробация результатов

Основные результаты работы неоднократно обсуждались на семинарах Кафедры теоретической физики УдГУ, также докладывались на российских и международных конференциях:

1) Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования. Ижевск, 4–6 февраля, 2009 г.;
2) Динамические системы, управление и наномеханика. Ижевск, 24–28 июня, 2009 г.;
3) Регулярная и хаотическая гидродинамика. Приложения к атмосфере и океану. Ижевск, 12–15 мая, 2010 г.;
4) Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск, 19–24 января, 2010 г.;
5) Геометрия, динамика, интегрируемые системы. Белград, Сербия, 7–13 сентября, 2010 г.;
6) Геометрия, динамика, интегрируемые системы. Синтра, Португалия, 9–16 сентября, 2011 г.

Теоретическая и практическая ценность

1) Разработанный в рамках диссертационной работы программный комплекс по исследованию динамических и статистических закономерностей одномерного газа позволяет проведение численных экспериментов по апробации теорем и гипотез статистической механики.

2) Созданный в рамках диссертационной работы программный комплекс по исследованию динамики двух вихрей в кольцевой области может быть использован для проведения бифуркационного анализа и классификации движения в других системах вихревой динамики и классической механики.
3) Результаты анализа динамики двух точечных вихрей в кольцевой области могут быть использованы в теоретических и практических приложениях систем сверхтекучего гелия, моделей сильно намагниченной плазмы, где поведение электронов и ионов математически эквивалентно вихревому движению.
4) Методы, развиваемые в работе, могут быть применены в исследованиях других интегрируемых и неинтегрируемых нелинейных систем.

На защиту выносятся

- Математические модели одномерного газа в отрезке при различных условиях;
- Комплекс программ, позволяющий проводить математическое моделирование процессов релаксации одномерных систем с большим числом частиц.
- Результаты вычислительных экспериментов по исследованию динамических и статистических закономерностей различных моделей одномерного газа.
- Программный комплекс для исследования, визуализации и топологического анализа динамики системы двух точечных вихрей в кольцевой области.
- Результаты бифуркационного анализа, анализа устойчивости и классификации движения системы двух вихрей в кольцевой области.
- Результаты анализа условий устойчивости полигональных конфигураций системы N вихрей в кольцевой области.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, перечисленных в конце автореферата, в том числе в 4 работах научных журналов списка ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 105 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (65 наименований).

Краткое содержание работы

Во введении обсуждается актуальность темы исследования, а также кратко изложено содержание диссертации по главам. Указаны цели диссертации, основные методы исследования, научная новизна результатов.

В **первой главе** приведено статистическое описание одномерного газа, описаны модельные задачи одномерного бесстолкновительного газа при различных условиях, разработанный программный комплекс и результаты компьютерных экспериментов по исследованию динамических и статистических закономерностей.

Объектом исследования являются системы, состоящие из $N = 1 - -10 \cdot 10^6$ числа частиц, движущихся в пределах отрезка $[0, 1]$ либо свободно, либо под действием постоянной силы. Таким образом, уравнения движения при численном моделировании интегрируются аналитически. В любой момент времени состояние системы описывается координатами и скоростями частиц $x_i(t)$, $v_i(t)$, $i = 1, \ldots N$, которые рассчитываются на основании динамических уравнений по заданным начальным данным (без каких-либо дополнительных допущений). Для качественного статистического анализа системы использовался больцмановский подход [13], основанный на построении одночастичной функции распределения частиц газа по координатам и скоростям $w_t(x, v)$. Для упрощения графического вывода и без ограничения общности отдельно рассматривались одночастичные распределения частиц по координатам $w_t(x) = \int w_t(x, v)\, dv$ и скоростям $w_t(v) = = \int w_t(x, v)\, dx$, а также четыре первых неприводимых момента координат $M_n(x)$ и скоростей $M_n(v)$

$$M_1(x) = \langle x \rangle,\ M_2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \ldots,$$
$$M_1(v) = \langle v \rangle,\ M_2(v) = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 \ldots, \quad (1)$$

выражаемые через моменты координат $\langle x^n \rangle = \int x^n \omega_t(x)\, dx$ и скоростей $\langle v^n \rangle = \int v^n \omega_t(v)\, dv$. В численном эксперименте одночастичные функции распределения по координатам $w_t(x)$ и скоростям $w_t(v)$ рассчитывались путем сортировки координат $x_i(t)$ и скоростей $v_i(t)$ частиц по ячейкам шириной $\triangle x$ и $\triangle v$ соответственно. Для верификации установления теплового равновесия по текущему значению температуры газа T и значению гравитационного поля g вычислялись функции распределения Максвелла и Больцмана. В п. 1.2 описаны интерфейс программного комплекса и алгоритмы численного построения одночастичных функций распределения частиц газа по координатам $w_t(x)$ и скоростям $w_t(v)$, четырех первых неприводимых моментов системы $M_n(x), M_n(v)$, функций распределения Максвелла и Больцмана.

Построены модели и выполнены расчеты для следующих систем газа в отрезке.

Идеальный бесстолкновительный газ в отрезке

Модель системы. *Частицы двигаются свободно, ударяясь о границы отрезка. Законы движения частиц между ударами аналитически интегрируются согласно кинематическим соотношениям*

$$x_i(t) = x_i^k + v_i^k(t - t_i^k),$$
$$v_i(t) = v_i^k,$$

где x_i^k, v_i^k, t_i^k *— координата, скорость и время* i*-ой частицы в момент* k*-го удара.*

Компьютерный эксперимент показал, что система невзаимодействующих частиц асимптотически стремится к состоянию статистического, нетеплового равновесия. Наблюдается расслоение (стратификация) фазо-

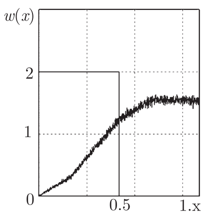

Рис. 1. Эволюция одночастичного распределения частиц газа по координатам $w_t(x)$. Конечное распределение — равномерное на отрезке $[0, 1]$ (начальное распределение $w_0(x)$ — равномерное на отрезке $[0, 0.5]$)

вого объема (рис. 2), занимаемого системой, который сохраняется в соответствии с теоремой Лиувилля, но расслаивается, и при $t \to \infty$ мы получаем бесконечно расслоенный фазовый объем. С точки зрения одночастичной функции распределения частиц газа по координатам и скоростям $w_t(x, v)$ получается функция, разрывная почти в каждой точке, но непрерывная после усреднения по ячейкам $\triangle x, \triangle v$.

Независимо от исходных начальных распределений итоговое распределение по координатам и скоростям при $t \to \infty$ становится непрерывным

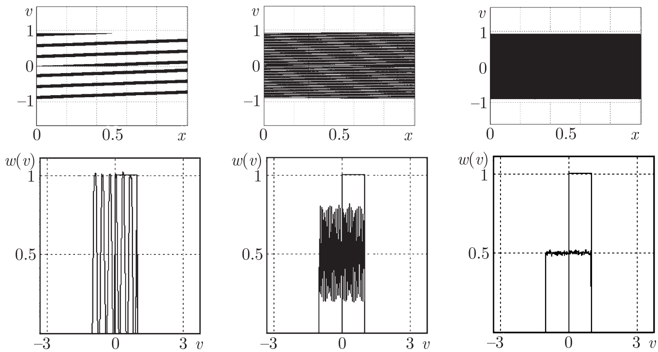

Рис. 2. Стратификация фазового объема и эволюция одночастичного распределения частиц по скоростям $w_t(v)$ в случае несимметричного начального распределения $w_0(v)$. Конечное распределение имеет вид $\bar{w}(v) = 1/2[w_0(v) + w_0(-v)]$ (начальное распределение $w_0(v)$ — прямоугольное [0,1])

(по координатам — равномерным, т. е. $\partial\bar{w}/\partial x = 0$, а по скоростям — симметричным, т. е. $\bar{w}(v) = 1/2[w_0(v) + w_0(-v)]$) (рис. 1, 2).

Данные системы заведомо обратимы во времени, и используемая точность расчетов не приводит к потере обратимости в ходе компьютерного эксперимента.

Идеальный бесстолкновительный газ в гравитационном поле

Модель системы. *Частицы двигаются в гравитационном поле, ударяясь о границы отрезка. Законы движения частиц между ударами аналитически интегрируются согласно соотношениям*

$$x_i(t) = x_i^k + v_i^k(t - t_i^k) + \frac{g}{2}(t - t_i^k)^2,$$
$$v_i(t) = v_i^k + g(t - t_i^k),$$

где x_i^k, v_i^k, t_i^k — координата, скорость и время i-ой частицы в момент k-го удара.

Компьютерный эксперимент показал, что и резкое, и постепенное (адиабатическое) «включения» гравитации приводят к установлению статистического равновесия в системе, итоговое распределение по координатам отлично от распределения Больцмана (рис. 3).

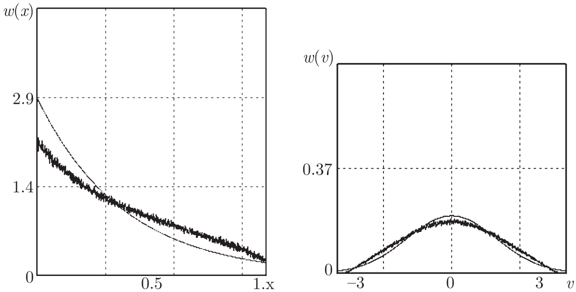

Рис. 3. Итоговые распределения частиц по координатам $\bar{w}(x)$ и скоростям $\bar{w}(v)$ в момент времени $t = 2471$ при условии мгновенного включения гравитационного поля $g = 10$ в момент $t = 0$. Приведены функции Больцмана и Максвелла при соответствующих значениях поля g ($g = 10$) и температуры T ($T = 3.776$). Начальное распределение по координатам $w_0(x)$ — равномерное на отрезке, по скоростям $w_0(v)$ — нормальное ($T = 1$)

Идеальный бесстолкновительный газ в отрезке с движущимся тяжелым поршнем

Также было проверено имеющее место мнение, что система газа в отрезке, левый конец которого колеблется с малой амплитудой по заданному закону

$x_L = f(t)$, $f(t) = f(t + T_L)$, где T_L — период колебаний, может служить моделью газа, взаимодействующего с термостатом.

Модель системы. *Частицы движутся свободно или в гравитационном поле, ударяясь о границы отрезка, левый конец которого движется по периодическому закону* $X(t) = f(Wt)$ *с периодом* $T_L = \frac{2\pi}{W}$. *Скорость частицы после удара о стенку (поршень) меняется:*

$$v_i^{k+1} = -v_i(t_i^k) + \dot{X}(t_i^{k+1}).$$

Рассмотрены законы движения поршня:

– *кусочно-линейная функция*
$$f(Wt) = \begin{cases} A(1 - 2Wt), t \in [0, T_L/2], \\ A(-1 + 2Wt), t \in [T_L/2, T_L]; \end{cases}$$

– *кусочно-параболическая функция*
$$f(Wt) = \begin{cases} A(1 - 8(Wt)^2), t \in [0, T_L/3], \\ 8A(Wt - 1)^2, t \in [T_L/3, 2T_L/3], \\ A(1 - 8(Wt - 1)^2), \in [2T_L/3, T_L], \end{cases}$$

где A — *амплитуда колебания поршня,* W — *частота колебания поршня,* T_L — *период колебания поршня.*

Компьютерный эксперимент показал, что данная система не описывает реальный физический термостат и достигает лишь состояния статистического равновесия. Добавление к такой системе однородного гравитационного поля также не приводит к установлению распределения Больцмана по координатам. Получаемые фазовые портреты определяются начальными условиями и динамикой системы: влиянием колебаний поршня и ускорением свободного падения.

Кроме того, экспериментально было установлено, что данная система необратима во времени. С некоторого времени t в стохастическом слое наблюдается экспоненциальное разбегание траекторий (рис. 4).

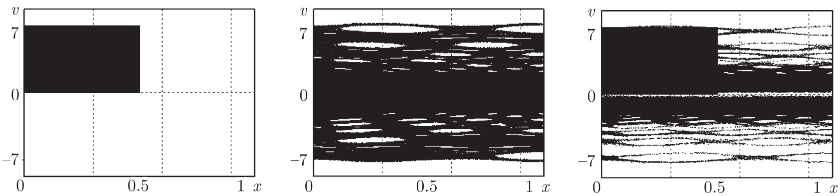

Рис. 4. Фазовый портрет системы частиц в отрезке с тяжелым поршнем, двигающимся по кусочно-параболическому закону ($A = 0.1, W = 10$), в момент времени $t = 0$ (начальное состояние), $t = 35$ (момент обращения времени) и $t = 70$ (момент, соответствующий возврату системы в исходное состояние). Начальное распределение по координатам $w_0(x)$ — равномерное на отрезке $[0, 0.5]$, по скоростям $w_0(v)$ — равномерное на отрезке $[0, 7]$

Бесстолкновительный газ в отрезке с поршнем конечной массы

Модель системы. *Частицы двигаются свободно или в поле тяжести и сталкиваются с подвижным поршнем, реализованным в виде непроницаемой частицы конечной массы, делящей отрезок с частицами на два интервала. Удар происходит по законам упругого столкновения. Закон изменения скоростей частицы и поршня при ударе:*

$$v' = \frac{2VM + v(M+m)}{M+m},$$

$$V' = \frac{V(M-m) + 2v}{M+m},$$

где V, V', M — скорость (до и после удара) и масса поршня, v, v', m — скорость (до и после удара) и масса частицы.

Компьютерный эксперимент показал, что в такой системе со временем устанавливается термодинамическое равновесие, при этом частицы равномерно распределены по отрезку, а одночастичное распределение по скоростям совпадает с *максвелловским* $\bar{w}_M(v) = C_M e^{-\frac{mv^2}{2\langle\varepsilon\rangle}}$ при соответствующем значении средней энергии $\langle\varepsilon\rangle = T$, значение C_M определяется из условий нормировки (рис. 5, 6).

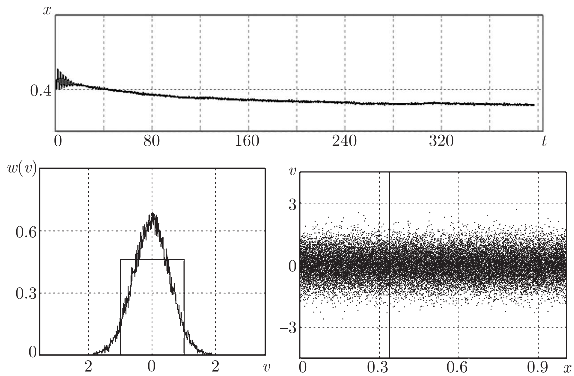

Рис. 5. Двухэтапный приход поршня к положению равновесия, итоговые максвелловское распределение частиц по скоростями $\bar{w}(v)$ и фазовый портрет системы (положение поршня отмечено прямой). Число частиц справа и слева от поршня — $n_1 = 10^5$ и $n_2 = 2 \cdot 10^5$ соответственно. Время расчета $t = 395$. Начальное распределение частиц по скоростям справа и слева от поршня $w_0(v)$ — равномерное, симметричное $[-1, 1]$

Кроме того, такая система *обратима* во времени не только «в принципе», но и в численном эксперименте не наблюдается накопления ошибок счета. Возврат к начальному состоянию возможен в любой момент времени (при достаточной точности вычислений), в том числе и после установления равновесия.

Добавление к такой системе гравитационного поля приводит к установлению *распределения Больцмана* по координатам $\bar{w}_B(x) = C_B e^{-\frac{mgx}{T}}$, где C_B — нормировочная постоянная (рис. 6).

Бесстолкновительный релятивистский газ в отрезке с поршнем конечной массы

Модель системы. *Модель реализована аналогично модели — в предыдущем эксперименте, но частицы взаимодействуют с подвижным порш-*

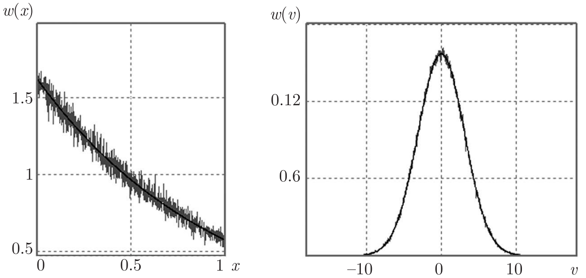

Рис. 6. Полученные одночастичные распределения по координатам $\bar{w}(x)$ и скоростям $\bar{w}(v)$, совпадающие с функциями Больцмана $\bar{w}_B(x)$ и Максвелла $\bar{w}_M(v)$ (выделены черным цветом) при соответствующих значениях поля g и температуры T в системе. Число частиц справа и слева от поршня $n_1 = 5 \cdot 10^5$ и $n_2 = 10^2$, значение поля $g = 5$, масса частицы газа $m = 1$, масса подвижного поршня $M = 10$

нем по закону сохранения релятивистских энергии и импульса:

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2',$$

$$\sqrt{p_1^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + M^2 c^4} = \sqrt{p_1'^2 c^2 + m^2 c^4} + \sqrt{p_2'^2 c^2 + M^2 c^4},$$

где p_1, p_1', m — импульс (до и после рассеяния) и масса частицы, p_2, p_2', M — импульс (до и после рассеяния) и масса поршня, c — скорость света.

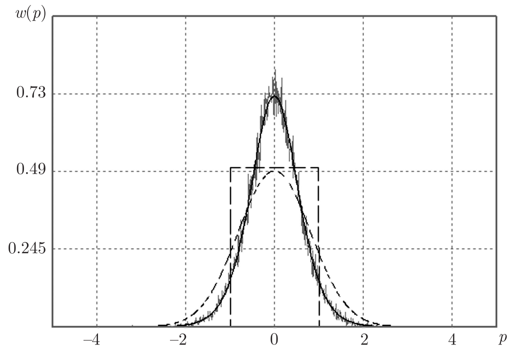

Рис. 7. Полученное одночастичное распределение по импульсам $\bar{w}(p)$. Пунктиром изображены начальное распределение $w_0(p)$, равномерное на отрезке $[-1, 1]$, и функция Гаусса при соответствующем значении температуры системы T_G. Черным изображена функция Больцмана при соответствующем значении температуры T_B релятивистского газа $\bar{w}_B(p) = C_B\; e^{-\frac{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}{T_B}}$

Компьютерный эксперимент показал, что данная динамическая система асимптотически ($t \to \infty$) приходит к состоянию термодинамического равновесия. Состояние равновесия характеризуется равномерным распределением частиц по координатам и релятивистской функцией распределения Больцмана (Гиббса) по импульсам (рис. 7), отличной от распределения Гаусса. Эксперимент не подтверждает связь экспоненциальной зависимости равновесной функции распределения с центральной предельной теоремой теории вероятностей.

Данная система, также как и предыдущая, обратима во времени, в том числе и после установления теплового равновесия, что, в свою очередь, опровергает предположение о потере системой динамической памяти в состоянии теплового равновесия.

Вторая глава посвящена аналитическому и численному исследованию динамики нелинейной системы двух точечных вихрей с интенсивностями Γ_1, Γ_2 в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками в форме кольца; внутренний и внешний радиусы кольца равны r_{in} и r_{out} соответственно (рис. 8).

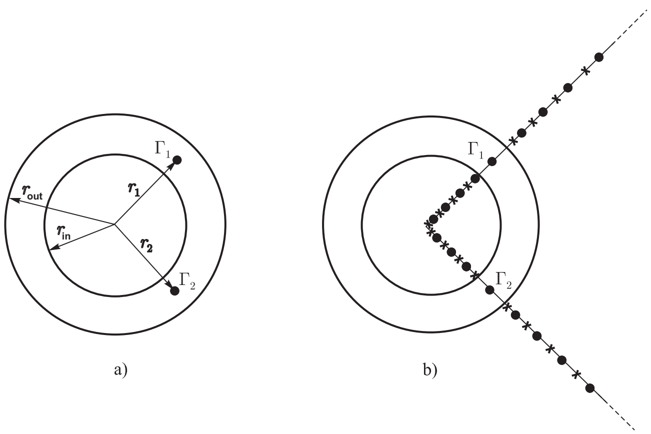

Рис. 8. Два точечных вихря с радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ внутри кольцевой области (a) и две бесконечные последовательности образов вихрей знакопеременной интенсивности, полученные методом зеркальных изображений (b). Γ_1, Γ_2 — интенсивности вихрей; $r_{\text{in}}, r_{\text{out}}$ — внутренний и внешний радиусы кольцевой области

С помощью метода зеркальных изображений найдена функция тока системы и уравнения движения:

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\Gamma_\alpha\sum_{k=-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left|\boldsymbol{r}-q^{-2k}\boldsymbol{r}_\alpha(t)\right|}{\left|\boldsymbol{r}-\dfrac{r_{\text{out}}^2}{r_\alpha^2}q^{-2k}\boldsymbol{r}_\alpha(t)\right|}\right), \tag{2}$$

$$\dot{x}_\alpha = \left.\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_\alpha}, \quad \dot{y}_\alpha = -\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_\alpha}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{r}_\alpha(t)$ — радиус-вектор α-го вихря в момент времени t, $q = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}$ — отношение внутреннего и внешнего радиусов кольца.

Построен гамильтониан системы

$$\begin{gathered}H = H_0 + \frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{r_{\text{out}}^2}{r_1^2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{r_1^2}{r_{\text{out}}^2}q^{2k}\right)+ \\ +\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{r_{\text{out}}^2}{r_2^2}q^{2k}\right)\left(1-\frac{r_2^2}{r_{\text{out}}^2}q^{2k}\right)- \\ -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{r_{\text{out}}^4(r_2^2-2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)q^{2k}+r_1^2q^{4k})(r_1^2-2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)q^{2k}+r_2^2q^{4k})}{(r_{\text{out}}^4-2r_{\text{out}}^2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)q^{2k}+r_1^2r_2^2q^{4k})(r_{\text{out}}^4q^{4k}-2r_{\text{out}}^2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)q^{2k}+r_1^2r_2^2)},\end{gathered} \tag{4}$$

где H_0 — гамильтониан системы двух вихрей в цилиндре:

$$\begin{gathered}H_0 = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(r_1^2+r_2^2-2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)\right)+\frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\ln\left(r_{\text{out}}^2-r_1^2\right)+ \\ +\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left(r_{\text{out}}^2-r_2^2\right)+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(r_1^2r_2^2-2r_{\text{out}}^2(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2)+r_{\text{out}}^4\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Замечание. Сходимость рядов в выражениях (2) и (4) показана в п. 2.1 диссертационной работы.

Показано, что система имеет дополнительный первый интеграл — момент завихренности

$$I = \Gamma_1\boldsymbol{r}_1^2 + \Gamma_2\boldsymbol{r}_2^2, \tag{6}$$

и проведена редукция к системе с одной степенью свободы. Полученные уравнения движения приведенной системы исследуются с помощью компьютерных методов разработанного комплекса программ. В п. 2.4 описан интерфейс комплекса и алгоритмы численного исследования динамики и топологического анализа системы:

– нахождение области возможных движений;
– численное интегрирование уравнений движения и построение фазового портрета приведенной системы;
– поиск неподвижных точек отображения;
– построение бифуркационных диаграмм;
– визуализация движения исходной двумерной системы.

Для системы двух вихрей в кольцевой области при разных значениях отношения радиусов кольца q (при равных по модулю интенсивностях вихрей) численно получены:

- бифуркационные диаграммы, представляющие собой кривые на плоскости первых интегралов H, I, соответствующие неподвижным точкам приведенной системы;
- отображения Пуанкаре приведенной системы для различных областей бифуркационных диаграмм;
- траектории движения реальной системы.

На рис. 9 приведена одна из полученных бифуркационных диаграмм и соответствующие фазовые портреты и траектории движения для случая вихревой пары ($\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -1$) в кольцевой области при $q = 0.1$.

Для случая равных интенсивностей вихрей доказана теорема о существовании относительных хореографий, то есть о представлении произвольного абсолютного движения вихрей в кольцевой области в виде движения вихрей по замкнутым кривым в равномерно вращающейся системе координат. Опираясь на данный факт, проведена классификация абсолютного движения вихрей в зависимости от областей фазового портрета приведенной системы.

Также показано, что система двух вихрей между параллельными стенками является предельным случаем системы двух вихрей в кольцевой области при стремлении радиусов кольца к бесконечности.

В **третьей главе** гамильтониан системы двух вихрей в кольцевой области (4) выражен через эллиптические θ-функции и рассмотрена задача о нахождении критериев устойчивости полигональных (томсоновских) конфигураций N вихрей в кольцевой области в зависимости от отношения радиусов кольца $q = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}$.

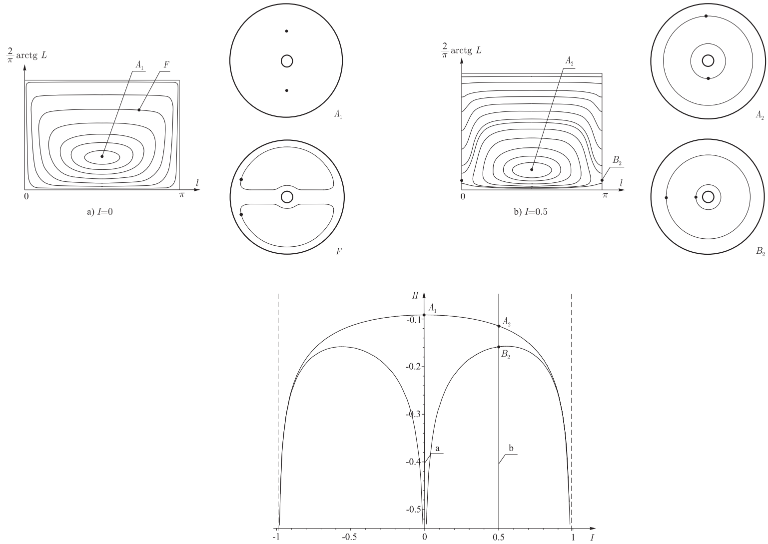

Рис. 9. Бифуркационная диаграмма системы при $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -1, q = 0.1$. Фазовые портреты при $I = 0$ (a) и $I = 0,5$ (b) и траектории движения вихрей, соответствующие неподвижным точкам

Для томсоновских конфигураций N вихрей в кольцевой области с помощью системы аналитических вычислений Maple вблизи состояния равновесия исследованы собственные значения матриц квадратичной части гамильтониана и матриц линеаризации векторного поля, по которым определены критерии устойчивости систем. Показано, что при $N < 7$ существуют устойчивые томсоновские конфигурации вихрей в кольцевой области. На плоскости параметров (a, q), где a — радиус томсоновской орбиты вихрей, построены области существования устойчивых томсоновских конфигураций вихрей для случаев $N=2,3,4,5,6$ (рис. 10). Показано, что при $q = 0$ критические значения радиусов a совпадают с хорошо известными результатами для томсоновских конфигураций вихрей в цилиндрической области.

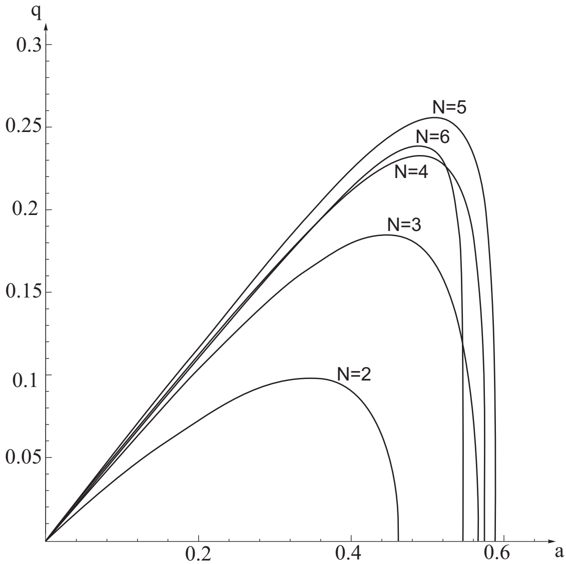

Рис. 10. Зависимости критических значений радиусов a томсоновских конфигураций от отношения q внутреннего и внешнего радиусов для систем $N = 2, 3, 4, 5, 6$ вихрей в кольцевой области. Области устойчивых томсоновских конфигураций располагаются под кривыми

Заключение

Основные результаты, полученные при выполнении диссертационной работы:

1) Предложены математические модели и численные методы статистического описания одномерного газа в отрезке при различных условиях, на основе которых реализован комплекс программ, позволяющий проводить численное моделирование процессов релаксации одномерных систем многих частиц. С помощью компьютерного эксперимента показано, что:

   - одномерная система невзаимодействующих (статистически независимых) частиц газа (свободных и в поле тяжести) приходит лишь к состоянию статистического равновесия; данная система обратима во времени, в том числе после установления равновесия;

- система невзаимодействующих частиц газа в отрезке с подвижной стенкой, движущейся по заданному периодическому закону и перераспределяющей энергию в системе, не может служить моделью термостата, так как система не приходит в состояние теплового равновесия (система необратима во времени);
- система невзаимодействующих частиц газа в отрезке, разделенном подвижным поршнем конечной массы (отличной от массы частицы), взаимодействующим с остальными частицами по законам сохранения классической и релятивистской энергии и импульса, приходит в состояние термодинамического равновесия с плотностью распределения частиц по координатам и скоростям, зависящей от средней энергии системы; данные системы обратимы во времени в том числе и при численной реализации.

2) Исследована динамика системы вихрей в кольцевой области.

- Построен гамильтониан системы двух вихрей в кольцевой области, проведена редукция системы к одной степени свободы; получены уравнения движения приведенной системы двух вихрей в кольцевой области.
- Выполнены бифуркационный анализ системы двух точечных вихрей в кольцевой области и классификация типов движения при равных по модулю интенсивностях.
- Проведена классификация абсолютного движения вихрей в кольцевой области в зависимости от областей фазового портрета приведенной системы в случае равных интенсивностей.
- Указаны условия устойчивости полигональных конфигураций системы N вихрей в кольцевой области в зависимости от отношения радиусов кольца.

Литература

[1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи математических наук, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. 368 стр.

[3] Зуева Т. И. Движение вихрей в кольцевой области // Физика низких температур, 2000, т. 26, № 2, с. 119–127.

[4] Козлов В. В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008.

[5] Козлов В. В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

[6] Куракин Л. Г Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика, 2009, т.5, №3, с. 295–317.

[7] Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей // ЖЭТФ, 1975. N. 68, вып. 5(11). С. 1868 -1882.

[8] Паттерман С. Гидродинаимка сверхтекучей жидкости. М.: Мир, 1964.

[9] Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс, 1986.

[10] Фриш У. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. Перевод с англ. А. Н. Соболевского под ред. М. Л. Бланка. М.: Фазис: 1998.

[11] Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. М.–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. (Оригинальное издание: М.–Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1943.)

[12] Berman G. P., Izrailev F. M. The Fermi–Pasta–Ulam Problem: Fifty Years of Progress // Chaos, 2005, vol. 15, 015104.

[13] Boltzmann L. On Certain Questions of the Theory of Gases // Nature, 1895, vol. 51, pp. 413-–415.

[14] Bunimovich L. Kinematics, Equilibrium, and Shape in Hamiltonian System: The "LAB"effect // Chaos, 2003, vol. 13, № 3, pp. 903–912.

[15] Edwards D. F., Taylor J. B. Negative temperature states of two-dimensional plasmas and vortex fluids // Proc. Roy. Soc. London, 1974, vol. A 336, p.257.

[16] Greenhill A. G. Plane Vortex Motion // Quart. J. Pure and Appl. Math., 1877/78, vol. 15, № 58, pp. 10-30.

[17] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil.Mag. 1931, v. 11, № 70, pp. 617-633.

[18] Fetter A. Low-lying superfluid states in a rotating annulus // Phys. Rev., 1967, vol. 153, no. 1, pp. 285–296.

[19] Fincham A. M., Maxworthy T., Spedding G. R. Energy dissipation and vortex structure in freely decaying, stratified grid turbulence // Dyn. Atmos. and Oceans, 1996, vol. 23, pp. 155-169.

[20] Thomson J. J. A treatise on the motion of vortex rings. London: Macmillan, 1883.

[21] Zaslavsky G. M. From Hamiltonian Chaos to Maxwell's Demon // Chaos, 1995, vol. 5, № 4, pp. 653–661.

Основные публикации по теме диссертации

1) Васькин В. В., Ердакова Н. Н., Мамаев И. С. Статистическая механика нелинейных динамических систем // Нелинейная динамика, 2009, 5 (3). С. 385–402.
2) Васькин В. В., Ердакова Н. Н. Статистическая механика релятивистского газа в отрезке // Нелинейная динамика, 2009, 5 (4). С. 561–567.
3) Васькин В. В., Ердакова Н. Н. Динамика двух точечных вихрей в кольцевой области // Нелинейная динамика, 2010, 6 (3). С. 531–547.
4) Ердакова Н. Н. Томсоновские конфигурации в динамике двух вихрей в кольцевой области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2010, 4. С. 71–76.
5) Ердакова Н. Н. Тепловое и статическое равновесие динамических систем с большим числом степеней свободы // Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования: труды Первой междунар. конф., Ижевск, 4–6 февраля, 2009 г.
6) Ердакова Н. Н. Тепловое и статистическое равновесие динамических систем с большим числом степеней свободы // Динамические системы, управление и наномеханика: тез. докл. Всерос. конф., г. Ижевск, 24–28 июня, 2009 г.
7) Ердакова Н. Н. Статистическая механика газа в отрезке. Релятивистский и нерелятивистский случай // Регулярная и хаотическая динамика: тез. докл. Всерос. конф., г. Ижевск, 19–24 янв. 2010 г.
8) Ердакова Н. Н. Задача о движении двух вихрей в кольцевой области // Регулярная и хаотическая гидродинамика. Приложения к атмосфере и океану: тез. докл. Междунар. конф., г. Ижевск, 12–15 мая 2010 г.
9) Ердакова Н. Н. Задача о движении двух вихрей в кольцевой области// Сборник тезисов Второй международной конференции "Геометрия, динамика, интегрируемые системы", Белград, Сербия, 2010 г.

Подписано в печать 12.01.2012. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5.
Бумага офсетная № 1. Тираж 100 экз. Заказ № 11-65.
Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.