

На правах рукописи

Гельфер Евгений Григорьевич

Бустовы моды в квантовой теории поля и рождение пар

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Автор:

Москва — 2011

Работа выполнена в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Нарожный Николай Борисович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Никишов Анатолий Ильич
(Физический институт РАН)

доктор физико-математических наук,
профессор **Попов Владимир Степанович**
(Институт теоретической
и экспериментальной физики)

Ведущая организация: Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Защита состоится 5 октября 2011 года в 18 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.130.06 при Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, 31, тел. (495)323-95-26

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ.

Автореферат разослан _____ сентября 2011 г.

Просим принять участие в работе совета или прислать отзыв в одном экземпляре, заверенном печатью организации, по адресу НИЯУ МИФИ на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор

В. П. Яковлев

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы исследований. Как хорошо известно, нелинейный характер квантовой электродинамики (КЭД) начинает проявляться в полях с напряженностью порядка характерного для КЭД значения $E_S = m_e^2 c^3 / |e| \hbar = 1.32 \cdot 10^{16}$ В/см, которое в лабораторных условиях пока не достигнуто. Поэтому исследование нелинейной КЭД долгое время интересовало только теоретиков, а ее экспериментальная проверка могла быть осуществлена только в экспериментах по почти лобовому столкновению электронов и фотонов высокой энергии с относительно слабым лазерным импульсом [1]. В этом случае условие $E \sim E_S$ оказывалось выполненным в системе отсчета, в которой налетающая частица покоится (для фотона в системе отсчета, в которой его энергия имеет порядок $m_e c^2$).

Однако, для наблюдения нелинейных вакуумных эффектов, таких как рождение внешним полем электрон-позитронных пар из вакуума, необходимо иметь поле с напряженностью $E \sim E_S$ в лабораторной системе. Основные надежды на получение столь сильных полей в настоящее время связаны с развитием лазерных технологий. Рекордная на сегодняшний день интенсивность лазерного импульса составляет $I \approx 2 \cdot 10^{22}$ Вт/см² [2]. Это еще значительно меньше, чем интенсивность, соответствующая характерной КЭД напряженности E_S , $I_S = \frac{c}{4\pi} E_S^2 = 4.6 \cdot 10^{29}$ Вт/см². Однако, в процессе реализации сейчас находятся проекты ELI [3] и HiPER [4], на которых планируется достичь интенсивности порядка 10^{26-28} Вт/см². Оказалось [5, 6], что при такой интенсивности эффект рождения пар уже может наблюдаться, так что исследование эффекта рождения пар внешним полем становится весьма актуальной задачей и с точки зрения эксперимента.

Для решения задач КЭД в присутствии сильного поля, как правило, используется картина Фарри, в которой взаимодействие заряженных частиц с полем излучения учитывается по теории возмущений, а с внешним полем точно. Последнее достигается за счет использования точных решений уравнений Дирака или Клейна-Фока-Гордона (КФГ) в соответствующем поле. Найти такие решения удается в том случае, если уравнение обладает симметриями, позволяющими разделить переменные. Полученные таким образом решения являются собственными функциями генераторов соответствующих симметрий и нумеруются собственными значениями этих генераторов. Как правило, используемые в КЭД сильного поля точные решения являются собственными функциями линейных комбинаций генераторов пространственных и временных трансляций, или пространственных вращений, и соответственно нумеруются значениями компонент 4-импульса, или момен-

та импульса. В частности, задача о рождении пар постоянным электрическим полем была детально исследована с использованием решений такого типа [7,8]. Тем не менее, группа изометрий пространства Минковского (группа Пуанкаре) помимо уже названных преобразований включает лоренцевы повороты - бусты.

Бустовая симметрия достаточно редко используется для квантования поля. Прежде всего, это связано с тем, что генератор буста не коммутирует с гамильтонианом, и поэтому бустовое квантовое число и энергия не могут входить ни в какой полный набор наблюдаемых величин одновременно. Впервые бустовы моды массивного скалярного поля обсуждались В. Унру в работе [9], хотя явный их вид приведен не был. Затем свойства скалярных бустовых мод изучались в целом ряде работ, см. [10–13]. В частности, два очень важных их свойства были установлены в работе [13]. Во-первых, было показано, что нулевая бустова мода свободного массивного скалярного поля с точностью до постоянного множителя совпадает с положительно частотной функцией Вайтмана. А во-вторых, бустова мода на поверхности светового конуса имеет особенность в виде δ -функции от бустового квантового числа. Свойства фермионных бустовых мод изучены гораздо хуже.

Хотя бустовы моды редко используются в качестве базиса для квантования поля, они могут быть крайне полезны для квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, или в случае, если однородность пространства Минковского (ПМ) по времени и/или пространству нарушена присутствием внешнего классического поля. В этих случаях бустовая симметрия может оказаться единственной для квантованного поля. Примерами такой ситуации являются дилатонная [14] и обобщенная дилатонная [15] гравитация в двух измерениях, а также двумерная метрика Шварцшильда [16]. Здесь же можно упомянуть продольное хромоеlectрическое поле, возникающее при столкновении тяжелых ионов [17].

Актуальность исследования бустовых мод определяется еще одним обстоятельством. Использование комбинаций бустовых мод, называемых модами Унру, для квантования массивного скалярного поля служит обоснованием существования так называемого "эффекта Унру" [9]. В работах Н.Б. Нарожного с соавторами, см., например, [13], была продемонстрирована ошибочность квантования Унру в ПМ для скалярного поля. Однако, в последнее время в литературе постоянно появляются предложения по экспериментальной проверке "эффекта Унру" при взаимодействии электронов с интенсивными ультракороткими электромагнитными импульсами, а также о реализации на его основе запутанных состояний как бозонов, так и фермионов. Поэтому рассмотрение задачи Унру для фермионных полей не только принципиально

важно, но и своевременно.

В последнее время появился еще один подход к изучению эффекта рождения пар во внешнем поле, см., например, [18] и приведенные там ссылки, который основан на уравнениях, подобных кинетическим уравнениям, широко применяющимся в физике плазмы и других неравновесных задачах. Следуя авторам этих работ, будем называть такие уравнения квантовыми кинетическими уравнениями (ККУ). Среди очевидных преимуществ ККУ следует отметить простоту их использования в численных расчетах, а также возможность естественного учета обратной реакции рожденных пар на внешнее поле [19]. С другой стороны, существует также ряд недостатков такого подхода. Например, ограниченность только однородными внешними полями, кажущаяся калибровочная неинвариантность, трудности, возникающие при попытке найти аналитическое решение даже в тех случаях, когда оно может быть получено другими методами и, как мы покажем ниже, нетривиальность интерпретации физического смысла основных величин, входящих в ККУ. Тем не менее очевидно, что синтез различных подходов может быть очень полезен для дальнейшего развития теории.

Цель работы состоит в:

1. Построении бустовых мод свободного фермионного поля (как массивного, так и безмассового) и исследовании их свойств как обобщенных функций координат и бустового квантового числа.
2. Анализе квантования Унру для фермионного поля.
3. Построении полных наборов in и out бустовых мод для массивных скалярных частиц, находящихся во внешнем постоянном и однородном электрическом поле, вычислении количества частиц с определенным значением бустового квантового числа, рождаемых полем из вакуума в каждой моде, и полного числа рожденных частиц
4. Развитии формализма квантового кинетического уравнения и установлении соответствия этого метода другим подходам к задачам о рождении пар внешним полем.

Научная новизна работы состоит в том, что в ней впервые

1. Представлен метод получения полных наборов решений свободных уравнений Клейна-Фока-Гордона и Дирака из двухточечной функции Вайтмана.

2. Построены бустовы моды свободных массивного и безмассового фермионных полей и проанализированы из свойства как обобщенных функций координат и бустового квантового числа.
3. Показано, что в фермионном случае исключение любой моды из полного набора бустовых мод делает этот набор неполным, из чего следует некорректность квантования Унру фермионного поля в ПМ, и отсутствие "эффекта Унру" для фермионов.
4. Построены бустовы in и out моды скалярных частиц, находящихся во внешнем постоянном однородном электрическом поле, и вычислено количество частиц с определенным значением бустового квантового числа, рождаемых полем из вакуума.
5. Показана эквивалентность метода квантового кинетического уравнения другим подходам к задаче о рождении пар внешним полем и впервые получено точное решение квантового кинетического уравнения для фермионов в случае постоянного внешнего электрического поля.

Практическая ценность работы.

Развитый в первой и третьей главах диссертации формализм бустового квантования может быть использован для решения фундаментальной задачи об испарении черных дыр (эффект Хокинга) в рамках дилатонной теории гравитации.

На базе критического анализа квантования Унру, представленного во второй главе диссертации, показана принципиальная несостоятельность предлагающихся в последнее время экспериментов по проверке "эффекта Унру", или реализации на его основе перепутанных состояний.

Наконец, рассмотренный в четвертой главе метод квантового кинетического уравнения может применяться для численного решения задач о рождении пар во внешнем переменном во времени электрическом поле или для учета обратной реакции рожденных частиц и античастиц на порождающее пары поле. В частности, это может быть использовано для описания экспериментов, которые планируется поставить на строящихся в данный момент лазерных установках высокой интенсивности ELI и HiPER.

Положения, которые выносятся на защиту.

1. Новый метод построения полных наборов решений свободных уравнений Клейна-Фока-Гордона и Дирака, основанный на использовании функции Вайтмана.

2. Построение бустовых мод свободного фермионного поля и доказательство того, что на световом конусе они являются дельта-функциями в комплексной плоскости бустового квантового числа.
3. Недопустимость исключения какой-либо моды из полного набора бустовых мод фермионного поля и вывод о некорректности квантования Унру в пространстве Минковского в фермионном случае. Доказательство того, что это утверждение остается верным и для сглаженных бустовых мод.
4. Построение полного набора бустовых мод уравнения Клейна-Фока-Гордона во внешнем постоянном однородном электрическом поле, а также вычисление количества частиц, характеризующихся определенным значением бустового квантового числа, рождаемых внешним полем из вакуума в каждой моде, и полного числа рожденных частиц.
5. Доказательство эквивалентности метода квантового кинетического уравнения другим подходам к задаче о рождении пар внешним полем в вакууме. Явное решение ККУ в постоянном электрическом поле.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы были представлены на конференциях Научная сессия МИФИ – 2006 и Научная сессия МИФИ – 2011 и на семинарах кафедры Теоретической ядерной физики НИЯУ МИФИ.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 3 статьи в реферируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК, 1 статья в архиве электронных препринтов и 2 работы в сборниках трудов конференций (список в конце автореферата).

Степень обоснованности полученных результатов достаточно высока, поскольку исследования опирались общепризнанные методы квантовой теории поля. Достоверность новых подходов, развитых в диссертации, подтверждается согласием со старыми подходами для одних и тех же задач.

Личный вклад автора. В диссертации представлены только те результаты, в получение которых автор внес существенный вклад.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и четырех приложений, изложена на 111 страницах, включая 14 рисунков, 1 таблицу и 121 наименование цитируемой литературы.

2 Содержание работы

Поскольку лоренцево вращение выделяет в пространстве Минковского двумерную плоскость, мы обсуждаем специфические свойства бустового квантования в главах 1–3 на примере двумерного пространства-времени. Переход к четырем измерениям в скалярном случае осуществляется заменой

$$m^2 \rightarrow m^2 + p_{\perp}^2,$$

где \mathbf{p}_{\perp} – сохраняющийся поперечный к направлению поля импульс.

Во **введении** обоснована актуальность проводимых в работе исследований, сформулированы основные задачи диссертационной работы, приведен обзор литературы по теме диссертации, изложена ее структура.

В **первой главе** получены бустовы моды свободных полей и исследованы их свойства. Для построения бустовых мод используются положительно и отрицательно частотные функции Вайтмана скалярного $\Delta^{(\pm)}(x)$ и фермионного $S^{(\pm)}(x)$ полей. Функции Вайтмана свободных полей полностью определяются (с точностью до постоянного множителя) трансляционной и лоренц инвариантностью теории. В диссертации показано, что зная функции Вайтмана и используя симметрию поля можно построить любой полный набор положительно и отрицательно частотных решений уравнений КФГ и Дирака.

Действительно, функции Вайтмана $\Delta^{(\pm)}(x - \alpha)$ и $S^{(\pm)}(x - \alpha)$, $\alpha = \{\alpha^0, \alpha^1\}$, со сдвинутыми аргументами, так же как и $\Delta^{(\pm)}(x)$ и $S^{(\pm)}(x)$, являются решением уравнений КФГ и Дирака соответственно. Множество функций с различными α представляет собой переполненный набор, поскольку эти функции нумеруются двумя независимыми параметрами α^0, α^1 . Тем не менее, через них можно выразить любой полный набор положительно частотных решений $F_a(x)$. Например, для скалярных частиц можно написать

$$F_a(x) = \int d\alpha f_a(\alpha) \Delta^{(+)}(x - \alpha). \quad (1)$$

В силу того, что набор $\Delta^{(\pm)}(x - \alpha)$ является переполненным, коэффициенты $f_a(\alpha)$ нельзя определить однозначно. Для того, чтобы это сделать, необходимо наложить на коэффициенты α^0, α^1 некоторые ограничения, которые следует выбирать исходя из соображений симметрии. Так, если положить $\alpha^0 = 0$ и потребовать, чтобы функции $F_a(x)$ были собственными функциями генератора пространственных трансляций (оператора импульса), то формула (1) сводится к плоским волнам. А если выбрать α отвечающим некоторой орбите группы Лоренца $\alpha^2 \equiv \alpha^{0^2} - \alpha^{1^2} = const$ и потребовать, чтобы $F_a(x)$ были собственными функциями оператора буста

$$\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = i(z\partial_t + t\partial_z), \quad (2)$$

к бустовым модам. Таким образом в работе получены бустовы моды для массивного скалярного, массивного и безмассового фермионных полей. В частности, ортонормированный набор бустовых мод для массивного фермионного поля, которые нумеруются значениями квантового числа κ (собственными значениями оператора буста), имеет вид

$$\psi_{\kappa}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{\mp im(t \cosh q - z \sinh q) - i\kappa q} \begin{pmatrix} e^{-q/2} \\ \pm e^{q/2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Бустовы моды скалярного поля в начале координат, $x = 0$, с точностью до числового множителя представляют собой дельта-функцию Дирака от бустового квантового числа κ [13]. Нетрудно видеть, что в фермионном случае функции (3) также являются не обычными, а обобщенными, причем устроены они существенно более сложно, чем в скалярном случае. Поэтому смысл имеют функционалы вида

$$\mathfrak{F}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \psi_{\kappa}^{(\pm)}(x) \mathfrak{h}(\kappa). \quad (4)$$

Такие функционалы естественно возникают, например, при вычислении матричных элементов оператора поля. В диссертации строго доказано, что основные функции $\mathfrak{h}(\kappa)$ принадлежат классу аналитических в полосе

$$-1/2 - \epsilon < \text{Im } \kappa < 1/2 + \epsilon, \quad \epsilon > 0. \quad (5)$$

и убывают по крайней мере как κ^{-2} при $|\kappa| \rightarrow \infty$. Это означает, что путь интегрирования в (4) можно деформировать в пределах полосы (5).

Рассмотрим функционал (4) в вершине светового конуса $x = 0$. Сдвинув контур интегрирования для верхней компоненты на $i/2$ вверх, а для нижней компоненты на $i/2$ вниз, получим

$$\mathfrak{F}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa dq e^{-i\kappa q} \begin{pmatrix} \mathfrak{h}(\kappa + i/2) \\ \pm \mathfrak{h}(\kappa - i/2) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \mathfrak{h}(i/2) \\ \pm \mathfrak{h}(-i/2) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Этот результат означает, что фермионные бустовы в вершине светового конуса являются дельта-функциями комплексного аргумента (ср. с [20])

$$\psi_{\kappa}^{(\pm)}(0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} \delta(\kappa - i/2) \\ \pm \delta(\kappa + i/2) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \delta(\kappa \mp i/2) \mathfrak{h}(\kappa) = \mathfrak{h}(\pm i/2). \quad (8)$$

Во **второй главе** анализируется квантование Унру для фермионного поля. В [13] было показано, что схема квантования Унру предполагает исключение бустовой моды, отвечающей значению $\kappa = 0$, из полного набора бустовых мод. Другими словами, интегралы по всем значениям κ (например, (4), (8)) заменяются на интегралы в смысле главного значения. На первый взгляд, точка $\kappa = 0$ в фермионном случае не является чем-то выделенной, поскольку особенности (7) расположены в $\kappa = \pm i/2$. На самом же деле, в отличие от скалярного случая [13], из спектра не может быть исключена ни одна точка, а не только $\kappa = 0$. Такая процедура является безболезненной только для полей вне светового конуса $x_{\pm} = t \pm z = 0$.

Действительно, рассмотрим интеграл

$${}^U\mathfrak{F}^{(\pm)}(h, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty} \right) d\kappa \psi_{\kappa}^{(\pm)}(0) \mathfrak{h}(\kappa). \quad (9)$$

Для вычисления верхней компоненты этого выражения рассмотрим контур C , изображенный на Рис. 1. Интегралы по верхней прямой $\text{Im } \kappa = 1/2 + \epsilon'$ и по вертикальным отрезкам $\text{Re } \kappa \rightarrow \pm\infty$ равны нулю, а интегралы по косым отрезкам, очевидно, взаимно компенсируются. Таким образом, верхняя компонента ${}^U\mathfrak{F}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0)$ сводится к интегралу

$${}^U\mathfrak{F}_{up}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{C_{\epsilon'}} d\kappa \left(\frac{m}{2}\right)^{-i\kappa} \frac{\Gamma(1/2 + i\kappa)}{\sigma^{1/2+i\kappa}} \mathfrak{h}(\kappa), \quad (10)$$

по незамкнутой окружности $C_{\epsilon'}$ радиуса ϵ' с центром в точке $\kappa = i/2$. Это выражение может быть вычислено в пределе $\delta/\epsilon' \ll 1$. В итоге получаем

$${}^U\mathfrak{F}_{up}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \mathfrak{h}\left(\frac{i}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\delta}{\epsilon'} e^{-\epsilon' \ln\left(\frac{m\sigma}{2}\right)} \right). \quad (11)$$

Аналогичный результат получается и для нижней компоненты (9).

Из (11) очевидно следует, что результат вычисления ${}^U\mathfrak{F}_{up}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0)$ существенно зависит от порядка переходов к пределам $\delta \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$. Порядок $\sigma \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ означает, что от ${}^U\mathfrak{F}_{up}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0)$ (10) мы возвращаемся обратно к функционалу $\mathfrak{F}^{(\pm)}(\mathfrak{h}, 0)$ (4). Неудивительно, что в этом случае выражение (11) воспроизводит (6). Обратный порядок $\delta \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$, отвечающий вычислению функционала (10), приводит к бессмысленному выражению. Это означает, что в фермионном случае недопустимо выбрасывание любой точки из интеграла по действительной оси κ . Другими словами, набор бустовых мод (3)

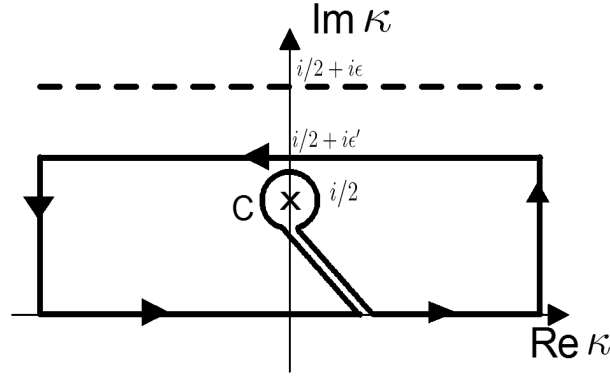


Рис. 1: Контур C .

уже не является полным после исключения из спектра одной единственной произвольной точки.

Более наглядно это можно проиллюстрировать следующим рассуждением. Поскольку дельта-функция комплексного аргумента является аналитической обобщенной функцией, она может быть представлена рядом¹ [20]

$$\delta(\kappa - i/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa_0 - i/2)^n}{n!} \delta^{(n)}(\kappa - \kappa_0). \quad (12)$$

Но в то же время для (9) имеем

$$\left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty} \right) d\kappa \delta(\kappa - i/2) \mathfrak{h}(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa_0 - i/2)^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty} \right) d\kappa \delta^{(n)}(\kappa - \kappa_0) \mathfrak{h}(\kappa) = \begin{cases} \mathfrak{h}(i/2), & \kappa_0 \neq a \\ 0, & \kappa_0 = a \end{cases}, \quad (13)$$

т.е. в зависимости от выбора произвольной точки κ_0 можно получить различные результаты для значения функционала (13). Таким образом, этот функционал, а следовательно, и матричные элементы оператора фермионного поля и функции Вайтмана в представлении Унру являются бессмысленными выражениями. Из интеграла (8) нельзя выкалывать никакую точку κ , в частности, точку 0.

Для устранения некорректности квантования Унру необходимо сделать набор бустовых мод несингулярным. Поскольку их особенности сосредоточены на световом конусе, набор бустовых мод без $\psi_0^{(\pm)}(x)$ может быть полон только в ПМ без светового конуса (четыре несвязанных сектора ПМ). Во

¹Тонкий вопрос сходимости ряда подробно рассмотрен в диссертации.

всем пространстве Минковского совокупность правых и левых мод Унру не полна, а значит квантование Унру не может привести к последовательной квантовой теории. В этом смысле наши выводы согласуются с результатами анализа квантования Унру в бозонном случае [13].

Поскольку левое и правое пространства Риндлера в случае исключения из ПМ светового конуса становятся абсолютно независимыми, то из мод Унру невозможно конструировать перепутанные состояния и рассматривать вопросы квантовых сообщений между риндлеровским и инерциальным наблюдателями. Такие задачи следует формулировать и решать в рамках стандартной квантовой теории поля в пространстве Минковского.

То же самое касается и эффектов взаимодействия релятивистских электронов с интенсивными лазерными пучками. В частности, предложенное в работах [21] в качестве "подписи эффекта Унру" излучение электроном в сильном лазерном поле пар скореллированных друг с другом фотонов было ранее предсказано и изучено стандартными методами, например, в работе [22], и в действительности не имеет к "эффекту Унру" никакого отношения.

В **третьей главе** рассматривается рождение скалярных пар с определенным значением бустового квантового числа во внешнем постоянном однородном электрическом поле E . Бустовая симметрия позволяет получить решения уравнения КФГ во внешнем поле

$$\left(4\frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} + \frac{e^2 E^2}{4} x_+ x_- - eE\mathcal{B}_K + m^2\right) \psi_\kappa(x) = 0 \quad (14)$$

в каждом из четырех секторов ПМ по-отдельности (см. Рис. 2). Однако для того, чтобы получить последовательную квантовую теорию поля, необходимо построить моды, отвечающие частицам и античастицам² в глобально определенных in ($t \rightarrow -\infty$) и out ($t \rightarrow \infty$) областях пространства Минковского.

Классифицировать решения на положительно и отрицательно частотные помогает анализ классических траекторий бустовых частиц и античастиц в электрическом поле, изображенных на Рис. 3 и 4. За ε обозначена величина

$$\varepsilon = \frac{E}{E_S} \quad (15)$$

Видно, что в in и out областях прошлого и будущего секторов присутствуют как частицы, так и античастицы. Поскольку поле сносит частицы вправо, а античастицы влево, в in и out областях правого сектора вообще нет античастиц, но зато есть падающий и уходящий потоки частиц, которым

²Мы будем называть их положительно и отрицательно частотными модами соответственно.

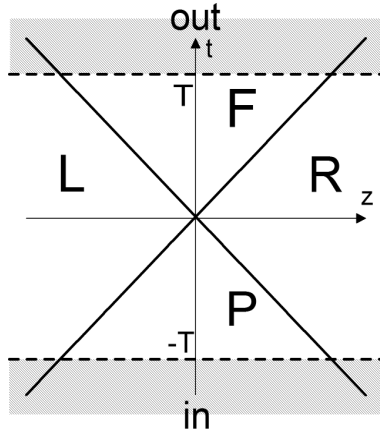


Рис. 2: Разбиение пространства Минковского на правый (R), левый (L), прошлый (P) и будущий (F) сектора. Штриховкой обозначены in и out области, $T \rightarrow \infty$.

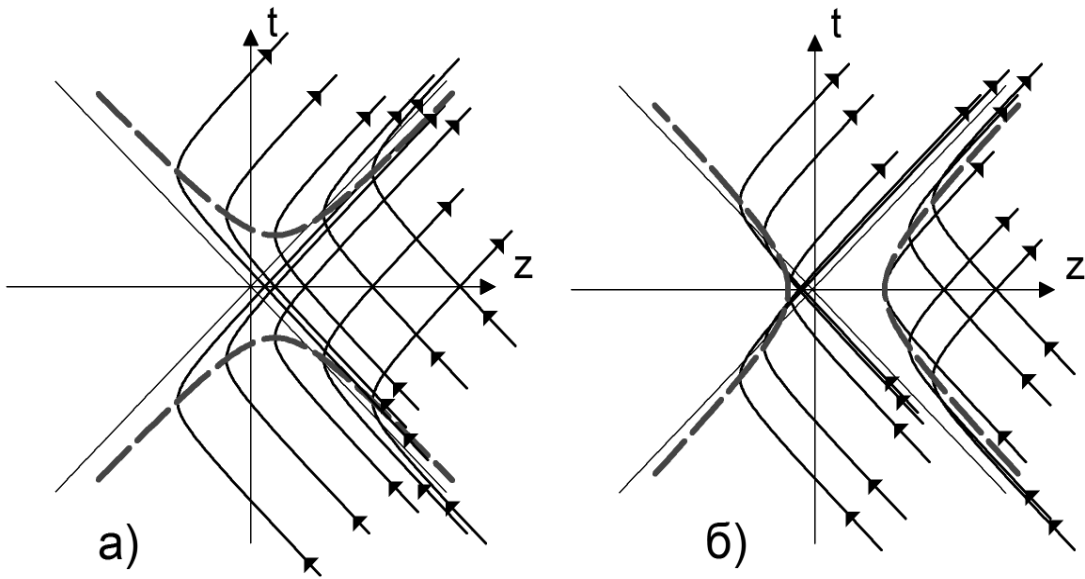


Рис 3: Траектории бустовых частиц: а) $2\epsilon\kappa > 1$ б) $2\epsilon\kappa < 1$. Классические точки поворота показаны штриховой линией. Стрелками указано направление движения частиц.

соответствуют два линейно независимых решения уравнения (14). В левом секторе, соответственно, есть падающий и уходящий потоки античастиц. Это подтверждается анализом вкладов найденных в каждом секторе решений в нормировку

$$(\psi_\kappa, \psi_{\kappa'}) = i \int dz (\psi_\kappa^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_t \psi_{\kappa'} - ieEz \psi_\kappa^* \psi_{\kappa'}). \quad (16)$$

Так, в прошлом и будущем секторах ПМ решения, отвечающие частицам и античастицам, дают, соответственно, положительные и отрицательные вклады в нормировку. Падающий поток частиц в правом секторе дает конечный положительный вклад при вычислении нормировки в in области (при $t \rightarrow -\infty$) и бесконечно малый, но тоже положительный вклад в out области

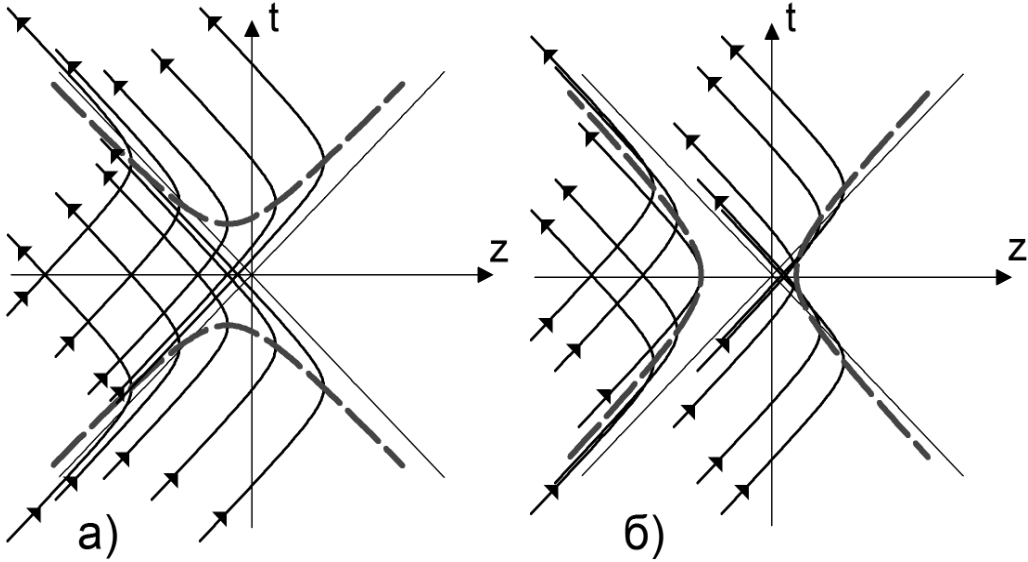


Рис 4: Траектории бустовых античастиц: а) $2\varepsilon\kappa < -1$ б) $2\varepsilon\kappa > -1$. Классические точки поворота показаны штриховой линией. Стрелками указано направление движения античастиц.

($t \rightarrow \infty$). Уходящий поток наоборот дает бесконечно малый вклад в in области и конечный в out. Аналогично дело обстоит с падающим и уходящим потоками античастиц в левом секторе, однако вклады в нормировку там отрицательные.

Для того, чтобы построить полный набор бустовых мод, надо связать полученные и классифицированные в разных секторах решения, а для этого надо научиться продолжать их через световой конус $x_{\pm} = 0$. Для этого существуют, вообще говоря, два способа. Первый использует подстановку

$$-x_{\pm} \rightarrow x_{\pm}e^{i\pi}, \quad x_{\pm} \rightarrow -x_{\pm}e^{-i\pi}, \quad (17)$$

а второй

$$-x_{\pm} \rightarrow x_{\pm}e^{-i\pi}, \quad x_{\pm} \rightarrow -x_{\pm}e^{i\pi}. \quad (18)$$

Отметим, что в свободном случае, рассмотренном в главе 1, бустовы моды тоже могут быть получены подобным образом, однако там задача значительно проще, потому что требуется продолжать всегда только одним способом: (17) для частиц и (18) для античастиц. В данной ситуации, из-за рождения пар, приходится строить продолжение, являющееся некоторой комбинацией (17) и (18). Оно строится из следующих соображений:

1. В in области положительно (отрицательно) частотные моды в прошлом секторе представляют собой решения, отвечающие частицам (античастицам) и не должны содержать падающие потоки античастиц (частиц) в L (R) секторах. В out области все аналогично с точностью до замены прошлого сектора на будущий и падающих потоков на уходящие.

2. Преобразование Боголюбова от in мод к out модам должно быть одним и тем же во всех четырех секторах ПМ.

После определения глобальных положительно и отрицательно частотных in и out мод становится возможным вычисление коэффициентов α_κ и β_κ преобразования Боголюбова

$${}^{out}\mathfrak{b}_\kappa = \alpha_\kappa {}^{in}\mathfrak{b}_\kappa + \beta_\kappa^* {}^{in}\tilde{\mathfrak{b}}_{-\kappa}^\dagger, \quad {}^{out}\mathfrak{b}_\kappa^\dagger = \beta_\kappa {}^{in}\mathfrak{b}_\kappa + \alpha_\kappa^* {}^{in}\tilde{\mathfrak{b}}_{-\kappa}^\dagger, \quad (19)$$

где ${}^{in}\mathfrak{b}_\kappa$, ${}^{in}\tilde{\mathfrak{b}}_\kappa$, ${}^{out}\mathfrak{b}_\kappa$, ${}^{out}\tilde{\mathfrak{b}}_\kappa$ – операторы уничтожения частиц и античастиц в in и out областях ПМ. Для числа пар с определенным значением бустового квантового числа κ , рождаемых полем из вакуума, можем получить

$$N_\kappa = \langle 0_{in} | {}^{out}\mathfrak{b}_\kappa^\dagger {}^{out}\mathfrak{b}_\kappa | 0_{in} \rangle = \langle 0_{in} | {}^{out}\tilde{\mathfrak{b}}_{-\kappa}^\dagger {}^{out}\tilde{\mathfrak{b}}_{-\kappa} | 0_{in} \rangle = |\beta_\kappa|^2 \delta(0) = e^{-\frac{\pi}{\varepsilon}} \delta(0), \quad (20)$$

т.е. распределение количества рожденных пар не зависит от квантового числа, как и в [7]. Значение для полного числа рожденных пар совпадает тем, что было получено в [7], т.е. не зависит от выбора квантового числа, характеризующего пары. Это подтверждает самосогласованность полученных результатов.

На основе предложенного подхода возможно, по-видимому, перейти к решению различных задач, в которых внешнее поле обладает бустовой симметрией. К таким задачам, в частности, относятся рождение пар при столкновении тяжелых ионов и эффект Хокинга в дилатонной теории гравитации.

В четвертой главе рассмотрен метод квантового кинетического уравнения в применении к задаче о рождении пар из вакуума внешним однородным, но нестационарным электрическим полем. Для удобства и для введения обозначений в начале главы приведен краткий вывод ККУ для простой модельной задачи – параметрического возбуждения одномерного квантового осциллятора с меняющейся во времени частотой $\omega(t)$ [23].

Рассмотрим зависящие от времени операторы

$$a(t) = (\omega(t)Q + iP)\Phi^*(t), \quad a^\dagger(t) = (\omega(t)Q - iP)\Phi(t), \quad (21)$$

где Q и P – операторы координаты и импульса осциллятора (пользуемся гейзенберговской картиной), а $\Phi(t)$ – квазиклассическое решение осцилляторного уравнения $\ddot{Q} + \omega^2(t)Q = 0$. Если теперь ввести оператор "числа возбуждений" $N(t) = a^\dagger(t)a(t)$, то для среднего значения этого оператора $\mathcal{N}(t)$ в данном квантовом состоянии осциллятора можно получить кинетическое уравнение

$$\dot{\mathcal{N}}(t) = \frac{\dot{\omega}(t)}{2\omega(t)} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\dot{\omega}(t')}{\omega(t')} [1 + 2\mathcal{N}(t')] \cos 2(\Theta(t) - \Theta(t')), \quad (22)$$

где $\Theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt$. В диссертации показано, что точное решение ККУ (22) может быть выражено через точное положительно частотное решение $\Psi(t)$ уравнения

$$\ddot{\Psi} + \omega^2(t)\Psi = 0. \quad (23)$$

Если осциллятор в начальный момент времени находился в состоянии $|n\rangle$, то

$$\mathcal{N}(t) = n + \frac{\omega^2(t)|\Psi(t)|^2 + |\dot{\Psi}(t)|^2 - \omega(t)}{2\omega(t)}(1 + 2n). \quad (24)$$

ККУ для скалярного поля имеет тот же вид (22) [18], что и для осциллятора, причем

$$\omega(t) = \sqrt{\pi^2 + \epsilon^2}, \quad \pi = p_z + eA(t), \quad \epsilon^2 = p_\perp^2 + m^2, \quad (25)$$

где $A(t)$ – векторный потенциал поля, направленный вдоль оси z . Величина $\mathcal{N}(t)$ теперь определяется, как $\mathcal{N}_\mathbf{p}(t) = \langle 0|a_\mathbf{p}^\dagger a_\mathbf{p}|0\rangle = \langle 0|b_\mathbf{p}^\dagger b_\mathbf{p}|0\rangle$, где $a_\mathbf{p}(t)$ и $b_\mathbf{p}(t)$ – операторы уничтожения для частиц³ и античастиц соответственно, и имеет смысл "мгновенного среднего числа частиц" (или пар).

Квантовое кинетическое уравнение для фермионного случая имеет вид [24]

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}}(t) = \frac{\epsilon e \dot{A}(t)}{2\omega^2(t)} \int_{-\infty}^t dt' \frac{\epsilon e \dot{A}(t')}{\omega^2(t')} [1 - 2\mathcal{N}(t')] \\ \times \cos [2(\Theta(t) - \Theta(t'))]. \end{aligned} \quad (26)$$

Введя "аномальное среднее" $\mathcal{V}_\mathbf{p}(t) = e^{-2i\Theta_\mathbf{p}(t)} \langle 0|a_\mathbf{p} b_\mathbf{p}|0\rangle$, это уравнение можно записать в виде системы (мы опустили спиновый индекс и индекс \mathbf{p} , поскольку коэффициенты в уравнении от них не зависят)

$$\dot{\mathcal{N}}(t) = \frac{\epsilon e \dot{A}(t)}{2\omega^2(t)} (\mathcal{V} + \mathcal{V}^*), \quad (27)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(t) = -2i\omega(t)\mathcal{V} + \frac{\epsilon e \dot{A}(t)}{2\omega^2(t)} (1 - 2\mathcal{N}). \quad (28)$$

В фермионном случае, в отличие от скалярного, сведение решения уравнений (27), (28) к решению уравнения Дирака во внешнем поле, несколько менее тривиально, прежде всего, из-за другого "статистического веса" – множителя $1 - 2\mathcal{N}$ в правой части уравнения. Тем не менее, если известно точное решение уравнения Дирака во внешнем однородном поле, которое имеет вид

³В данной главе заряд частицы принят за $-e$, а заряд античастицы за e

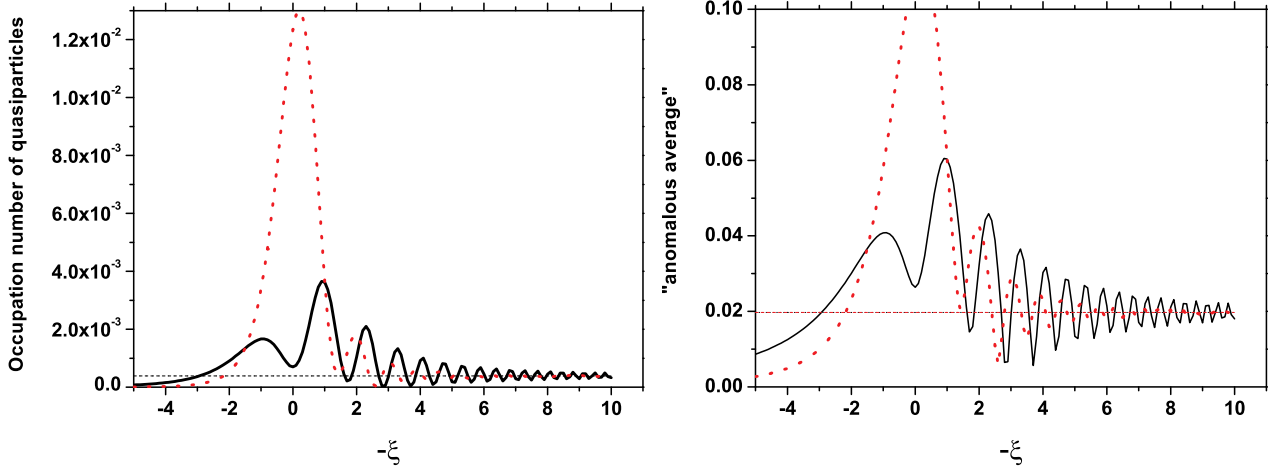


Рис. 5: Число заполнения \mathcal{N} (слева) и модуль "аномального среднего" \mathcal{V} (справа) для скалярного (точечная линия) и фермионного (сплошная линия) полей в зависимости от безразмерного времени $-\xi = \sqrt{eE}(t - p_z/eE)$ для $\varepsilon = 0.4$. Штриховые линии отвечают асимптотическим значениям при $t \rightarrow +\infty$.

$\psi(t, \mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \Psi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} u_{\pm}$, где $\gamma^0 \gamma^3 u_{\pm} = \pm u_{\pm}$, а функции $\Psi^{(\pm)}$ являются решениями уравнения

$$\ddot{\Psi}^{(\pm)} + [\omega^2(t) \pm ie\dot{A}(t)] \Psi^{(\pm)} = 0, \quad (29)$$

то из него можно получить точные решения уравнений (27), (28)

$$\mathcal{N}(t) = \frac{1}{2\omega(\omega - \pi)} \left\{ \omega^2 |\Psi^{(\pm)}|^2 + |\dot{\Psi}^{(\pm)}|^2 \mp i\omega (\dot{\Psi}^{(\pm)} \Psi^{(\pm)*} - \Psi^{(\pm)} \dot{\Psi}^{(\pm)*}) \right\}, \quad (30)$$

$$\mathcal{V}(t) = -\frac{1}{2\omega\varepsilon} \left\{ \omega^2 |\Psi^{(\pm)}|^2 - |\dot{\Psi}^{(\pm)}|^2 \mp i\omega (\dot{\Psi}^{(\pm)} \Psi^{(\pm)*} + \Psi^{(\pm)} \dot{\Psi}^{(\pm)*}) \right\}. \quad (31)$$

Применим этот метод к частному случаю постоянного поля $A(t) = -Et$. Точные решения уравнений КФГ и Дирака во внешнем поле для этого случая уже были получены ранее в [7] и в главе 2 данной диссертации. Зависимость функций \mathcal{N} и $|\mathcal{V}|$ от времени в случае как скалярного, так и фермионного полей показана на рисунках 5 и 6 для $\varepsilon \equiv eE/\epsilon^2 = 0.4$ (напряженность электрического поля меньше критической) и $\varepsilon = 10$ (напряженность электрического поля больше критической) соответственно. Начальное состояние всегда предполагается вакуумным. Видно, что в обоих случаях $\mathcal{N}(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к нулевому значению, что соответствует выбранному нами начальному условию, а при $t \rightarrow +\infty$ выходят на некоторые постоянные асимптотические значения. Эти асимптотики $-\mathcal{N}(+\infty) = e^{-\frac{\pi}{\varepsilon}}$ (как для

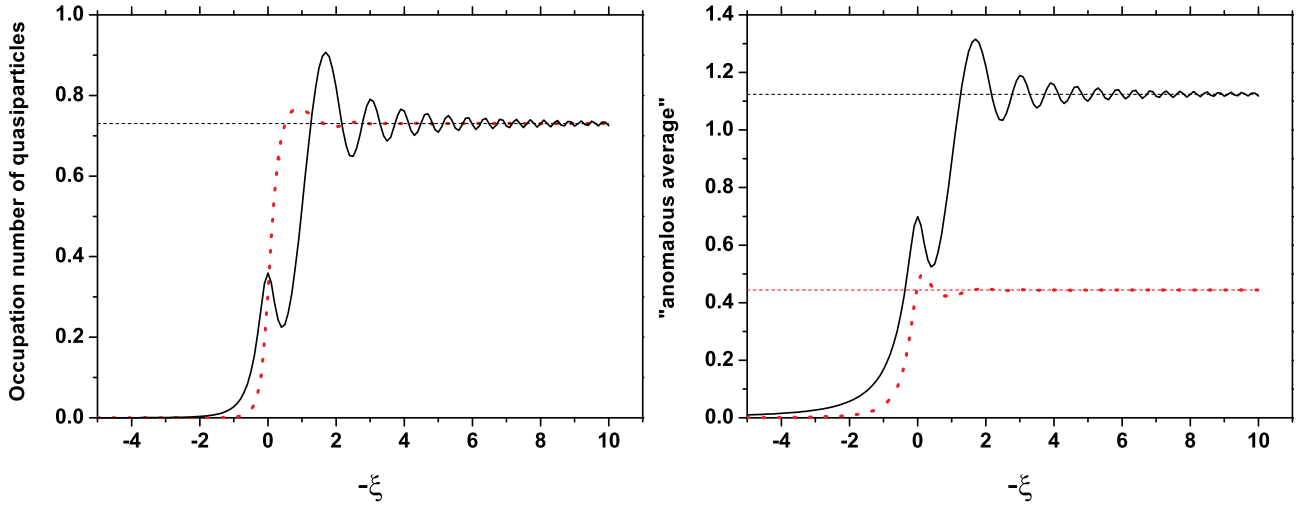


Рис. 6: Число заполнения \mathcal{N} (слева) и модуль "аномального среднего" \mathcal{V} (справа) для скалярного (точечная линия) и фермионного (сплошная линия) полей в зависимости от безразмерного времени $-\xi = \sqrt{eE}(t - p_z/eE)$ для $\varepsilon = 10$. Штриховые линии отвечают асимптотическим значениям при $t \rightarrow +\infty$.

бозонов, так и для фермионов) и $|\mathcal{V}(+\infty)| = e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}(1 \pm e^{-\frac{\pi}{\varepsilon}})^{1/2}$ (для бозонов и фермионов соответственно), как и полное число частиц, которое можно получить проинтегрировав по всем импульсам и просуммировав по значениям спина, находятся в согласии с результатами, полученными с помощью других подходов.

Следует отметить, что полученные зависимости не монотонные, а сопровождаются осцилляциями в некоторой переходной области в районе точки $t = p_z/eE$ шириной $\Delta t \sim 1/\sqrt{eE\varepsilon}$, совпадающей с "длиной когерентности" (или временем формирования) [7] процесса рождения пар. Эти колебания нельзя считать отражением реального увеличения количества рожденных пар, поскольку само понятие частиц и античастиц в переходной области не может быть строго определено. Величина \mathcal{N} характеризует одновременно как реальные частицы, так и вакуумные возмущения, и не существует способа извлечь из нее информацию только о частицах. Это означает, что, вопреки утверждениям, сделанным в некоторых других работах, процесс рождения пар не может быть разрешен на временных и пространственных масштабах, меньших длины когерентности.

3 Основные результаты и выводы работы

- Представлен новый метод построения полных наборов решений свободных уравнений Клейна-Фока-Гордона и Дирака, основанный на использовании функции Вайтмана.

- Построены наборы бустовых мод свободных фермионных массивного и безмассового полей и проанализированы их свойства. Показано, что в фермионном случае бустовы моды, как функции бустового квантового числа, обладают очень необычными особенностями на световом конусе: они представляют собой дельта-функции комплексного аргумента. Для этих обобщенных функций определен класс основных функций, т.е. вид допустимых волновых пакетов бустовых частиц.
- Проанализировано квантование Унру для случая фермионного поля и показано, что, как и в скалярном случае, процедура квантования Унру предполагает исключение нулевой моды из полного набора бустовых мод. Установлено, что выбрасывание *любой* (а не только нулевой, в отличие от скалярного случая) бустовой моды приводит к бессмысленным выражениям для оператора поля и функций Вайтмана. Из этого, в частности, следует некорректность квантования Унру для свободного фермионного поля в пространстве Минковского и отсутствие "эффекта Унру" для фермионов. Это утверждение остается верным и при рассмотрении сглаженных бустовых мод. На основании этих соображений сделан вывод о принципиальной несостоятельности предлагающихся в последнее время экспериментов по проверке "эффекта Унру" и реализации на его основе перепутанных состояний.
- Впервые найдены полные наборы in и out решений уравнения Клейна-Фока-Гордона во внешнем постоянном однородном электрическом поле, являющихся собственными функциями оператора буста. Вычислено количество частиц, характеризующихся определенным значением бустового квантового числа, рождаемых внешним полем из вакуума в каждой моде. Показано, что полное число рожденных частиц не зависит от выбора квантового числа.
- Разработан новый подход к задачам о рождении пар во внешнем поле, основанный на методе квантового кинетического уравнения (ККУ) и продемонстрирована эквивалентность метода ККУ другим подходам к этой задаче. Для фермионного поля это сделано впервые. Получены явные решения ККУ в постоянном электрическом поле.

Публикации автора по теме диссертации

1. Мур В. Д., Нарожный Н. Б., Федотов А. М., Гельфер Е. Г. Проблема Унру для фермионов в двумерном пространстве-времени // Сборник научных трудов «Научная Сессия МИФИ-2006» — 2006. — Т. 5, С. 173–175.

2. Федотов А. М., Нарожный Н. Б., Мур В. Д. и Гельфер Е. Г. О неполноте фермионных мод Унру в пространстве Минковского// Письма в ЖЭТФ. — 2009. — Т. 89. — С. 449–453.
3. Fedotov A. M., Gelfer E. G., Korolev K. Yu. and Smolyansky S. A. Kinetic equation approach to pair production by a time-dependent electric field// Phys. Rev. D. — 2011. — Vol. 83. — 025011.
4. Гельфер Е. Г., Мур В. Д., Нарожный Н. Б., Федотов А. М. О рождении бустовых пар постоянным электрическим полем// ЖЭТФ. — 2011. — Т. 140. — Вып. 5. — С. 1–15.
5. Гельфер Е. Г., Федотов А. М., Мур В. Д., Нарожный Н. Б. Квантование на бустовых модах скалярного и фермионного полей// Сборник научных трудов «Научная Сессия МИФИ-2011» — 2011. — Т. 2, С. 171.
6. Gelfer E. G., Fedotov A. M., Mur V. D., Narozhny N. B. Boost modes for a massive fermion field. arXiv:1107.0881 [hep-th] (2011).

Цитируемая литература

- [1] Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses / C. Bamber, S. J. Boege, T. Koffas, T. Kotseroglou, A. C. Melissinos, D. D. Meyerhofer, D. A. Reis et al. // *Phys. Rev. D.* — Oct 1999. — Vol. 60, no. 9. — P. 092004.
- [2] Ultra-high intensity- 300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate / V. Yanovsky, V. Chvykov, G. Kalinchenko, P. Rousseau, T. Planchon, T. Matsuoka, A. Maksimchuk et al. // *Opt. Express.* — 2008. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 2109–2114.
- [3] Extreme Light Infrastructure : Report on the Grand Challenges Meeting, 27-28 April 2009, Paris / Ed. by G. Korn, P. Antici. — Paris, 2009.
- [4] *Dunne M.* A high-power laser fusion facility for europe // *Nature Phys.* — 2006. — Vol. 2. — Pp. 2–5.
- [5] *Narozhny N. B., Bulanov S. S., Mur V. D., Popov V. S.* e^+e^- -pair production by a focused laser pulse in vacuum // *Physics Letters A.* — 2004. — Vol. 330, no. 1–2. — Pp. 1 – 6.
- [6] *Bulanov S. S., Mur V. D., Narozhny N. B., Nees J., Popov V. S.* Multiple colliding electromagnetic pulses: A way to lower the threshold of e^+e^- pair production from vacuum // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104, no. 22. — P. 220404.
- [7] *Нижкишов А. И.* Образование пар постоянным внешним полем // *ЖЭТФ.* — 1969. — Т. 57. — С. 1210 – 1216.
- [8] *Нижкишов А. И., Нарожный Н. Б.* Простейшие процессы в электрическом поле, порождающем пары // *Ядерная Физика.* — 1970. — Т. 11. — С. 1072–1077.
- [9] *Unruh W. G.* Notes on black-hole evaporation // *Phys. Rev. D.* — 1976. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 870–892.

- [10] *Soffel M., Müller B., Greiner W.* Dirac particles in Rindler space // *Phys. Rev. D.* — 1980. — Vol. 22, no. 8. — Pp. 1935–1937.
- [11] *Никишов А. И., Рутыс В. И.* Процессы, вызванные заряженной частицей в электрическом поле и концепция тепловой бани Унру // *ЖЭТФ.* — 1988. — Т. 94. — С. 31.
- [12] *Gerlach U. H.* Minkowski Bessel modes // *Phys. Rev. D.* — 1988. — Vol. 38, no. 2. — Pp. 514–521.
- [13] *Narozhny N. B., Fedotov A. M., Karnakov B. M., Mur V. D., Belinskii V. A.* Boundary conditions in the Unruh problem // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Vol. 65, no. 2. — P. 025004.
- [14] *Grumiller D., Kummer W., Vassilevich D. V.* Dilaton gravity in two dimensions // *Physics Reports.* — 2002. — Vol. 369, no. 4. — Pp. 327 – 430.
- [15] *Katanaev M. O., Kummer W., Liebl H.* Geometric interpretation and classification of global solutions in generalized dilaton gravity // *Phys. Rev. D.* — 1996. — Vol. 53, no. 10. — Pp. 5609–5618.
- [16] *Christensen S. M., Fulling S. A.* Trace anomalies and the Hawking effect // *Phys. Rev. D.* — Apr 1977. — Vol. 15, no. 8. — Pp. 2088–2104.
- [17] *Tuchin K.* Pair production by boost-invariant fields in comoving coordinates // *J. Phys. G.* — 2007. — Vol. 34. — P. 2633.
- [18] *Pervushin V., Skokov V. V., Reichel A., Smolyansky S. A., Prozorkevich A.* The kinetic description of vacuum particle creation in the oscillator representation // *Int.J.Mod.Phys. A.* — 2005. — Vol. 20. — P. 5689.
- [19] *Bloch J. C. R., Mizerny V. A., Prozorkevich A. V., Roberts C. D., Schmidt S. M., Smolyansky S. A., Vinnik D. V.* Pair creation: Back reactions and damping // *Phys. Rev. D.* — 1999. — Vol. 60, no. 11. — P. 116011.
- [20] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — Москва: ФМ, 1955. — Т. 1.
- [21] *Schützhold R., Schaller G., Habs D.* Signatures of the Unruh effect from electrons accelerated by ultrastrong laser fields // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97, no. 12. — P. 121302.
- [22] *Morozov D. A., Ritus V. I.* Elastic electron scattering in an intense field and two-photon emission // *Nucl. Phys. B.* — 1975. — Vol. 86, no. 2. — Pp. 309–332.
- [23] *Popov V. S., Trusov M. A.* Generating functions and sum rules for quantum oscillator // *Physics Letters A.* — 2009. — Vol. 373, no. 22. — Pp. 1925 – 1927.
- [24] *Schmidt S., Blaschke D., Ropke G., Smolyansky S. A., Prozorkevich A. V.* A quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism // *Int.J.Mod.Phys. E.* — 1998. — Vol. 7. — Pp. 709–722.