

На правах рукописи

Глызин Сергей Дмитриевич

**БИФУРКАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ
В ЦЕПОЧКАХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА – 2009

Работа выполнена в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова.

Научный консультант: д.ф.-м.н., проф. А.Ю. Колесов (ЯрГУ)
Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., проф. В.Н. Белых (ВГАВТ)
д.ф.-м.н., проф. Г.Г. Малинецкий (ИПМ РАН)
д.ф.-м.н., проф. В.А. Соболев (СамГУ)
Ведущая организация: Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета

Защита состоится “___” _____ 2009 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Московском инженерно-физическом институте (государственном университете) по адресу:
115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского инженерно-физического института.

Автореферат разослан “___” _____ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор

Леонов А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В диссертационной работе рассматриваются бифуркационные сценарии, возникающие в цепочках связанных близких осцилляторов. Объект исследований имеет, с одной стороны, самостоятельную ценность, поскольку может описывать различные прикладные задачи, связанные со взаимодействием колебательных систем различной природы, с другой стороны, системы диффузионно связанных осцилляторов являются удачной моделью для ряда краевых задач параболического и гиперболического типа. Являясь по сравнению с этими задачами существенно более простым объектом, цепочки нелинейных автоколебательных систем сохраняют их наиболее важные динамические свойства. С этой точки зрения особое значение имеет задача «реакция-диффузия», представляющая собой эволюционное уравнение, в котором пространственно-временные изменения изучаемой переменной обусловлены диффузией по пространственной переменной и нелинейным, обычно колебательным, поведением по времени. Ряд важных моделей биологии и физики сводится именно к уравнению типа «реакция-диффузия». При решении этих задач часто возникают существенные трудности вычислительного характера, в связи с чем требуется предварительный асимптотический анализ, который иногда позволяет определить качественную структуру пространства состояний изучаемых динамических систем и возможные фазовые перестройки при изменении параметров. Один из возможных методов изучения качественного поведения решений задачи типа «реакция-диффузия» состоит в замене соответствующих уравнений в частных производных системами связанных осцилляторов.

Цель работы

Целью предпринятых автором исследований являлось выяснение совместной динамики цепочек связанных осцилляторов и эффектов, сопутствующих фазовым перестройкам, при изменении бифуркационного параметра.

Для достижения поставленной цели автором выполнялся локальный асимптотический анализ, позволяющий свести исследуемую систему к нормальной в случае конечномерного и квазинормальной в случае бесконечномерного вырождения форме. Поскольку область действия асимптотических формул ограничена как по области фазового пространства, так и по границам изменения бифуркационного параметра, оказывается уместным при-

менение численных методов. Именно удачное сочетание асимптотических и численных методов позволило в ряде случаев понять природу происходящих с динамической системой фазовых перестроек.

Основные результаты. Научная новизна

1. Построена и проанализирована нормальная форма для двух диффузионно связанных колебательных систем. Определены сценарии фазовых перестроек. Впервые получены условия возникновения и потери устойчивости неоднородных автомодельных циклов и торов данной системы. Найдены условия реализации квазифейгенбаумовского бифуркационного сценария, в котором переход от одного самосимметричного цикла к другому циклу условно двойного периода происходит через каскад бифуркаций потери симметрии, стандартных удвоений периода, возникновений и исчезновений хаотических аттракторов. На примере из нейродинамических приложений выполнен численный эксперимент, позволяющий оценить границы применимости асимптотических методов.
2. В целях повышения точности и надежности вычисления ляпуновских экспонент разработан и обоснован новый вариант алгоритма Беннетина (метод динамических перенормировок) для их определения.
3. Для трех однонаправленно связанных в кольцо осцилляторов показан способ построения системы с хаотическим аттрактором. Подробно разобран один радиофизический пример. Установлены границы применимости асимптотических методов.
4. Для цепочки диффузионно слабо связанных колебательных систем на устойчивом интегральном многообразии построена и проанализирована система разностей фаз осцилляторов. В случае, когда число осцилляторов в цепочке растет, численными методами показано, что ляпуновская размерность аттрактора увеличивается по близкому к линейному закону. Произведен обширный численный эксперимент для разностной модели уравнения Гинзбурга - Ландау, в котором проиллюстрирован этот результат и определены границы применимости асимптотических методов.
5. Получено обобщение результатов для трех однонаправленно связанных в кольцо осцилляторов на случай, когда парциальная колебательная система представляет собой краевую задачу гиперболического типа (обобщенное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью).

Показано, что такая система может иметь сколь угодно большое число хаотических аттракторов.

6. Для цепочки диффузионно слабо связанных систем гиперболического типа обнаружен и обоснован механизм накопления хаотических аттракторов. В частности, установлено, что при изменении управляющего параметра в такой системе могут наблюдаться две принципиально различные ситуации: 1) сосуществует счетное число конечномерных хаотических аттракторов; 2) существует хаотический аттрактор бесконечной размерности.
7. Рассмотрена феноменологическая модель развития турбулентности в соответствии со сценариями Ландау и Ландау - Селла, по первому из которых возникновение турбулентного аттрактора происходит в результате каскада бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей, а во втором происходят фазовые перестройки хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых при подходящем изменении параметров неограниченно растет.
8. Выяснен и обоснован механизм накопления однопериодических аттракторов (устойчивых предельных циклов) у слабо возмущенных динамических систем маятникового типа. С этой целью определены частичные пределы функций Мельникова на резонансных циклах.
9. Для сингулярно возмущенного логистического уравнения с двумя запаздываниями показано, что его квазинормальной формой служат краевые задачи параболического типа с кубической нелинейностью и антипериодическими краевыми условиями. Обнаружен эффект нарастания числа сосуществующих устойчивых режимов уравнения при приближении его параметра к критическому значению.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях качественного поведения нелинейных краевых задач параболического и гиперболического типа и систем дифференциально-разностных уравнений.

Материал диссертации представляет интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений, нелинейной динамики и хаоса. Работа может быть востребована во многих отечественных и международных математических центрах, где ведутся исследования, связанные с дифференциальными уравнениями и их приложениями.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы излагались на Международной конференции “Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике”. Минск, 15-20 сентября 1993; 3-й Международной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород, сентябрь 1993; XXVI Воронежской зимней математической школе. Воронеж; Int. Conference "Criteria of selforganization in physical, chemical and biological systems". Moscow-Suzdal, June 12-18, 1995; на Международном семинаре “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Самара. 27-30 июня 1995; Международной конференции “Нелинейные дифференциальные уравнения”. Киев, Август 21-27. 1995; на “Понтрягинских чтениях – VII, XV, XVI, XVII”. Воронеж. ВГУ, 1996, 2004, 2005, 2006; Конференции, посвященной 90-летию со дня рождения ак. А.Н.Тихонова. "Теория и приложения методов малого параметра". Обнинск, 2-6 июля 1996 г.; International Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos. ICND-96. Saratov, Russia. July 8-14, 1996; IV и V Международных конференциях “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород, 1996, 1999; Всероссийской научной конференции, посвященной 200-летию ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2003; VI International Congress on Mathematical Modeling. Sept. 20-26, 2004, Nizhny Novgorod; Всероссийской научной конференции “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Воронеж, 2005; на Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна – 2006, 2008. Воронеж: ВорГУ; International Conference “Tikhonov and Contemporary Mathematics”, Moscow, June 19-25 2006; на VIII международной школе “Хаотические автоколебания и образование структур”, 9-14 октября 2007 г. Саратов; Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи). Самара: СамГТУ, 2008.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в более чем 30 работах, из них 17 статей в научных журналах списка ВАК и 12 тезисов докладов на международных конференциях. Все результаты совместных статей, включенные в диссертацию, получены лично автором, результаты статьи [17], принадлежащие научному консультанту Колесову А.Ю. и Розову Н.Х., приведены в целях связности изложения, что специально оговорено в тексте диссертации.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, списка литературы (155 наименований) и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 271 страницу.

Общая схема работы такова: сначала изучается система из минимально возможного числа (двух) осцилляторов. Причем для формулировки строгих результатов предполагается, что каждый из осцилляторов находится вблизи бифуркации Андронова - Хопфа, а связь между ними слабая. На основе полученных асимптотических формул делаются выводы о поведении решений нескольких конкретных систем из нейродинамики, а затем численными методами устанавливаются границы применимости этих асимптотик. Затем изучается поведение большего числа осцилляторов. Речь идет о трех однонаправленно связанных в кольцо колебательных системах. Далее рассматривается уже сколь угодно большое число диффузионно связанных осцилляторов, в случае когда их амплитуды близки, а общее поведение описывается системой дифференциальных уравнений для разностей фаз. В этой ситуации обнаруживается явление, составляющее один из главных результатов работы: ляпуновская размерность аттрактора соответствующей системы монотонно растет по почти линейному закону с ростом числа осцилляторов. В последних частях работы рассмотрены в одном случае краевые задачи гиперболического типа, которые при разложении по модам дают счетную систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений, а в другом — сингулярно возмущенное уравнение с двумя запаздываниями, также сводящееся, в конечном итоге, к модельной системе из счетного числа осцилляторов. Для того, чтобы показать, что сложность поведения решений динамической системы не обязательно является результатом взаимодействия большого числа осцилляторов, в работе рассмотрены несколько моделей с полутора степенями свободы и показано наличие у них явления мультистабильности и буферности.

Содержание работы

Во **введении** описана постановка задачи, а также кратко изложено содержание диссертации по главам. Указаны цели диссертации, основные методы исследования, актуальность и научная новизна результатов. Кроме того, описан применяемый в работе для численного анализа метод динамической перенормировки.

Коротко остановимся на источниках происхождения задач о связанных осцилляторах и соответственно на **актуальности** темы исследований. Сразу отметим довольно большое число моделей такого рода, возникающих как результат изучения взаимодействующих механических, электрических, биологических систем (см. [1–4]). Одним из характерных примеров, особенно активно изучаемых в последнее время, является задача о взаимодействии нервных клеток, на решение которой в значительной мере направлены усилия в области нейродинамики (см. [5, 6]). С другой стороны, источником систем диффузионно взаимодействующих осцилляторов являются различные краевые задачи, в частности краевая задача типа “реакция-диффузия”, которая представляет собой важный объект исследований в проблеме изучения механизмов пространственно-временных флуктуаций в моделях биологических и физических систем. Выпишем эту задачу в простейшем случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (1)$$

когда областью изменения пространственной переменной является отрезок $[0, 1]$, а вектор-функция $u(t, x) \in R^2$. Будем считать, что чисто мнимому собственному числу $i\omega$ матрицы A_0 соответствует собственный вектор a , а собственному числу $-i\omega$ сопряженной матрицы A_0^* — собственный вектор b , причем $(a, b) = 1$. Предположим, что $D = \text{diag} \{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = 1$, $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$, где вектор-функции F_2, F_3 линейны по каждому аргументу, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Вещественную часть первой ляпуновской величины, вычисленной при $\varepsilon = 0$,

$$d_0 + i\omega c_0 = (F_3(\bar{a}, a, a) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(a, v_0) + F_2(v_0, a) + F_2(v_1, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, v_1), b), \quad (2)$$

где $v_0 = -A_0^{-1}(F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a))$, $v_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1}F_2(a, a)$, полагаем отрицательной, а матрицу A_1 такой, что пара собственных чисел матрицы $A_0 + \varepsilon A_1$ переходит при $\varepsilon > 0$ в правую комплексную полуплоскость. Условия

$$\text{Re}(A_1 a, b) > 0 \text{ и } d_0 < 0 \quad (3)$$

обеспечивают существование пространственно однородных периодических режимов краевой задачи (1), которые устойчивы при достаточно большом ν . Важной задачей при изучении структуры распределенных устойчивых решений задачи (1) является проблема определения характера потери устойчивости пространственно однородного решения и исследование ветвящихся при этом режимов. Непосредственный анализ краевой задачи (1) приводит к серьезным трудностям, поэтому имеет смысл рассмотреть упрощенную

модель, которая бы сохраняла существенные свойства исходной краевой задачи. В этом смысле не до конца исследованными остаются разностные аппроксимации по пространственным переменным, простейшие из которых мы и рассмотрим. Заменяем в краевой задаче (1) оператор дифференцирования по пространственной переменной разностным так, что

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \nu DN^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F(u_j), \quad (4)$$

узлы аппроксимации выберем в точках $x_j = (j - 1/2)/N$, ($j = 1 \dots N$). Краевые условия заменим на

$$u_0 = u_1, \quad u_N = u_{N+1}. \quad (5)$$

Таким образом, получена система связанных идентичных друг другу осцилляторов с диффузионной связью. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (4), (5) является в данной работе одним из основных объектов исследования. Важным обобщением данной системы является задача о диффузионном взаимодействии колебательных систем с бесконечномерным фазовым пространством. В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений для парциального осциллятора из (4) заменяется краевой задачей или уравнением с запаздыванием. В случае когда эта краевая задача имеет единственный аттрактор (например, цикл или тор), ее исследование, как правило, не значительно отличается от исследования задачи (4), (5). Однако каждая из таких парциальных задач может иметь большое, даже счетное число аттракторов. Динамические свойства диффузионно связанных колебательных систем, у каждой из которых имеется несколько аттракторов, также являются одним из объектов исследования работы.

Глава 1. Диффузионное взаимодействие двух близких осцилляторов

Изучение связанных динамических систем колебательного типа естественно начинать с простейшего случая, когда таких систем только две. В связи с этим первая глава работы посвящена динамике слабого диффузионного взаимодействия пары идентичных нелинейных динамических систем, каждая из которых имеет устойчивый предельный цикл, возникающий в результате бифуркации Андронова – Хопфа. Использование метода нормальных форм позволяет проследить за фазовыми перестройками совокупной динамической системы при изменениях коэффициента диффузии. Оказалось, что общий сценарий таких перестроек существенно меняется при изменении первой ляпуновской величины, определяющей характеристики

периодических синхронных колебаний. На плоскости параметров динамической системы выделены области значений с различными сценариями фазовых перестроек, в частности, найдена область, в которой нормализованная динамическая система имеет каскад бифуркаций хаотических аттракторов. Следует сразу отметить, что доказательство утверждения о соответствии между решениями исходной и нормализованной систем удастся получить лишь для грубых циклов и торов и при достаточно малой надкритичности. В случае, когда надкритичность велика или нормализованная система имеет хаотические аттракторы, необходим численный анализ. Во втором разделе данной главы описаны результаты численного эксперимента, выполненного для системы из двух уравнений с запаздыванием из нейродинамики.

Рассмотрим систему (4)-(5) в простейшем случае $N = 2$, тогда приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon D(u_2 - u_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_1 + F(u_1), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon D(u_1 - u_2) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_2 + F(u_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где $4D$ обозначено снова D , а $\nu = \varepsilon$. Система (6) соответствует разбиению отрезка изменения x на две части. Понятно, что система (6), так же как и система (4)-(5), для других разбиений имеет важное самостоятельное значение, поскольку описывает взаимодействие двух или большего числа слабо связанных осцилляторов. Нормализация системы (6) позволяет выделить амплитудные и фазовые переменные и исследовать характер потери устойчивости пространственно однородного (синхронного $u_1(t) \equiv u_2(t)$) периодического решения. Наша цель состоит в выделении параметров, определяющих динамику (6), и исследовании областей бифуркаций циклов, торов и странных аттракторов этой системы.

В соответствии со стандартным алгоритмом нормализации (см., например, [7, 8, 30]) система (6) с помощью замены

$$u_j(t, s) = \sqrt{\varepsilon}u_{0j}(t, s) + \varepsilon u_{1j}(t, s) + \varepsilon^{3/2}u_{2j}(t, s) + \dots, \quad j = 1, 2, \quad s = \varepsilon t, \quad (7)$$

где $u_{0j}(t, s) = z_j(s) \exp(i\omega t)a + \bar{z}_j(s) \exp(-i\omega t)\bar{a}$, а $u_{1j}(t, s)$ и $u_{2j}(t, s) - 2\pi/\omega$ -периодические по t функции, может быть сведена к системе для медленно меняющихся комплексных амплитуд $z_1(s)$ и $z_2(s)$.

$$\begin{aligned} z_1' &= (A_1 a, b)z_1 + (d_0 + ic_0)|z_1|^2 z_1 + (Da, b)(z_2 - z_1), \\ z_2' &= (A_1 a, b)z_2 + (d_0 + ic_0)|z_2|^2 z_2 + (Da, b)(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

которая представляет собой нормальную форму системы (6) с отброшенными членами более высокого по ε порядка малости. В системе (8) штрихом

обозначена производная функций $z_j(s)$ по s , а коэффициент $d_0 + ic_0$ при кубической нелинейности задается формулой (2). Считаем, что выполнено условие (3). Это гарантирует возникновение у каждой парциальной системы (6) в результате бифуркации Андронова – Хопфа орбитально асимптотически устойчивого цикла.

Будем называть *автомодельным циклом* системы (8) ее периодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0 \exp(i\sigma s), \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

где $z_j^0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ – некоторые постоянные. В свою очередь *двумерным автомодельным тором* системы (8) будем называть ее квазипериодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0(s) \exp(i\sigma s), \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

где σ – вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(s)$, $j = 1, 2$ периодичны по s с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (10) не приводится к виду (9).

Для автомодельных циклов и торов системы (8) выполнена следующая стандартная теорема о соответствии

Теорема 1. *Предположим, что система (8) имеет некоторый автомодельный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (6) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (7) с учетом равенств (9) или (10) соответственно.*

С помощью нормирующих замен $z_j(s) = (-\operatorname{Re}(A_1 a, b)/d_0)^{1/2} \xi_j(s) e^{i\tau_j(s)}$, $\operatorname{Re}(A_1 a, b)s \rightarrow s$ от системы (8) может быть отцеплена трехмерная система относительно амплитуд ξ_1, ξ_2 и разности фаз $\alpha = \tau_2 - \tau_1$

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varkappa \xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \varkappa \xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2, \\ \alpha' &= -\varkappa \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b_0(\xi_1^2 - \xi_2^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\psi_0 = \operatorname{Im}(A_1 a, b)/\operatorname{Re}(A_1 a, b)$, $\varkappa = |(Da, b)|/\operatorname{Re}(A_1 a, b)$, $\delta = \arg((Da, b))$, $b_0 = c_0/d_0$.

Рассмотрим поведение системы (11) при фиксированных δ, b_0 и изменении параметра связи \varkappa . На плоскости параметров δ и b_0 будем рассматривать лишь полосу $-\pi/2 \leq \delta \leq 0$, поскольку вне ее состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ оказывается неустойчивым при достаточно больших \varkappa . В этой полосе можно выделить две области с принципиально разными сценариями качественных

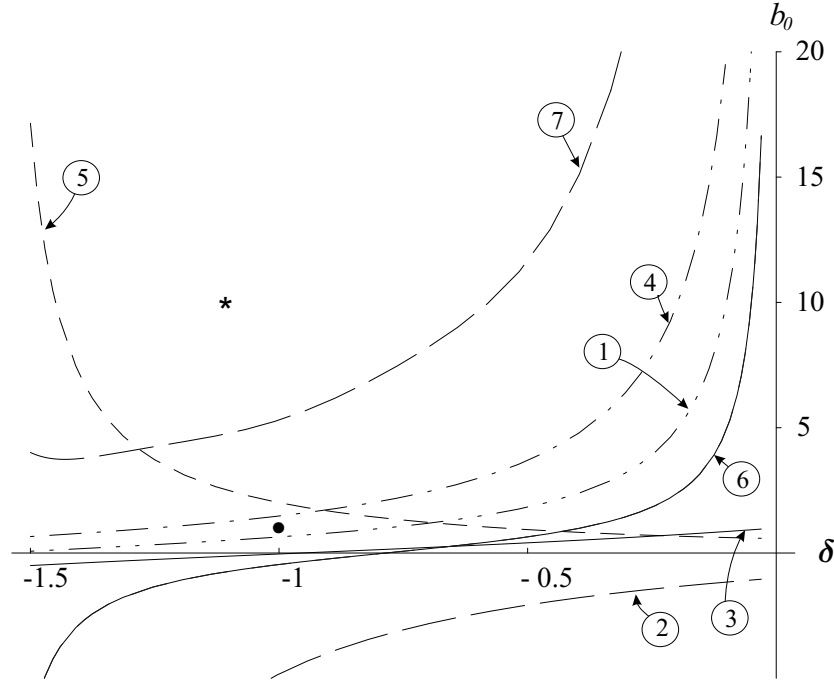


Рис. 1.

перестроек динамической системы (11). На рис. 1 эти области разделяет кривая с номером семь. Сценарии фазовых перестроек проиллюстрируем на примере двух типичных случаев, при которых реализуются соответственно первый и второй из них, а затем опишем кривые, построенные на рис. 1.

Теорема 2. Пусть в системе (11) $\delta = -\arctg(\pi/2)$, $b_0 = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$ (выполнено для системы диффузионно слабо связанных уравнений Хатчинсона, соответствующая точка отмечена на рис. 1 кружком), тогда в ней при уменьшении \varkappa происходят следующие фазовые перестройки:

1. При значениях параметра $\varkappa > \varkappa_{\pi,1} \approx 0.931$ глобально устойчивым является единственное состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ (соответствует синхронному периодическому режиму у исходной системы), а при $\varkappa < \varkappa_{\pi,1}$ к нему добавляется неустойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы).

2. При уменьшении \varkappa до значения $\varkappa = \varkappa_{AC} \approx 0.544$ из “воздуха” рождаются еще два устойчивых состояния равновесия – точки $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*, 0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и два неустойчивых – $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $D = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*, 0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того $\eta_1^* > \xi_1^*, \xi_2^* > \eta_2^*$ (соответствуют не синхронизированным периодическим режимам у исходной системы). Состояния равновесия A и B устойчивы при уменьшении параметра \varkappa вплоть до значения $\varkappa_C \approx 0.524$.

3. При $\varkappa = \varkappa_C$ состояния A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова-Хопфа). (Этим

циклам системы (11) соответствуют не синхронизированные квазипериодические колебания системы (6).)

4. При $\kappa = \kappa_{кр} \approx 0.5015$ (критическое для пространственно однородных режимов значение) неустойчивые неподвижные точки C и D сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают его устойчивость.

5. При дальнейшем уменьшении κ устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из точек A и B , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $\kappa = \kappa_S \approx 0.481$ не сожмутся в точке $(1, 1, 0)^T$. В результате происходит объединение пары циклов в один C_U , который остается устойчивым вплоть до значения $\kappa = \kappa_{\pi,3} \approx 0.429$.

6. При $\kappa = \kappa_{\pi,2} \approx 0.466$ от неустойчивого состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа ответвляется неустойчивый цикл C_{II} , который при $\kappa = \kappa_{\pi,3}$ сливается с устойчивым циклом C_U и исчезает.

7. При $\kappa_{\pi,3} > \kappa > 0$ система имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе системы (6).

Формулы для определения величин $\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*$ и бифуркационных значений κ даны в п. 1.1.2 диссертации. Для значений δ, b_0 , расположенных между кривыми, отмеченными числами семь и единицей, не происходит существенных изменений в вышеизложенном сценарии. Лишь для точек плоскости, лежащих выше кривой, отмеченной числом 5, последняя из описанных бифуркаций упрощается: устойчивый цикл не аннигилирует с неустойчивым, а стягивается при $\kappa = \kappa_{\pi,2}$ в состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$. Кроме того, для точек области, расположенных выше кривой, отмеченной четверкой, при потере устойчивости однородного состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$ от него ответвляются устойчивые неподвижные точки A и B , а докритических устойчивых режимов не существует.

Теорема 3. Пусть параметры системы (11) принимают значения $\delta = -\pi/3$ и $b_0 = 10$ (соответствующая точка отмечена на рис. 1 звездочкой), тогда выполнены следующие утверждения:

1. При $\kappa > \kappa_{кр} \approx 8.16$ однородное состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ – глобально устойчиво, докритических режимов нет.

2. Уменьшение κ приводит к ответвлению при $\kappa = \kappa_{кр}$ пары состояний равновесия A и B , наследующих устойчивость однородного режима.

3. При $\kappa_{кр} < \kappa < \kappa_{S,2} \approx 2.059$ состояния равновесия A и B остаются единственными устойчивыми режимами системы.

4. При $\kappa = \kappa_S \approx 2.898$ сепаратрисы, выходящие из седлового однородного состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$, возвращаются в него, образуя две

симметричные петли, из которых при дальнейшем уменьшении κ рождается пара неустойчивых симметричных циклов C_A и C_B .

5. При $\kappa = \kappa_{A,1}$ неустойчивые направления седлового однородного состояния равновесия попадают на устойчивые многообразия неустойчивых предельных циклов C_A и C_B . Отметим, что состояния равновесия A и B остаются по-прежнему устойчивыми.

6. При $\kappa < \kappa_{A,1}$ колебания становятся неупорядоченными, рождается странный аттрактор.

7. При $\kappa = \kappa_C \approx 1.94$ неподвижные точки A и B теряют устойчивость в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа: в них стягиваются неустойчивые циклы C_A и C_B .

Бифуркации, происходящие с системой (11), при $\kappa_C > \kappa > 0$ удобнее описывать при возрастающем κ .

8. При $0 < \kappa < \kappa_{\pi,2} = 0.5$ глобально устойчива точка $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$.

9. При $\kappa = \kappa_{\pi,2}$ от состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ ответвляется самосимметричный устойчивый цикл C_{Π} (бифуркация Андронова-Хопфа).

10. При $\kappa = \kappa_{\pi,1}$ состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ пропадает.

11. При $\kappa = \kappa_1^S \approx 1.4$ симметрия цикла C_{Π} теряется, он расщепляется на два симметричных друг другу цикла C_1^T, \bar{C}_1^T .

12. При $\kappa = \kappa_{1,1} \approx 1.4589, \kappa_{1,2} \approx 1.4594 \dots \kappa_{1,\infty} \approx 1.45955$ с каждым из циклов C_1^T, \bar{C}_1^T происходит каскад бифуркаций удвоения периода. В результате при $\kappa > \kappa_{1,\infty}$ имеем два симметричных странных аттрактора A_1^T, \bar{A}_1^T , возникших по фейгенбаумовскому сценарию.

13. При $\kappa = \kappa_1^H \approx 1.4596$ пара симметричных странных аттракторов A_1^T, \bar{A}_1^T объединяется в один самосимметричный A_1^S , который при $\kappa = \kappa_1^A \approx 1.46$ превращается в самосимметричный двухобходный цикл C_1^S , условно “двойного” по сравнению с C_{Π} периода.

14. При увеличении κ процесс повторяется: при $\kappa = \kappa_2^S \approx 1.5$ теряется симметрия цикла C_2^S , затем с каждым из пары родившихся циклов C_2^T, \bar{C}_2^T при $\kappa = \kappa_{2,1} \approx 1.507, \kappa_{2,2} \approx 1.5072 \dots \kappa_{2,\infty} \approx 1.5073$ происходят бифуркации удвоения, завершающиеся рождением симметричных странных аттракторов A_2^T, \bar{A}_2^T и т.д.

Таким образом, имеем каскад бифуркаций странных аттракторов $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S$ и циклов $C_j^T, \bar{C}_j^T; C_j^S, j = 1, 2 \dots$ сопровождающийся усложнением их структуры. Вычислена оценка значения $\kappa_{\infty} \approx 1.527$, к которому сходятся последовательности $\kappa_n^H, \kappa_n^A, \kappa_n^S, \kappa_{n,\infty}$ при $n \rightarrow \infty$.

Опишем кривые, изображенные на рис. 1. Числом один помечена кривая, для которой критическое значение $\kappa_{кр}$ обращается в нуль, тем самым,

для δ, b_0 ниже данной кривой однородное состояние равновесия устойчиво при всех положительных значениях \varkappa . Кривые, помеченные числами два, три и четыре, делят плоскость на области так, что между кривыми два и три, а также выше кривой четыре расположены значения δ, b_0 , для которых система (11) не имеет при $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}}$ неоднородных состояний равновесия A, B, C, D , а для значений δ, b_0 из остальных областей такие состояния равновесия имеются. Далее, числом шесть на рис. 1 отмечен график зависимости $b_0 = -\text{ctg } 2\delta$, для значений δ, b_0 выше которого состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ теряет устойчивость колебательным образом. Кривая, отмеченная числом пять, соответствует значениям параметров, при которых вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной в точке $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ при $\varkappa = \varkappa_{\pi,2}$, обращается в нуль, тем самым, при значениях δ, b_0 выше этой кривой происходит рождение устойчивого цикла ($\varkappa > \varkappa_{\pi,2}$), а ниже кривой — неустойчивого ($\varkappa < \varkappa_{\pi,2}$). В свою очередь, кривая с номером семь представляет значения параметров, при которых вычисленная уже для симметричных состояний равновесия A и B , при критических значениях параметра $\varkappa = \varkappa_C$ вещественная часть ляпуновской величины обращается в нуль. При этом для значений δ, b_0 ниже этой кривой потеря устойчивости состояний равновесия A и B происходит мягко с рождением устойчивых циклов C_A и C_B ($\varkappa < \varkappa_C$), а выше кривой — жестко. В последнем случае при $\varkappa > \varkappa_C$ в данные состояния равновесия стягиваются неустойчивые циклы.

Основной результат данной главы состоит в том, что кривая с номером семь на рис. 1 разделяет области параметров, соответствующие хаотическому и нехаотическому сценариям фазовых перестроек, а верхние ветви кривых с номерами шесть и семь выделяют область хаотического сценария с квазифейгенбаумовским каскадом бифуркаций хаотических аттракторов, описанных в теореме 3.

Во втором разделе первой главы рассмотрена задача слабого диффузионного взаимодействия пары одинаковых осцилляторов из нейродинамики

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda \left[-1 - r_1 \exp(-u_1^2) + r_2 \exp(-u_1^2(t-1)) \right] u_1 + D(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda \left[-1 - r_1 \exp(-u_2^2) + r_2 \exp(-u_2^2(t-1)) \right] u_2 + D(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь характеризующий связь нейронов между собой коэффициент $D > 0$ мал. На основе построений первого раздела выполняется локальный асимптотический анализ данной задачи, а затем с помощью численного анализа системы (12) устанавливается, что в широкой области значений параметров локальные фазовые перестройки происходят в соответствии с фазовыми перестройками нормальной формы.

Глава 2. Нерегулярные колебания в цепочках из трех однонаправленно связанных осцилляторов

Во второй главе рассматривается система из трех однонаправленно связанных в кольцо осцилляторов, каждый из которых моделируется некоторой нелинейной системой обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений с единственным аттрактором – положением равновесия или циклом. Удастся показать, что эти генераторы при подходящем выборе параметров могут демонстрировать совместное хаотическое поведение. В первой части главы рассмотрена система осцилляторов, моделями которых служат обыкновенные дифференциальные, а во второй части — разностные уравнения. По результатам проведенных исследований может быть предложен простой и эффективный способ создания генераторов хаотических колебаний. Реализуемость общей идеи проектирования кольцевых хаотических генераторов проиллюстрируем на примере системы

$$\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j + \mu g(u_{j-1}) = f(u_j, \dot{u}_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad u_0 = u_3, \quad (13)$$

где ε – малый по модулю параметр произвольного знака, тейлоровское разложение в нуле функции $f(u, v) \in C^\infty$ имеет вид

$$f(u, v) = a_1 u^2 + a_2 u v + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 u v^2 + b_4 v^3 + \dots, \quad (14)$$

функция связи $g(u) \in C^\infty$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$ (смысл последнего требования в том, что связь должна гасить излишне интенсивные сигналы). Что же касается параметра $\mu > 0$, то его считаем хотя и малым, но подчиненным соотношению:

$$|\nu| \ll 1, \quad \text{где } \nu = \varepsilon/\mu. \quad (15)$$

Основное предположение относительно нелинейности $f(u, v)$ состоит в отрицательности вещественной части комплексной ляпуновской величины, отвечающей нулевому состоянию равновесия каждого из взаимодействующих осцилляторов при $\varepsilon = 0$

$$d = \frac{1}{2} (a_2(a_1 + a_3) + b_2 + 3b_4) - \frac{i}{6} (10a_1(a_1 + a_3) + 4a_3^2 + a_2^2 + 9b_1 + 3b_3). \quad (16)$$

Как известно (см., например, [8]), при условии $\text{Re } d < 0$ и при $\varepsilon > 0$ нулевое решение отдельных уравнений системы (13) экспоненциально устойчиво, а при $\varepsilon < 0$, $|\varepsilon| \ll 1$ из нуля рождается устойчивый цикл амплитуды порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$. В дальнейшем считаем, что каждый из упомянутых аттракторов

для парциальных осцилляторов глобально устойчив. Отметим, что одной из причин, по которой выбор пал именно на такую систему, состоит в том, что при различных правых частях f она служит математической моделью для широкого класса автогенераторов с сосредоточенными параметрами.

Следуя изложенной в [9] методике, при условии (15) возможные автоколебательные режимы системы (13) отыскиваются в виде формальных рядов по целым степеням $\sqrt{\mu}$:

$$u_j = \sqrt{\mu}(z_j(\tau) \exp(it) + \bar{z}_j(\tau) \exp(-it)) + \mu u_{j,2}(t, \tau) + \mu^{3/2} u_{j,3}(t, \tau) + \dots, \quad (17)$$

где $j = 1, 2, 3$, $\tau = \mu t$, все функции $u_{j,k}$, $k \geq 2$ являются 2π -периодическими по t , а $z_j(\tau)$ – некоторые, подлежащие определению в ходе алгоритма комплексные амплитуды. Подставляя формулы (14), (17), вместе с равенством $\varepsilon = \nu\mu$ в систему (13) и приравнивая коэффициенты при μ , на третьем шаге алгоритма из условий разрешимости системы для $u_{j,3}$ в классе периодических по t функций получаем для комплексных амплитуд $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$ укороченную нормальную форму исходной системы (13)

$$z'_j = \frac{i}{2} z_{j-1} + d |z_j|^2 z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad z_0 = z_3, \quad (18)$$

где комплексная постоянная d задается равенством (16), а штрихом обозначено дифференцирование по τ .

Справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии.

Теорема 4. *Предположим, что система (18) имеет некоторый автономный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдутся такие достаточно малые $\mu_0, \nu_0 > 0$, что при всех $\varepsilon, \mu : 0 < \mu \leq \mu_0, |\varepsilon|/\mu \leq \nu_0$ исходная система (13) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулой (17).*

В системе (18) выполним замены $z_j \sqrt{-2 \operatorname{Re} d} \rightarrow \xi_j \exp(i\varphi_j)$, $\tau/2 \rightarrow \tau$, $\xi_j > 0$, $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$, $j = 1, 2, 3$, сводящие ее к пятимерной системе

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \xi_3 \sin \psi_1 - \xi_1^3, \quad \xi'_2 = \xi_1 \sin \psi_2 - \xi_2^3, \quad \xi'_3 = -\xi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) - \xi_3^3, \\ \psi'_1 &= c_0 (\xi_1^2 - \xi_3^2) + \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \psi'_2 &= c_0 (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \cos \psi_2 - \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где $c_0 = -\operatorname{Im} d / \operatorname{Re} d$, $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3$, $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$.

Нетрудно проверить, что система (19) имеет состояние равновесия

$$O = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0) : \xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = \sqrt[4]{12}/2, \quad \psi_1^0 = \psi_2^0 = 2\pi/3, \quad (20)$$

которое экспоненциально устойчиво при $c_0 \in (c_-, c_+)$, где $c_{\pm} = 12\sqrt{3} \pm 5\sqrt{23}$ и неустойчиво при $c_0 \in \mathbb{R} \setminus [c_-, c_+]$. В пункте 2.1.2 показано, что при прохождении параметра c_0 через критические значения потеря устойчивости происходит колебательным образом с возникновением в результате бифуркации Андронова – Хопфа устойчивого цикла. Применение теоремы 4 позволяет утверждать, что исходная система (13) имеет в этих случаях устойчивый цикл и двумерный тор соответственно. Динамические свойства системы (19) при дальнейших изменениях параметра c_0 изучались численно. Проведенный анализ показал богатое разнообразие динамических свойств системы (19), главное из которых – наличие в ней хаотических колебаний при всех $|c_0| \geq 54.7$. Действительно, это означает, что кольцевой хаотический генератор можно сконструировать, взяв за основу практически любой известный классический генератор периодических колебаний, моделирующийся уравнением (13), необходимо лишь добиться выполнения требуемой оценки для $|c_0|$ за счет надлежащего выбора параметров парциальной системы. Следует отметить, что теорема 4 в этом случае уже не применима, и для исходной системы (13) с конкретными значениями параметров требуется дополнительный анализ поведения решений. В качестве примера, к которому применима описанная локальная теория, было рассмотрено уравнение Ван дер Поля – Дуффинга. Далее, в пункте 2.1.3 изучены две модели из радиофизических приложений.

Глава 3. Цепочки диффузионно связанных осцилляторов

В данной главе перейдем от рассмотрения свойств небольшого числа связанных колебательных систем к исследованию динамики произвольного их количества. В предположении, что связь между осцилляторами слаба, строится нормальная форма задачи, а по ней система фазовых уравнений, определяющая качественное поведение решений. Аналитическое и численное исследование полученных фазовых уравнений выполнено для различного числа осцилляторов и различных значений параметра, выраженного в инвариантах исходной системы. Численный анализ полученной модели показал, что в широком диапазоне изменения параметров увеличение числа осцилляторов при наличии между ними слабой связи приводит к возникновению хаотических колебаний растущей ляпуновской размерности. Данный результат находит подтверждение в численном эксперименте выполненном для классической модели такого типа — уравнения Гинзбурга – Ландау.

Для системы (4), (5) будем считать выполненными принятые выше условия, дополнительно предполагая, что $\nu = \mu\varepsilon$, где $0 < \mu \ll 1$ — положительный малый параметр, а $N^2 D$ обозначено снова D .

Применение к системе (4), (5) метода нормальных форм после замены переменных $u_j = \xi_j \left(\exp(i\omega\tau_j)a + \exp(-i\omega\tau_j)\bar{a} \right) + \sum_{k,l=1}^n \xi_k \xi_l u_{klj} + \dots$, где u_{klj} — векторные тригонометрические полиномы аргументов $\omega\tau_1, \dots, \omega\tau_n$, приводит в результате отбрасывания слагаемых высшего порядка малости и нормирующих замен $\xi_j/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \xi_j$, $\varepsilon t = \tau$, к системе медленных движений

$$\begin{aligned} \xi_j' &= \phi_0 \xi_j + d_0 \xi_j^3 + \mu g \left[\xi_{j+1} \cos(\alpha_j + \gamma) - 2\xi_j \cos \gamma + \xi_{j-1} \cos(\alpha_{j-1} - \gamma) \right], \\ \alpha_j' &= c_0 (\xi_{j+1}^2 - \xi_j^2) + \mu g \left[\frac{\xi_{j+2}}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_{j+1} + \gamma) - \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \sin(\alpha_j + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_j}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_j - \gamma) + \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} \sin(\alpha_{j-1} - \gamma) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\alpha_j = \omega(\tau_{j+1} - \tau_j)$, $\phi_0 = \operatorname{Re}(A_1 a, b)$, $g = |(Da, b)|$, $\gamma = \arg(Da, b)$, $d_0 + ic_0$ вычисляется по формуле (2), штрихом обозначена производная по τ .

Следует отметить, что при $\nu = \mu\varepsilon$ к краевой задаче (1) может быть применен метод квазинормальных форм, в частности, как показано в [7], решения этой задачи при некоторых дополнительных ограничениях с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ приближаются решениями нормализованной краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \mu(Da, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + (A_1 a, b) \xi + d\xi |\xi|^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 0) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 1) = 0, \quad (22)$$

где, как и выше, $\tau = \varepsilon t$, а для решений краевой задачи (4) имеет место асимптотическое разложение $u(t, \tau, x) = \sqrt{\varepsilon} \left(\xi(\tau, x) e^{i\omega t} a + \bar{\xi}(\tau, x) e^{-i\omega t} \bar{a} \right) + \dots$

Применение конечно-разностных аппроксимаций по пространственной переменной к краевой задаче (22) и последующий переход к полярным координатам также приводят к формулам (21). Отметим, что уравнение (22) представляет собой вариант уравнения Гинзбурга – Ландау с пространственной переменной, определенной на отрезке $[0, 1]$.

При достаточно малых μ система (21) имеет глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, для которого выполнено следующее утверждение

Теорема 5. *Существуют такие достаточно малые положительные числа ε_0, μ_0 и не зависящее от них положительное число r_0 , что при $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon, 0 < \mu \leq \mu_0$ система (4), (5) имеет N -мерный инвариантный тор, задаваемый равенствами*

$$\eta_j = \left(-\frac{\phi_0}{\operatorname{Re} d} \right)^{1/2} \left(1 + \mu \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \mu) \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (23)$$

где φ_j — гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по α_k функции, к которому при $t \rightarrow \infty$ стремятся все решения с ненулевыми начальными условиями из шара радиуса r_0 с центром в нуле. Для φ_j справедливы асимптотические формулы

$$\varphi_j = \frac{g}{\phi_0} \left(\cos(\alpha_{j+1} + \gamma) - 2 \cos \gamma + \cos(\alpha_{j-1} - \gamma) \right) + O(\mu). \quad (24)$$

Характер поведения решений на этом торе с точностью до слагаемых порядка μ описывается системой фазовых уравнений

$$\dot{\alpha}_j = 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \kappa (\cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (25)$$

Здесь $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $\kappa = \frac{x_0 + b_0}{x_0 b_0 - 1}$, $x_0 = -\frac{\operatorname{Im}(Da, b)}{\operatorname{Re}(Da, b)}$, $b_0 = c_0/d_0$.

Таблица 1.

	$\kappa = 1.5$	$\kappa = 2$	$\kappa = 2.5$	$\kappa = 3$	$\kappa = 3.5$	$\kappa = 4$
$N = 5$	3.042	2.558	1	1	1	1
$N = 6$	4.028	3.02	1	1	1	1
$N = 7$	4.729	4.997	5.049	5.101	5.134	5.207
$N = 8$	5.401	5.74	5.869	5.99	6.054	6.125
$N = 9$	6.127	6.521	6.735	6.913	6.965	7.046
$N = 10$	6.766	7.259	7.527	7.667	7.8	7.940
$N = 11$	7.383	8.05	8.362	8.505	8.657	8.809
$N = 12$	8.002	8.741	9.132	9.337	9.502	9.639
$N = 13$	8.502	9.395	9.926	10.164	10.31	10.481
$N = 14$	9.032	10.116	10.638	10.923	11.173	11.302
$N = 15$	9.564	10.74	11.349	11.691	11.946	12.145
$N = 16$	10.079	11.375	12.062	12.439	12.725	12.997
$N = 17$	10.572	12.011	12.753	13.203	13.506	13.74
$N = 18$	10.944	12.618	13.425	13.925	14.277	14.509
$N = 19$	11.35	13.244	14.076	14.636	15.055	15.322
$N = 20$	11.83	13.74	14.767	15.328	15.746	16.106

В пункте 3.1.3 выполнен полный качественный анализ системы (25) для $N = 2, 3, 4$. При достаточно большом κ и $N > 4$ система (25) может демонстрировать неупорядоченное поведение решений. В связи с этим была

выполнена численная оценка ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности. В таблице 1 содержатся численные оценки величины ляпуновской размерности d_L , выполненные при различных значениях κ и $N > 4$. Нетрудно проверить, что зависимость d_L от N близка к линейной, в пункте 3.1.3 приведены соответствующие оценки.

В разделе 3.2 на основе численного анализа изучен вопрос об аттракторах уравнения Гинзбурга – Ландау (22), которое приведено к виду

$$\dot{w} = \mu(1 - ia)w'' + w - (1 + ib)w|w|^2, \quad w'(t, 0) = w'(t, 1) = 0. \quad (26)$$

Данная краевая задача заменяется конечномерной моделью

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= \mu N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + a(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})) + u_j - (u_j - bv_j)(u_j^2 + v_j^2), \\ \dot{v}_j &= \mu N^2 (v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} - a(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})) + v_j - (v_j + bu_j)(u_j^2 + v_j^2), \\ j &= 1, \dots, N, \quad u_0 = u_1, \quad v_0 = v_1, \quad u_{N+1} = u_N, \quad v_{N+1} = v_N, \end{aligned}$$

где $w_j = u_j + iv_j$. Полученная система исследовалась численно при фиксиро-

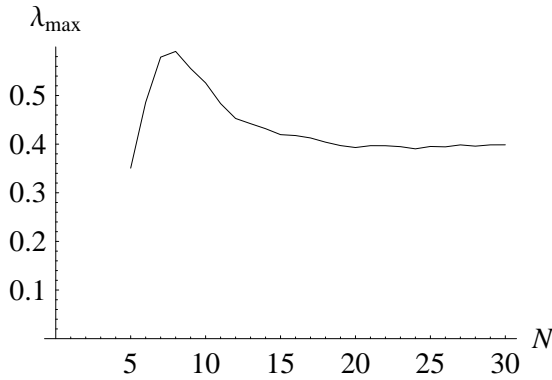


Рис. 2. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.005$

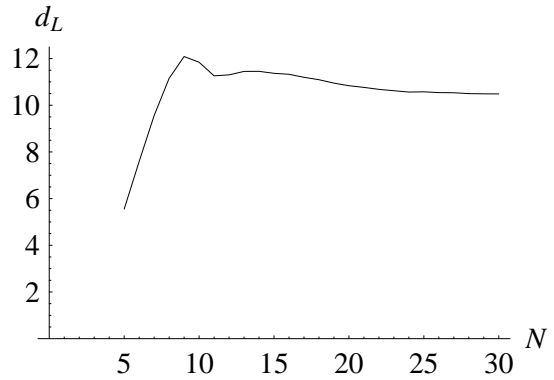


Рис. 3. $d_L(N)$ при $\mu = 0.005$

ванных значениях параметров $a = 1$, $b = 6$ и изменении μ и N . На рис. 2, 3 представлено по одной из серии зависимостей старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(N)$ и ляпуновской размерности $d_L(N)$ при фиксированном μ и изменении $5 \leq N \leq 30$. Нетрудно видеть, что с ростом N эта величина стремится к некоторому пределу. Численный анализ показывает, что этот предел растет с уменьшением μ . На рис. 4 изображен график зависимости $d_L(\mu)$ при $N = 20$. Здесь также наблюдается рост d_L с уменьшением μ , который при достаточно малом μ сменяется падением. При увеличении N это падение происходит при меньших μ , что определяет границы применимости разностных аппроксимаций.

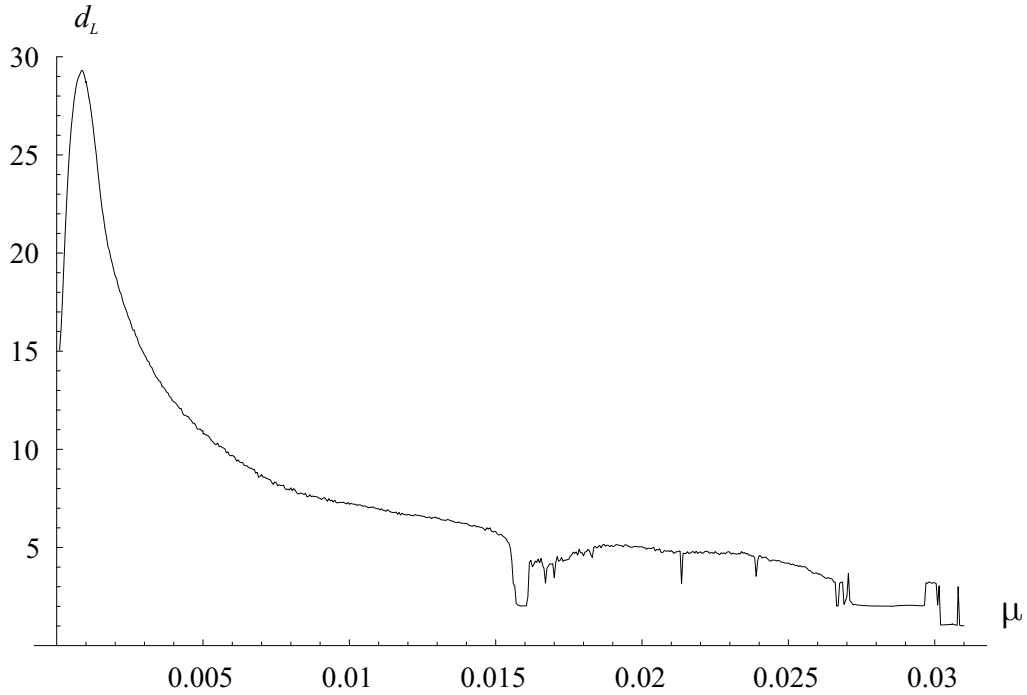


Рис. 4. $d_L(\mu)$ при $N = 20$

В пунктах 3.1.5 и 3.2.2 краевые задачи (1) и (26) рассматривались на окружности, то есть для них выполнялись периодические краевые условия.

Асимптотические методы, применяемые при анализе системы (4), (5), дают укороченную систему фазовых уравнений (25). Относительно грубых решений этой системы доказана теорема 5 о соответствии, однако в случае, когда нормализованные системы имеют хаотический аттрактор, доказательство такого утверждения сопряжено с существенными трудностями, если вообще возможно, поскольку соответствующий аттрактор может оказаться не гиперболическим. Именно поэтому в такой ситуации необходим численный эксперимент. С этой точки зрения результаты выполненных в разделе 3.2 вычислений существенно дополняют утверждения раздела 3.1. Важно заметить, что результаты, полученные в 3.1.1 и касающиеся краевой задачи на отрезке, полностью соответствуют численному эксперименту из пункта 3.2.1. В случае же задачи на окружности система для разностей фаз (25) оказывается негрубой и ее решения никак не соотносятся с результатами численного анализа. При этом для краевой задачи как на отрезке, так и на окружности численный эксперимент демонстрирует одни и те же тенденции в изменениях старшего ляпуновского показателя и размерности аттрактора системы при уменьшении параметра μ .

Основной вывод по результатам третьей главы состоит в том, что при уменьшении коэффициента диффузии μ в задачах (26) и аналогичной ей

задаче с периодическими краевыми условиями возникают хаотические колебательные режимы растущей ляпуновской размерности. Асимптотический анализ при этом позволяет в некоторых случаях прояснить структуру бифурцирующих режимов.

Глава 4. Нелинейные волновые уравнения и их дискретные аналоги

В главах два и три рассматривались цепочки связанных генераторов с сосредоточенными параметрами с диффузионной (глава 3) и однонаправленной связью (глава 2). Было установлено, что в обоих случаях в соответствующей системе может наблюдаться хаотическое поведение, обусловленное коллективным взаимодействием парциальных осцилляторов. Предположим теперь, что в цепочках (13) или (4) каждое звено заменено колебательной системой с распределенными параметрами, каждая из которых имеет достаточно большое или счетное число устойчивых циклов (т.е. реализуется феномен буферности в простейшем его варианте). В итоге получаем систему, имеющую (при определенных дополнительных условиях) достаточно большое число сосуществующих хаотических аттракторов. Как показано в первых двух разделах данной главе при рассмотрении конкретных примеров, для того, чтобы добиться требуемого эффекта, вовсе не обязательно брать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно делается в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством.

В третьей части главы предлагается феноменологическая модель развития турбулентности, представляющая собой нелинейное уравнение Клейна – Гордона, возмущенное нелинейными диссипативными добавками. С помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается, что переход к турбулентности в этом уравнении может происходить как по сценарию Ландау, так и в соответствии со сценарием Ландау – Селла.

В разделе 4.1 рассматривается краевая задача

$$\dot{u}_t + i\sigma_0 u_{xx} = u - d|u|^2 u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (27)$$

где $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция, $d = 1 + ic_0$, а c_0, σ_0 — положительные параметры, связанные неравенством $\sigma_0 > 2c_0$. Приведенную задачу будем рассматривать как эволюционную систему в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, где E — гильбертово пространство 2π -периодических функций класса W_2^2 . Выбранная таким способом парциальная система обладает требуемым свойством буферности, поскольку она имеет счетное число автомодельных циклов (бегущих волн)

$$u = \exp[i(\sigma_0 n^2 - c_0)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (28)$$

которые являются устойчивыми (в метрике $E \times E$) при условии $\sigma_0 > 2c_0$ и неустойчивыми при выполнении строго противоположного неравенства. Рассмотрим, далее, цепочку диффузионно связанных осцилляторов (27), т.е. систему вида

$$\dot{u}_t + i\sigma_0 u_{xx} + i\mu \Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (29)$$

где $u = \text{colon}(u_1, \dots, u_N)$, $|u|^2 = \text{colon}(|u_1|^2, \dots, |u_N|^2)$; $u_j = u_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$ — комплекснозначные функции; натуральное $N > 5$ произвольно фиксировано; $\mu > 0$ — малый параметр; $*$ — операция покомпонентного умножения векторов, а $N \times N$ -матрица связи Λ является трехдиагональной матрицей с единичными над- и поддиагоналями и главной диагональю $(-1, -2, \dots, -2, -1)$. В разделе 4.1 установлено, что при выполнении условия $\sigma_0 > 2c_0$ эта система имеет счетное число устойчивых N -мерных торов, причем при некоторых дополнительных ограничениях на параметр c_0 каждый из них является носителем хаотического аттрактора.

Для обоснования этого факта доказывается следующее утверждение.

Лемма 1. *Найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (29) имеет пространственно однородный (не зависящий от x) инвариантный тор*

$$u_j = \exp(i\tau_j) [1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)], \quad j = 1, \dots, N, \quad (30)$$

где $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$, $\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = (\sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1})/2$. Движения на нем задаются системой

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \dot{\tau}_N &= -c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2\sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}$, $\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = c_0 \sin \alpha_{N-1} - \cos \alpha_{N-1} + 1$. Данный тор экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) в метрике фазового пространства $E^{2N} = E \times \dots \times E$ при $\sigma_0 - 2c_0 > 0$ (< 0).

На основе представленной леммы доказывается следующая теорема.

Теорема 6. *При выполнении условия $\sigma_0 > 2c_0$ существует такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при каждом $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (29) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых инвариантных торов*

$$\mathcal{A}_n = \{u_j = \exp[i(\tau_j + nx)](1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), j = 1, \dots, N\}, n \in \mathbb{Z}, \quad (32)$$

движения на которых описываются системами

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \dot{\tau}_N &= \sigma_0 n^2 - c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, а функции ψ_j, Φ_j, Ψ те же, что и в (30), (31).

Системы (31), (33) для $\alpha_j(t)$ с точностью до нормирующих замен переменных совпадают с системой (25), исследованной в главе 3. В частности, численными методами в этой главе показано, что при достаточно большом c_0 и $N > 5$ в каждой из этих систем наблюдаются хаотические колебания.

В разделе 4.2, в продолжение исследований, предпринятым в 4.1 и главе 2, рассматривается цепочка из трех однонаправленно связанных в кольцо кубических уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \varepsilon [iu_{k-1} + d|u_k|^2 u_k] = 0, \quad u_k \Big|_{x=0} = u_k \Big|_{x=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (34)$$

где $u_k = u_k(t, x)$ — комплекснозначные функции, причем $u_0(t, x) \equiv u_3(t, x)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $d = 1 + ic_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma_0 > 0$ — некоторые постоянные порядка единицы. В качестве фазового пространства задачи (34) возьмем $E^6 = E \times \dots \times E$, где $E = \mathring{W}_2^2(0, \pi)$, а через \mathring{W}_2^2 обозначено, как обычно, соответствующее соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям. Данная задача моделируется бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - d \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \right] z_{n,k}, \quad z_{n,0} = z_{n,3} \quad n \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (35)$$

возникающей после замены $u_k = u_{k,0}(t, \tau, x) + \varepsilon u_{k,1}(t, \tau, x) + \dots$, $k = 1, 2, 3$, где $\tau = \varepsilon t$, $u_{k,j}$, $j \geq 0$ — формальные тригонометрические ряды переменной t , причем $u_{k,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\sigma_0 n^2 t) z_{n,k}(\tau) \sin nx$, $k = 1, 2, 3$.

Система (35) имеет инвариантные множества вида $\Omega_n = \{z \in \mathbb{Z} : z_{m,k} = 0, k = 1, 2, 3 \text{ при всех } m \neq n; (z_{n,1}, z_{n,2}, z_{n,3}) = (v_1, v_2, v_3) \in \Omega\}$, где Ω — некоторый аттрактор шестимерной системы

$$\dot{v}_k = -iv_{k-1} - d|v_k|^2 v_k, \quad v_0 = v_3, \quad k = 1, 2, 3, \quad (36)$$

Отметим, что система (36) с точностью до нормирующих замен совпадает с системой (18). Используя результаты второй главы удается показать, что

при изменении управляющего параметра c_0 в такой системе могут наблюдаться две принципиально различные ситуации:

- 1) сосуществует счетное число конечномерных хаотических аттракторов, т. е. имеет место хаотическая буферность;
- 2) существует хаотический аттрактор бесконечной размерности.

В разделе 4.3 рассматривается модельная динамическая система, в которой при изменении бифуркационного параметра могут реализовываться как сценарий фазовых перестроек Ландау, так и сценарий Ландау – Селла. Первый из упомянутых сценариев связан, как известно, с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей. Во втором же случае имеем дело с хаотическим аттрактором, ляпуновская размерность которого при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет. Как и в двух предыдущих разделах, изучаемая краевая задача моделируется цепочкой связанных колебательных систем, на основе численного анализа которых делается вывод о наличии у системы бифуркаций по сценарию Ландау – Селла.

Цель раздела 4.3 – проиллюстрировать реализуемость сценариев Ландау и Ландау – Селла в рамках некоторой феноменологической модели. В качестве таковой рассматривается нелинейная краевая задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + bu^5 = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u + \nu u_{xx}) - \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad (37)$$

где a, b, ε, ν – произвольные положительные параметры, $u = u(t, x)$ – скалярная вещественная функция. Следует отметить, что предложенная гидродинамическая модель (37) хотя и существенно проще, чем исходная система уравнений Навье-Стокса, но тем не менее является весьма содержательной. Как показано в данном разделе, при согласованном стремлении параметров ε и ν к нулю в ней происходит развитие турбулентности по Ландау, а при $\varepsilon \sim 1, \nu \rightarrow 0$ реализуется сценарий Ландау-Селла.

В пунктах 4.3.1-4.3.2 показано, что краевая задача (37) при условии $\nu = \varepsilon \nu_0$ может быть сведена к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$2 \frac{d\xi_n}{d\tau} = \left[1 - \nu_0 \pi^2 n^2 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (38)$$

где $\xi_n(\tau), n \geq 1$ – амплитуды при соответствующих модах. С помощью системы (38) удастся показать, что при уменьшении ν_0 у краевой задачи (37)

имеются устойчивые инвариантные торы растущей размерности, а при $\nu_0=0$ – турбулентный аттрактор $\Omega(\varepsilon)$ бесконечной хаусдорфовой размерности.

В пункте 4.3.3 представлены результаты численного счета, полученные для следующих значений параметров: $\varepsilon = b = 10$, $a^2 = 0.1$. В совокупности с содержащимся в пунктах 4.3.1 – 4.3.2 теоретическим анализом эти результаты позволяют сделать следующие общие выводы о динамике по ν исходной распределенной модели (37).

Во-первых, при $\nu = 0$ и при указанных условиях на параметры у краевой задачи (37) существует турбулентный аттрактор Ω_{turb} , который, по всей видимости, является продолжением по ε аттрактора $\Omega(\varepsilon)$, обнаруженного в задаче (37) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$. Как и $\Omega(\varepsilon)$, данный аттрактор представляет собой ограниченное и некомпактное множество в фазовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, имеющее бесконечную хаусдорфову размерность. Кроме того, для “типичных” траекторий из Ω_{turb} справедливо равенство $\lambda_{max} = 0$. Таким образом, турбулентный аттрактор в предложенной нами модели можно отнести к так называемым странным нехаотическим аттракторам (см. [2]) или рассматривать как некоторый вариант “бесконечномерного тора”.

Во-вторых, аттрактор Ω_{turb} является пределом при $\nu \rightarrow 0$ конечномерных хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых неограниченно растет. Последнее же как раз и означает, что при принятых значениях параметров и при уменьшении величины ν в краевой задаче (37) наблюдается интересующий нас сценарий развития турбулентности Ландау – Селла.

Глава 5. Системы с полутора степенями свободы

В предыдущих главах сложность поведения динамических систем объяснялась взаимодействием некоторого числа связанных осцилляторов. Известно, однако, что сложное поведение, обусловленное накоплением однотипных аттракторов, может реализоваться и в простых системах обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, в системах с полутора степенями свободы, под которыми будем понимать уравнения маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками. В пятой главе рассматривается механизм накапливания аттракторов в указанных системах.

Рассматривается гамильтонова или консервативная (не меняющаяся при обращении времени) система обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Известно, что хаотические движения в таких системах сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Если возмутить данную систему малыми добавками,

обеспечивающими ее диссипативность, то некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого и называется гамильтоновым. В данной главе устанавливаются строгие результаты о наличии буферности в ряде классических механических задач, описываемых уравнениями маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками.

В разделе 5.1 рассматриваются следующие модельные уравнения маятникового типа:

$$\ddot{x} + \sin x = \frac{a}{k} \sin(kx - \nu t), \quad \ddot{x} + (1 + a \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (39)$$

где a, k, ν – положительные параметры, а также уравнение

$$\ddot{x} + x = a \sin(x - \nu t), \quad (40)$$

получающееся из первого уравнения (39) при условии $k \gg 1$ после замены $kx \rightarrow x$ и отбрасывания слагаемых порядка малости $1/k^2$ и выше. Аргументом в пользу выбора в качестве объектов исследования именно этих уравнений служит тот факт, что они допускают многочисленные физические интерпретации. Эти уравнения рассматриваются при $a = \mu, k = 1$ и при добавлении малого затухания $\varepsilon \dot{x}, \varepsilon > 0$, параметр $\mu > 0$ считается хотя и малым, но фиксированным по отношению к ε .

Все три уравнения обладают одним общим и необходимым для последующего анализа свойством. А именно пусть при $\varepsilon = 0$ и при любом фиксированном $\mu > 0$ (не обязательно малом) какое-либо из этих уравнений допускает некоторое эллиптическое периодическое движение $x_0(t)$ периода $T_0 > 0$ (эллиптичность означает, что его мультипликаторы λ_1, λ_2 комплексные и в силу гамильтоновости $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у рассматриваемого уравнения существует близкое периодическое решение $x(t, \varepsilon), x(t, 0) = x_0(t)$ периода $T(\varepsilon), T(0) = T_0$, являющееся экспоненциально устойчивым. Отсюда следует, что проблема гамильтоновой буферности для рассматриваемых уравнений сводится к отысканию эллиптических периодических решений при $\varepsilon = 0$. Соответствующий анализ проведен для квазилинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = \mu \sin(x - \nu t). \quad (41)$$

Введем в рассмотрение множества $\Omega_n, n = 1, 2, \dots$, состоящие из пар $(\mu, \nu) : \mu, \nu > 0$, при которых уравнение (41) имеет не менее n различных эллиптических периодических решений. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Множество Ω_n не пусто при любом $n \in \mathbb{N}$.

Обращаясь к уравнениям маятникового типа

$$\ddot{x} + \sin x = \mu \sin(x - \nu t), \quad \ddot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (42)$$

сформулируем для них аналогичное теореме 7 утверждение. В отличие от предыдущего случая помимо обычных периодических решений у этих уравнений возможны еще так называемые вращательные периодические движения $x(t)$, для которых $x(t + T) \equiv x(t) + 2\pi m$ при некотором целом $m \neq 0$. В связи с этим для каждого из уравнений (42) введем в рассмотрение две серии множеств. Через Ω_n^1 обозначим совокупность наборов параметров (μ, ν) , при которых соответствующее уравнение имеет не менее n различных эллиптических колебательных периодических решений, а через Ω_n^2 будем обозначать аналогичное множество для вращательных движений.

Теорема 8. Для каждого из уравнений (42) не пусто множество $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Из проделанных в данном пункте исследований вытекает, что при $\mu \rightarrow 0$ в каждом из уравнений (42) происходит неограниченное накапливание эллиптических периодических движений, как колебательных, так и вращательных. Анализ периодических решений уравнений маятникового типа, возмущенных периодическими добавками, проводился во многих работах Козлова В. В., Морозова А. Д. и других. Что же касается полученных нами результатов, то они восходят к известной теореме Пуанкаре, которая утверждает, что в окрестности резонансной периодической орбиты невозмущенной гамильтоновой системы при малых возмущениях и при некоторой общности положения возникает не менее двух грубых периодических решений: одно седлового типа, а другое – эллиптическое. Фактически именно эта теорема и применялась в рассмотренных выше конкретных ситуациях.

Как уже говорилось ранее, теоремы 7, 8 решают проблему гамильтоновой буферности для уравнений (39), (40), поскольку эллиптические периодические движения этих уравнений, существующие при $\varepsilon = 0$, при переходе к малым $\varepsilon > 0$ становятся экспоненциально устойчивыми. Однако между первым уравнением (39) и двумя другими имеется принципиальное различие: в квазилинейном случае устойчивые периодические решения обладают достаточно широкими областями притяжения, в то время как в уравнениях маятникового типа устойчивые режимы накапливаются в окрестности сепаратрис, существующих при $\varepsilon = \mu = 0$, и вследствие этого бассейны притяжения большинства из них заведомо узки.

Объектом исследований в разделе 5.2 является двумерная неавтономная система вида

$$\dot{x} = H'_y(x, y) + \varepsilon f(t, x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y) + \varepsilon g(t, x, y). \quad (43)$$

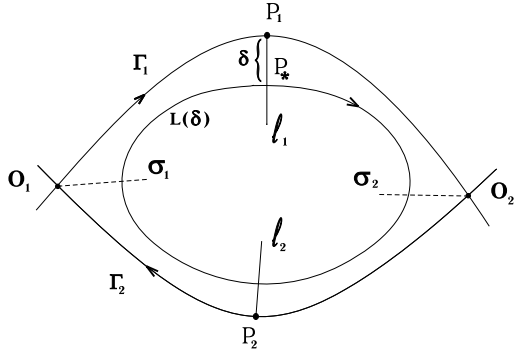


Рис. 5.

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $H(x, y)$ и $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ бесконечно дифференцируемы по совокупности переменных $(x, y) \in G$ и $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times G$ соответственно, где $G \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область. Кроме того, возмущения f, g предполагаем периодическими по t с некоторым периодом $T_0 > 0$.

Основные ограничения, при которых изучается система (43), относятся к предельной гамильтоновой системе

$$\dot{x} = H'_y(x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y). \quad (44)$$

Условие 1. Считаем, что система (44) имеет в области G замкнутый контур Γ (см. рис. 5), состоящий из двух седел O_1, O_2 и двух сепаратрис

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_2; \\ \Gamma_2 &= \{(x_2(t), y_2(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Сделанные предположения позволяют ввести две функции Мельникова

$$M^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t + \tau, x_j(\tau), y_j(\tau)) d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (46)$$

где $\Phi(t, x, y) = H'_x(x, y)f(t, x, y) + H'_y(x, y)g(t, x, y)$, отвечающие сепаратрисам (45). Как известно, если какая-либо из данных функций имеет простые нули, то это влечет трансверсальность пересечения двух инвариантных многообразий системы (43), возникающих при $\varepsilon > 0$ в результате расщепления соответствующей сепаратрисы.

Для описания следующего ограничения рассмотрим точку $P_1 = (x_1(0), y_1(0))$ на Γ_1 и обозначим через l_1 отрезок нормали к кривой Γ_1 в этой точке, направленный внутрь контура Γ (см. рис. 5).

Условие 2. Считаем, что в области, ограничиваемой кривой Γ , система (44) имеет однопараметрическое семейство циклов

$$L(\delta) = \{(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) : 0 \leq t \leq T(\delta)\}, \quad 0 < \delta \leq \delta_*, \quad (47)$$

периоды $T(\delta)$ которых обладают свойствами:

$$T(\delta) > 0, \quad T'(\delta) < 0 \quad \text{при} \quad \delta \in (0, \delta_*], \quad T(\delta) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0. \quad (48)$$

Считаем еще, что фазовые траектории (47) пересекают l_1 без касания, причем (см. рис. 5) $P_* = (x_*(0, \delta), y_*(0, \delta)) \in l_1$, $\rho(P_*, P_1) = \delta$, где $\rho(*, *)$ – евклидова метрика.

Условие 3. Предполагаем, что $h'(\delta) \neq 0$ при $\delta \in (0, \delta_*]$, где

$$h(\delta) = H(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)).$$

Нетрудно увидеть, что условие 2 обеспечивает существование последовательности функций Мельникова $M_n(t)$, о которой говорилось выше. Действительно, в силу (48) каждое из уравнений $T(\delta) = nT_0$, начиная с некоторого номера n_0 , допускает единственное решение $\delta_n \in (0, \delta_*]$, причем $\delta_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность задается равенствами

$$M_n(t) = \int_0^{nT_0} \Phi(t + \tau, x_n^*(\tau), y_n^*(\tau)) d\tau, \quad n \geq n_0, \quad (49)$$

где $x_n^*(t) = x_*(t, \delta_n)$, $y_n^*(t) = y_*(t, \delta_n)$.

Лемма 2. Существуют конечные пределы

$$\varkappa_* = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_1(\delta) - \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad \varkappa_{**} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_2(\delta) - \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad (50)$$

где $\pm\lambda_1$ и $\pm\lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) – характеристические показатели седел O_1 и O_2 .

Приведенная лемма позволяет установить следующее утверждение, являющееся основным результатом данного раздела.

Теорема 9. В случае иррационального отношения λ_1/λ_2 множество всех (равномерных по $t \in [0, T_0]$) частичных пределов последовательности (49) при $n \rightarrow \infty$ состоит из континуального семейства функций

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + z), \quad (51)$$

где $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ – функции Мельникова (46), а непрерывный параметр z пробегает отрезок $[0, T_0]$. В случае же, когда $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$

– взаимно просты, упомянутое множество дискретно и исчерпывается конечным набором функций

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + m p T_0/q + c_0), \quad m = 0, 1, \dots, q - 1, \quad (52)$$

где

$$c_0 = (\lambda_2 \kappa_* - \lambda_1 \kappa_{**})/(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (53)$$

Численный анализ выполненный в рассматриваемом случае позволил проиллюстрировать сосуществование большого числа аттракторов у модельных уравнений (39), (40).

Глава 6. Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона

Рассмотрим уравнение Хатчинсона в случае двух возрастных групп

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{\alpha N(t - h_1) + (1 - \alpha)N(t - h_2)}{k} \right] N \quad (54)$$

и изучим вопрос о бифуркации автоколебаний этого уравнения из нулевого состояния равновесия в экстремальной ситуации, когда одно из запаздываний асимптотически велико, а все остальные параметры имеют порядок единицы.

Выполняя в (54) замену переменных $N = k(1 + u)$ и предполагая, что

$$r h_1 = 1/2, \quad h_2/h_1 = \varepsilon \gamma, \quad \alpha = 1/2 + \mu, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \quad (55)$$

приходим после замены времени $t/h_1 \rightarrow t$ к сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon \dot{u} = - [(1/2 + \mu) u(t - 1) + (1/2 - \mu) u(t - \varepsilon \gamma)] (1 + u). \quad (56)$$

Первым этапом в решении бифуркационной проблемы для уравнения (56) является, как обычно, анализ расположения корней соответствующего нулевому состоянию равновесия характеристического уравнения

$$\varepsilon \lambda + (1/2 + \mu) \exp(-\lambda) + (1/2 - \mu) \exp(-\lambda \varepsilon \gamma) = 0. \quad (57)$$

Результаты этого анализа позволят в дальнейшем согласовать надлежащим образом порядка малости параметров ε и μ , а также уточнить выбор параметра γ . Выполнены следующие утверждения.

Лемма 3. *Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условиям*

$$\gamma \neq \pi(4n - 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (58)$$

Тогда найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\mu \in [0, \mu_0]$, $z \in [0, +\infty)$ уравнение

$$iz + \varepsilon\delta - (1/2 + \mu) \exp(-\delta) + (1/2 - \mu) \exp(-i\gamma z - \varepsilon\gamma\delta) = 0 \quad (59)$$

допускает единственное решение $\delta = \delta(z, \varepsilon, \mu)$, $\delta(0, 0, 0) = 0$, для которого справедливо представление вида

$$\delta = \delta_0(z, \mu) + \varepsilon\delta_1(z, \varepsilon, \mu), \quad \delta_0 = \ln(1+2\mu) - \ln(2iz + (1-2\mu) \exp(-i\gamma z)). \quad (60)$$

Здесь бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных z, ε, μ комплекснозначная функция $\delta_1(z, \varepsilon, \mu)$ обладает свойствами

$$\delta_1(z, 0, \mu) = \frac{\delta_0(z, \mu) - ((1-2\mu)\gamma \exp(-i\gamma z) - 2)}{2iz + (1-2\mu) \exp(-i\gamma z)}, \quad \delta_1(0, \varepsilon, 0) \equiv 0, \quad (61)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} |\delta_1(z, \varepsilon, \mu)| = 0 \quad \text{равномерно по } (\varepsilon, \mu) \in [0, \varepsilon_0] \times [0, \mu_0].$$

Лемма 4. Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условию

$$\gamma < 1. \quad (62)$$

Тогда по любому натуральному N можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, N) > 0$, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, во-первых, каждое из уравнений

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (63)$$

где

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n(1 + \varepsilon(\gamma - 2) + \varepsilon^2(\gamma - 2)^2) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \quad (64)$$

допускает единственное решение

$$\mu = \mu_n(\varepsilon), \quad \mu_n(\varepsilon) = \varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma)/2 + O(\varepsilon^3), \quad (65)$$

во-вторых, при $0 \leq \mu \leq \mu_1(\varepsilon)$ все корни уравнения (57) имеют отрицательные действительные части, а в случае $\mu_k(\varepsilon) < \mu < \mu_{k+1}(\varepsilon)$ при некотором $1 \leq k \leq N - 1$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) > 0, \quad 1 \leq n \leq k; \quad \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) < 0 \quad \forall n > k. \quad (66)$$

Проделанный в разделе 6.1 линейный анализ свидетельствует о том, что поставленная бифуркационная проблема близка к бесконечномерной: при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ к мнимой оси стремится счетное число корней (64) характеристического уравнения (57). В подобной ситуации не удастся напрямую

воспользоваться известными конечномерными методами исследования динамики, базирующимися на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм [8]. В связи с этим используется метод квазинормальных форм (см. [7], [10]). Для того чтобы применить результаты данных работ к уравнению (56), предварительно необходимо согласовать порядки малости параметров ε и μ . Сделать это можно следующими двумя способами.

1) Предположим сначала, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет неравенству (62). Тогда в соответствии с асимптотическими формулами (65) для критических значений μ уместно положить

$$\mu = \beta\varepsilon^2, \quad \beta = \text{const} > \pi^2(1 - \gamma)/2 \quad (67)$$

(условие на β дает неустойчивость нулевого решения уравнения (56)).

2) Пусть теперь параметр γ отличается от своего порогового значения $\gamma = 1$ на величину порядка ε , т. е.

$$\gamma = 1 - \gamma_0\varepsilon, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0. \quad (68)$$

В этом случае (по тем же причинам, что и выше) считаем выполненным соотношение

$$\mu = \beta_0\varepsilon^3, \quad \beta_0 = \text{const} > \pi^2\gamma_0/2. \quad (69)$$

В первой из описанных ситуаций в качестве квазинормальной формы выступает краевая задача

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = 2(1 - \gamma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 4\beta\xi - 2\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau) \quad (70)$$

для амплитуды $\xi(s, \tau)$. Здесь s играет роль времени, а τ является пространственной переменной. Краевая задача (70) связана с уравнением (56) заменой

$$u = \sqrt{\varepsilon}\xi(s, \tau) + \varepsilon u_1(s, \tau) + \varepsilon^{3/2}u_2(s, \tau) + \varepsilon^2 u_3(s, \tau) + \varepsilon^{5/2}u_4(s, \tau). \quad (71)$$

Здесь $s = \varepsilon^2\tau$, $u_k(s, \tau + 2) \equiv u_k(s, \tau)$, $1 \leq k \leq 4$. кроме того,

$$\tau = (1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2)t, \quad \sigma_1 = \gamma - 2, \quad \sigma_2 = (\gamma - 2)^2. \quad (72)$$

В случае, если выполнены условиях (68), (69) приближенные автоколебательные режимы уравнения (56) удастся построить в виде суммы

$$u = \varepsilon\xi(s, \tau) + \varepsilon^2 u_1(s, \tau) + \varepsilon^3 u_2(s, \tau) + \varepsilon^4 u_3(s, \tau), \quad (73)$$

где

$$\tau = (1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3)t, \quad s = \varepsilon^3\tau, \quad \sigma_1 = -1, \quad \sigma_2 = 1 - \gamma_0, \quad \sigma_3 = 2\gamma_0 - 1. \quad (74)$$

Алгоритм нахождения 2-периодических по τ функций $u_k(s, \tau)$, $k \leq 3$ из (73) позволяет получить краевую задачу

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau^3} + 2\gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 4\beta_0 \xi - 2\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (75)$$

которую также будем называть квазинормальной формой. Остановимся на естественно возникающем вопросе о соответствии между автоколебательными режимами квазинормальных форм (70), (75) и исходного уравнения (56). В формулируемом ниже утверждении в качестве фазовых пространств краевых задач (70) и (75) возьмем соответственно пространства E_2 и E_3 , состоящие из антипериодических функций $\xi(\tau)$ класса $\dot{W}_2^2[0, 1]$ и $\dot{W}_2^3[0, 1]$, а фазовым пространством самого уравнения (56) будем считать $C[-1, 0]$.

Теорема 10. Пусть выполнены условия (62), (67), а квазинормальная форма (70) допускает периодическое решение типа бегущей волны

$$\xi = \xi_0(y) : \quad y = \alpha_0 s + \tau, \quad \xi_0(y + 1) \equiv -\xi_0(y), \quad \alpha_0 = const, \quad (76)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (76) отвечает цикл уравнения (56) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенствами (72), (71), во втором из которых учтено соотношение (76). Аналогичный результат остается в силе для уравнения (56) при условиях (68), (69) в случае, когда периодическое решение вида (76) имеет краевая задача (75).

Предпринятый анализ позволяет сделать следующие выводы о динамике обобщенного уравнения Хатчинсона (56) в экстремальной ситуации (55).

Во-первых, при условиях (62), (67) и при увеличении параметра β нулевое решение уравнения (56) теряет устойчивость и из него бифурцирует устойчивый цикл. Точнее говоря, теорема 10 и содержащееся в разделе 6.3 численное исследование модельной задачи гарантируют, что упомянутый цикл существует при любом фиксированном $\beta > (1 - \gamma)/2$ (в квазинормальной форме (70) ему отвечает устойчивая бегущая волна). Добавим еще, что в рассматриваемом случае этот цикл остается единственным локальным аттрактором уравнения (56) несмотря на то, что при увеличении β общее число его неустойчивых периодических решений, соответствующих бегущим волнам при $n \geq 1$, неограниченно растет.

Во-вторых, при приближении параметра γ к критическому значению $\gamma = 1$ происходит усложнение динамики, связанное с появлением в фазовом пространстве уравнения (56) различных сосуществующих аттракторов, или, иными словами, реализуется феномен буферности. Действительно,

при условиях (68), (69) квазинормальной формой этого уравнения является модельная краевая задача (75). Последняя же, как показал соответствующий численный анализ, при подходящем выборе параметров d_1, d_2 может иметь достаточно большое число сосуществующих аттракторов, среди которых присутствуют как устойчивые циклы, так и более сложные установившиеся режимы (двумерные торы и хаос). Таким образом, для того чтобы убедиться в наличии мультистабильности, достаточно применить к каждому устойчивому циклу квазинормальной формы (75) теорему 10 и получить аналогичный устойчивый цикл исходного уравнения (56). Что касается двумерных торов краевой задачи (75), найденных численными методами в разделе 6.3, то для них аналог теоремы 10 о соответствии остается в силе. Причина этого в том, что любой из упомянутых торов устроен достаточно просто. Он представляет собой “периодически зависящую от времени бегущую волну”, т. е. записывается в виде $v = v(t, y) : v(t + T, y) \equiv v(t, y), v(t, y + 1) \equiv -v(t, y), y = \alpha t + x$, где $\alpha = const \neq 0, T > 0$. Что же касается хаотических аттракторов квазинормальной формы (75), то для них, напротив, никаких строгих результатов о соответствии получить не удастся.

Приложения А и Б относятся к главе 6. В первом из них обсуждаются особенности динамики нелинейного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями из шестой главы в случае, когда запаздывание не велико. Во втором приложении приведены начальные условия и проекции устойчивых режимов разностной модели системы (75).

Цитированная литература

1. *Анищенко, В. С.* Сложные колебания в простых системах / *В. С. Анищенко.* — М.: Наука, 1990.
2. *Анищенко, В. С.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / *В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер.* — Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
3. *Ланда, П. С.* Нелинейные колебания и волны / *П. С. Ланда.* — М.: Наука, 1997. — 496 с.
4. *Гапонов-Грехов, А. В.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей / *А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович* // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7-44.
5. *Абарбанель, Г. Д.* Синхронизация в нейронных ансамблях / *Г. Д. Абарбанель, М. И. Рабинович, А. Селверстон, М. В. Баженов, Р. Хуэрта, М. М. Суццук, Л. Л. Рубчинский* // Усп. Физ. наук. — 1996. — Т. 166, № 4. — С. 363–390.
6. *Rabinovich, M. I.* Dynamical principles in neuroscience / *Mikhail I. Rabinovich, Pablo Varona, Allen I. Selverston, Henry D. I. Abarbanel* // Rev. Mod. Phys. — 2006. — V. 78. — P. 1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.

7. Колесов, Ю. С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / Ю. С. Колесов // Укр. матем. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 28 - 34.
8. Хэссард, Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. — М.: Мир, 1985.
9. Колесов, А. Ю. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 2004.
10. Кащенко, С. А. Уравнение Гинзбурга-Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / С. А. Кащенко // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 457 - 465.

Публикации по теме диссертации

Публикации в журналах из списка ВАК

1. Глызин, С. Д. Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия” / С. Д. Глызин // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 805–811.
2. Глызин, Д. С. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / Д. С. Глызин, С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 268–273.
3. Глызин, С. Д. Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 41–49.
4. Глызин, С. Д. Механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом 1:2 / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 11. — С. 1923–1934.
5. Глызин, С. Д. Явление буферности в системах с полутора степенями свободы / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1582–1593.
6. Глызин, С. Д. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 10. — С. 1809–1821.
7. Глызин, С. Д. Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов / С. Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 49–57.
8. Глызин, С. Д. Явление буферности в одном двумерном кусочно-линейном отображении из радиофизики / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 4. — С. 507–514.
9. Глызин, С. Д. О предельных значениях функций Мельникова на периодических орбитах / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 2. — С. 176–190.
10. Глызин, С. Д. Разделение движений в окрестности полуустойчивого цикла / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 5. — С. 598–615.

11. Глызин, С. Д. Об одной математической модели хаотической буферности / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Доклады РАН. — 2007. — Т. 412, № 5. — С. 604–609.
12. Глызин, С. Д. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона / С. Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 50–63.
13. Глызин, С. Д. Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 158–171.
14. Глызин, С. Д. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / С. Д. Глызин, Е. О. Киселева // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 75–88.
15. Глызин, С. Д. Пример аттрактора, состоящего из неустойчивых по Ляпунову периодических траекторий / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 94–95.
16. Глызин, С. Д. Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 1. — С. 76–89.
17. Глызин, С. Д. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. — 2009. — Т. 158, № 2. — С. 291–310.

Прочие публикации

18. Глызин, С. Д. Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации краевой задачи “реакция-диффузия” / С. Д. Глызин // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — С. 256–257.
19. Глызин, С. Д. Каскад бифуркаций странных аттракторов в одной модели краевой задачи “реакция-диффузия” / С. Д. Глызин // “Понтрягинские чтения - VII”: Тезисы докладов школы. — Воронеж: ВГУ, 1996. — С. 53.
20. Глызин, С. Д. Численные методы анализа динамических систем: Учебн. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2002. — 76 с.
21. Глызин С. Д. Сценарии фазовых перестроек одной резонансной динамической системы / С. Д. Глызин, Е. П. Кубышкин // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней матем. школы “Понтрягинские чтения - XV”. — Воронеж: ВГУ, 2004. — С. 58-59.
22. Глызин, С. Д. Нелинейная динамика одного дифференциального уравнения второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием / С. Д. Глызин, Е. П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 39–44.
23. Глызин, С. Д. Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов / С. Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 53-64.

24. *Glyzin, S.D.* Scenario Of Phase Reconstruction A Resonance (1:2) Dynamical System / *S.D. Glyzin* // VI International Congress on Mathematical Modeling. Book of Abstracts. Sept. 20-26, 2004, Nizhny Novgorod. – P. 249.
25. *Глызин, С. Д.* Соотношение свойств одного класса динамических систем и их нормальных форм / *С. Д. Глызин* // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы “Понтрягинские чтения XVI”. Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 48–49.
26. *Глызин, С. Д.* Качественное поведение нормальной формы одного класса динамических систем с переменным запаздыванием / *С. Д. Глызин, Е. П. Кубышкин* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 74–75.
27. *Глызин, С. Д.* Динамика нормальной формы трех близких однонаправленно связанных осцилляторов // Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы “Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XVII” (Воронеж, 3-9 мая 2006). – Воронеж: ВорГУ, 2006. – С. 60.
28. *Глызин, С. Д.* Алгоритм нормализации и динамика нормальной формы одного класса отображений / *С. Д. Глызин* // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2006: тезисы докладов / Воронеж: ВорГУ, 2006. – С. 56.
29. *Глызин, С. Д.* Асимптотическое поведение решений одного класса разностных уравнений // International Conference “Tikhonov and Contemporary Mathematics”, Moscow, June 19-25 2006. Section № 6. – P. 42-43.
30. *Глызин, С. Д.* Локальные методы анализа динамических систем / *С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов*: Учебн. пособие / Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 2007. – 92 с.
31. *Glyzin, S.D.* Dynamic Properties of a Circle of Three Unidirectionally Connected Oscillators / *S.D. Glyzin* // Материалы VIII международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур”, 9-14 октября 2007 г. – Саратов, 2007. – С. 47.
32. *Глызин, С. Д.* Качественный анализ логистического уравнения с двумя запаздываниями / *С. Д. Глызин* // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2008. Воронеж: ВорГУ, 2008. – С. 160–161.
33. *Глызин, С. Д.* Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / *С. Д. Глызин, Е. О. Киселева* // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 77–80.