

На правах рукописи

Гольдич Алексей Сергеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ
ПЛАЗМЫ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2014

Работа выполнена в Национальном Исследовательском Ядерном
Университете «МИФИ»

Научный руководитель: *д. ф.-м. н., проф.,
Брушлинский Константин Владимирович*

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук, профессор
Ватажин Александр Бенцианович,
начальник сектора, ГНЦ ФГУП "Центральный
институт авиационного моторостроения им.
П.И. Баранова"*

*доктор физико-математических наук, доцент
Сычугов Дмитрий Юрьевич,
доцент факультета вычислительной математики
и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова*

Ведущая организация: *Институт физики токамаков НИЦ "Курчатовский
институт", Москва.*

Защита диссертации состоится *« 24 » декабря* 2014 г. в *15* часов на
заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Национальном
Исследовательском Ядерном Университете «МИФИ», расположенном по
адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31, тел. 324-84-98, 324-92-56.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ.

Автореферат разослан *«__» ноября* 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные
печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого
секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета

д. ф.-м. н., проф.



Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Диссертация обобщает работы в области математического моделирования равновесных конфигураций плазмы, магнитного поля и электрического тока в ловушках - «галатеех». Рассмотрены конфигурации в плазменных цилиндрах с погруженными в них двумя и тремя прямыми и винтовыми проводниками – распрямленных аналогах соответствующих тороидальных ловушек. Плазموэстатические модели получены в результате численного решения краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова для функции магнитного потока при различных типах граничных условий.

Актуальность работы. Математическое моделирование обладает широкими возможностями в описании сложных физических процессов, установок и объектов исследования, с быстрым изменением параметров, характерных для изучаемого объекта, экономя при этом финансовые средства, исключая из рассмотрения неэффективные, нерабочие или принципиально невозможные установки и протекающие в них процессы. Аппарат предоставляемый математическим моделированием позволяет рассматривать, как сложные задачи, полностью учитывающие все процессы и взаимодействия в системе для получения достаточно точных результатов, так и упрощенные, рассматривающие основные принципиальные моменты, необходимые для теоретических вопросов касающихся возможности реализации, взаимодействия, реакции и др. В частности для теоретического исследования физических процессов и обработки экспериментальных данных, в области физики плазмы, существенную роль играет использование возможностей предоставляемых математическим моделированием.

Физика плазмы – область науки, занимающаяся изучением процессов и явлений, протекающих с участием заряженных частиц в ионизованных и проводящих средах, в природе и в лабораторных или промышленных установках. Значение решения задач физики плазмы для развития науки и техники состоит в расширении знаний о фундаментальных природных закономерностях, и, самое главное, в разработке проблемы управляемого термоядерного синтеза, создании новых технологий, приборов и устройств.

На протяжении уже более 60 лет ведутся активные исследования плазменных процессов, проводятся крупные научно–технические разработки, создаются плазменные установки – всё направлено на максимально глубокое изучение проблемы управляемого термоядерного синтеза (УТС).

Ориентация на указанные приложения, в первую очередь – термоядерные и развитие аппарата математического моделирования с использованием современных вычислительных мощностей обуславливает актуальность данной диссертационной работы.

Модели процессов в плотной горячей плазме строятся на языке магнитной газодинамики. Двумерные задачи используют симметрию — плоскую, осевую или винтовую. Они содержат развитый математический аппарат и эффективные методы решения. В частности, систему двумерных уравнений плазмостатики, можно свести к одному скалярному уравнению Грэда-Шафранова [1,2] — эллиптическому уравнению второго порядка с нелинейной правой частью. Задачи о возможных симметричных равновесных магнитоплазменных конфигурациях становятся краевыми задачами с этим уравнением.

Проблема управляемого термоядерного синтеза включает в себя вопросы образования равновесных плазменных конфигураций и их удержания магнитным полем. Обычно рассматривают замкнутые конфигурации, чаще всего тороидальные — токамак (с сильным тороидальным током в плазме) и стелларатор (с электрическим током в основном во внешних проводниках).

Большой интерес и перспективы представляют тороидальные конфигурации, в которых проводники с током погружены в плазму. Проводники не закреплены внутри конфигурации, при этом магнитное поле, образованное током в самих проводниках и плазме, ограждает их от контакта с последней. Этому классу ловушек посвящено обширное число работ, отечественных и зарубежных, начиная с А.Д. Сахарова [3] и Д.В. Орлинского [4] и С. Иошикавы [5]. Специальное внимание к данному классу ловушек и их перспективам привлечено в работах А.И. Морозова, в которых они названы «галатеями»[6]. Обзор их первых исследований, включая математические модели содержатся в [7].

В данной диссертации рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к краевым задачам с уравнением Грэда-Шафранова, а именно, итерационные методы

его решения, возможная неединственность решения, вопросы устойчивости. Они привлекли к себе внимание в процессе решения задач с тремя различными конфигурациями. «Пояс» [8] — тороидальная плазменная ловушка с погруженными в него двумя проводниками, «Трилистник» — аналог ловушки «Пояс» с погруженными в него тремя проводниками, «Стелларатор галатеи» — развитие конфигурации трилистник — тороидальная плазменная ловушка с погруженными в него винтовыми проводниками [9]. Для упрощения исследования, постановки и решения задач, тороидальные конфигурации ловушек заменены их распрямленным в цилиндр аналогом [10]. Сечения магнитных конфигураций в упомянутых трех ловушках плоскостью $z = \text{const}$, приведены ниже в разделе краткого содержания на рис.1-3.

Целью диссертации являются построение, исследование, развитие нелинейных математических моделей равновесных магнитоплазменных конфигураций в указанных ловушках, включая составление программного комплекса, и реализация модели в численных исследованиях геометрии и количественных характеристик конфигурации. Особое внимание уделено условиям на внешней границе цилиндра, допускающим её проницаемость для магнитного поля.

Методы исследования. "Распрямление" тора в цилиндр бесконечной длины очевидно упрощает модель, в случае прямых проводников конфигурация автоматически обладает симметрией, а в случае винтовых проводников позволяет предположить винтовую симметрию, т.е. сделать задачу двумерной. Решение нелинейных краевых задач с двумерным уравнением Грэда-Шафранова строится, используя численные методы. Разностный аналог краевой задачи решается итерационным методом установления, нелинейная часть берется с предыдущего слоя, а линейная со следующего. Для численного решения систем линейных уравнений на следующем слое использовались метод продольно-поперечной прогонки и метод Фурье. Для анализа появившихся в решении бифуркаций используются спектральные свойства линеаризованного аналога дифференциального оператора. Реализация численных алгоритмов проводилась на языке C++. Обзор математических моделей в задачах плазмостатики содержится в [11,12]

В диссертационной работе решены следующие задачи:

- Уточнения и модернизации математических моделей равновесных конфигураций плазмы, магнитного поля и электрического тока в цилиндре с погруженными в него проводниками с током. Модели используют аппарат двумерных краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова для функции магнитного потока.
- Модификации математических моделей с помощью различных граничных условий первого и второго рода в упомянутых краевых задачах с целью допустить прозрачность границ для магнитного поля и исследовать зависимость свойств конфигурации от величины полного электрического тока в плазменном цилиндре. Создание программного комплекса для реализации модели в расчете.
- Исследования геометрии и количественных характеристик магнитоплазменных конфигураций в расчетах серии задач в расширенных с помощью указанных модификаций постановках, а именно: распределения электрического тока в плазме, условий существования и единственности решения задач о равновесии, деформаций, вызванных прозрачностью границ цилиндра для магнитного поля.

Научная новизна работы:

Основные результаты работы являются новыми. Они дополняют и развивают теорию равновесных конфигураций плазмы, токов и магнитного поля в ловушках и их математических моделей, представленную цитируемыми в диссертации источниками.

Обоснованность и достоверность численных результатов подтверждается внутренней сходимостью метода расчетов, совпадением полученных результатов с тестовыми точными решениями, полученными аналитически и сопоставлением с результатами других авторов.

Теоретическая, методическая и практическая значимость работы

Результаты работы

- вносят вклад в теорию равновесных конфигураций плазмы, удерживаемой магнитным полем с электрическим током в термоядерных ловушках, и их математических моделей;

- демонстрируют возможности математических моделей и расчетов на современных компьютерных системах и их развитие в исследованиях сложных физических процессов в термоядерной тематике;
- имеет перспективу применения в разработке новых разновидностей магнитных ловушек-галатей для удержания плазмы, анализа и интерпретации экспериментов и оптимизации параметров.

Результаты диссертационной работы использованы в качестве материалов при выполнении федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»: "Математические и вычислительные вопросы моделирования процессов в научно-технических задачах физики плазмы" №16.740.11.0156, и гранта РФФИ №12-01-00071

На защиту выносятся:

1. Математические модели равновесных магнитоплазменных конфигураций построенные в терминах краевых задач с уравнениями типа Грэда-Шафранова, выбор и реализация численных методов, создание программного комплекса для расчетов на современных компьютерах, а именно:
 - а. Уточненная модель ловушек допускающая адекватные задаче безразмерные значения параметров и расчеты на достаточно подробных сетках, использующая современные средства визуализации результатов.
 - б. Модифицированная модель ловушек с прозрачными для магнитного поля границами на основе первой краевой задачи с заданными значениями максимального давления плазмы и неоднородной по угловой компоненте функцией магнитного потока на границе.
 - в. Модифицированная модель ловушек на основе второй краевой задачи с заданной азимутальной компонентой магнитного поля на границе, которая соответствует заданной величине полного электрического тока в цилиндре. Она также допускает прозрачные для магнитного поля границы. Максимальное значение давления плазмы при этом определяется в процессе расчетов.
2. Результаты серии расчетов равновесных конфигураций плазмы, магнитного поля и электрического тока в трех разновидностях плазменного цилиндра с

погруженными в него двумя и тремя прямыми и винтовыми проводниками с током, а именно:

- а. Во всех вариантах конфигураций и ловушек найдено распределение электрического тока в плазме, которое характеризует его тенденцию к скинированию: ток отсутствует в областях максимального давления и сосредоточен вблизи границ конфигураций.
- б. Найдены критические безразмерные значения максимального давления p_0^{cr} , зависящие от параметров задач, которые соответствуют бифуркациям решений от единственно существующих к неединственным или несуществующим.
- в. В расчетах конфигураций с прозрачными для магнитного поля границами в терминах модифицированных моделей количественно исследованы деформации поля и плазмы под влиянием указанных изменений граничных условий задач. Найдены условия, при которых плазменные конфигурации сжимаются или растягиваются в направлении своих осей симметрии, что может быть вызвано дополнительными проводниками с током, расположенными за пределами рассматриваемой цилиндрической области ловушки.

Апробация работы Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. Ежегодные Научные сессии НИЯУ МИФИ, Москва, 2009-2014г.г.
2. Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", посвященной памяти К.И. Бабенко. Дюрсо, 10-16 сентября, 2012г.
3. Международная конференция «Забабахинские научные чтения» Снежинск, 16-20 апреля 2012г.
4. Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информатики» С56 (МРАМCS'2012) Дубна, ОИЯИ, 22- 27 августа 2012г.
5. Международная конференция «Математическое моделирование и вычислительная физика» (ММСР'2013) Дубна, ОИЯИ, 8-12 июля 2013г

Публикации Основные результаты диссертационной работы отражены в 11 публикациях, в том числе 3 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Диссертация содержит 139 машинописных страниц, включая 40 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 79 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обсуждаются вопросы актуальности, определяются цели и методы работы, проводится общая характеристика диссертационной работы, а также делается обзор предшествующих исследований, кратко излагается структура, и представляются основные результаты.

Первая глава посвящена постановке двумерной МГД-задачи о равновесии в распрямленном в цилиндр аналоге тороидальных ловушек с двумя прямыми проводниками с током, погруженными в плазменный объем. Токи протекающие в проводниках, равные по величине и по направлению, создают магнитное поле, которое призвано удерживать плазму внутри ловушки и не допустить контакта с ними, а также окружающей её оболочкой. Данная конфигурация обладает плоской симметрией, в силу которой, как хорошо известно, модель существенно упрощается: вместо трех векторных уравнений плазмостатики достаточно иметь дело с одним скалярным уравнением типа Грэда-Шафранова (1) для функции магнитного потока Ψ [1,2].

$$\Delta\Psi = -\frac{4\pi}{c} j^{ex} - 4\pi \frac{dp}{d\Psi} - \left(\frac{4\pi}{c}\right)^2 I \frac{dI}{d\Psi} \quad (1)$$

Уравнение Грэда-Шафранова - двумерное эллиптическое уравнение второго порядка. Его младшие члены содержат две произвольные функции одной переменной $p(\Psi)$ и $I(\Psi)$, которые описывают распределение давления плазмы и электрического тока между «магнитными поверхностями» $\Psi = \text{const}$. В рассмотренном варианте постановки задачи давление плазмы задано так, чтобы сосредоточить плазму в ловушке в окрестности одной из магнитных поверхностей, а именно (2).

$$p(\Psi) = p_0 e^{-\left(\frac{\Psi - \Psi_0}{a}\right)^2} \quad (2)$$

Функция электрического тока в указанном варианте равна осевой координате магнитного поля и поэтому в задачах о «Поясе» и «Трилистнике» $I \equiv 0$. Функция j^{ex} , задающая ток в проводниках, предполагается непрерывно рассредоточенной в их окрестностях небольшого диаметра. Задача симметрична относительно осей x и y , т.е. вдоль лучей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, который позволяет ограничиться решением задачи только в первом квадранте. Поставленная краевая задача решается численно. Для численного решения поставленные задачи приводятся к безразмерной форме. Единицы измерения всех величин образованы из размерных параметров, участвующих в постановке задачи. Разностный аналог уравнения типа Грэда-Шафранова использует стандартный пятиточечный шаблон на ортогональной координатной сетке с постоянными шагами Δr и $\Delta \varphi$. Задачи с разностными уравнениями решаются итерационным методом установления. Линейное разностное уравнение для Ψ^{n+1} на следующей итерации решается методом продольно-поперечной прогонки. В этой главе также рассказано про использованные численные методы и особенности их применения. Затем описывается особенность постановки второй краевой задачи и возникающие дополнительные условия. Обсуждается неустойчивость и неединственность решений с помощью анализа малых возмущений решения в линейном приближении.

Вторая глава посвящена магнитной ловушке «Пояс» - цилиндрическом аналоге плазменного тора с погруженными в него двумя параллельными друг другу кольцевыми проводниками. Получены распределения магнитного поля, плазмы и тока в плазме. Распределение тока на характерной иллюстрации рис.1в показывает его направление: ток отрицателен и способствует отжатию плазмы от проводников в их окрестности, т.е. внутри сепаратрисы, в центральной части ток отсутствует, а вне сепаратрисы - положителен. На самой сепаратрисе направление тока меняет знак, т.е. $j^{pl} = 0$, конфигурация плазмы на ней, имеет характер токового «бислоя», а не слоя. Максимальный по величине ток обоих знаков протекает в районе границ конфигураций, испытывает тенденцию к «скинированию». Получены значения полного тока в плазме – положительного и отрицательного. В процессе исследования конфигураций с традиционным граничным условием первого рода,

ранее было отмечено, что при приближении к определенным в результате исследования значениям $p_0 = p_1^{cr}$ решение перестает быть единственным. Одному и тому же значению Ψ_r отвечают три решения. В этой части работы проведен спектральный анализ дифференциального оператора линеаризованного уравнения и рассчитаны его старшие собственные значения λ . Оказалось, что обращение λ в нуль соответствует $p_0 = p^{cr}$, полученному в процессе расчета нелинейной задачи. В этой части работы исследована зависимость характеристик ловушки от того, в каком виде задано граничное условия первого рода. В работе представлены расчеты серии вариантов первой краевой задачи в круговом сечении цилиндра, в которых граничное значение функции магнитного потока Ψ_r зависит от азимутальной координаты φ . Магнитное поле при этом может пересекать границу, а конфигурация плазмы и поля деформируется по сравнению с базовым вариантом $\Psi_r = \text{const}$ Рис.1. Деформация может быть вызвана, например, наличием дополнительных проводников с током, внешних по отношению к рассматриваемой области, которые в определенных пределах точности участвуют в модели её центральной части с помощью граничного условия. Далее граничное условие выбирается в различных вариантах, а именно рассматриваются два варианта зависимости: линейная – конечно гладкая и тригонометрическая, при этом последняя представляет больший интерес рассматриваемый ниже.

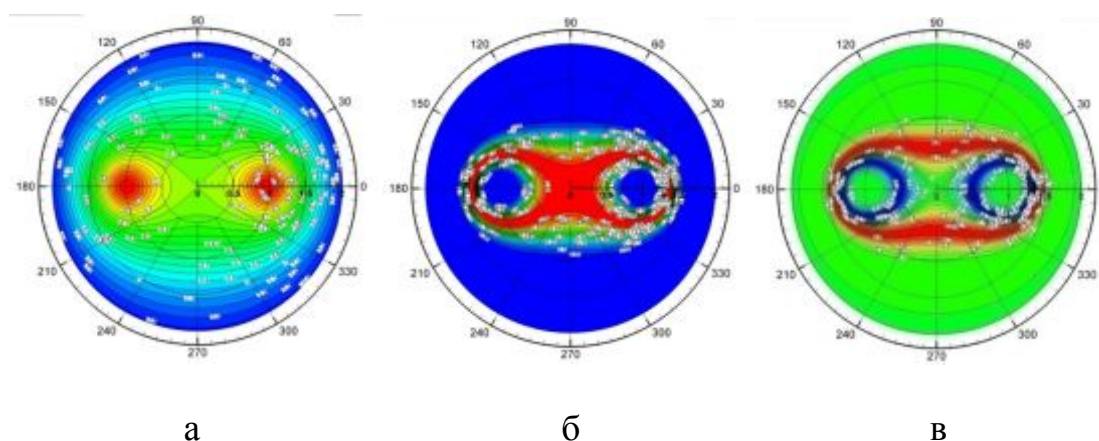


Рис 1 Расчет базового варианта ловушки «Пояс» а) магнитного поля б) давления в) тока в плазме

Расчеты магнитоплазменных конфигураций в «Поясе» и других ловушках, выполнены первоначально в терминах первой краевой задачи с уравнением Грэда-Шафранова с граничным условием $\Psi = \text{const}$ при $r = R$. Оно предполагает магнитную непроницаемость границы ($H_r = 0$) и создает определенную внутреннюю замкнутость задачи. Затем рассматривается граничное условие с переменным $\Psi_r(\varphi)$

$$\Psi_r(\varphi) - \Psi_0 = -1,44 + C \cos(2\varphi) \quad (3)$$

при $r = R = 2$, $0 < \varphi < \pi/2$ с симметричным отражением относительно осей $\varphi = 0, \pi$ и $\varphi = \pm\pi/2$ в остальных квадрантах. Константа $-1,44$ соответствует базовому варианту, в котором диаметр проводников $a = b = 0.25$, начальное давление $p_0 = 0.3$, $q = 0.3$, а множитель C пусть принимает разные значения. Условие (3) соответствует отличной от нуля нормальной компоненте магнитного поля

$$H_r = \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{d\varphi} = -C \sin(2\varphi) \quad (4)$$

и обеспечивает её гладкую зависимость от φ на границах квадрантов, где с учетом симметрии должно быть $H_r = 0$. Физический смысл условия (3) – замена проводящего кожуха непроводящим или вообще отсутствие какой-либо материальной границы, ограничивающей цилиндр, а распределение H_r вдоль границы может имитировать существование дополнительных проводников с током за пределами рассматриваемой цилиндрической области. Показано, что при $C > 0$ в расчетах задачи магнитное поле втекает в цилиндр через внешнюю границу в первом и третьем квадрантах и вытекает во втором и четвертом и сжимает плазменную конфигурацию в вертикальном направлении. При значениях $C \sim 1$ эта деформация незначительна, плазма занимает область, более протяженную по горизонтали и более узкую по вертикали с верхней и нижней границами, более выпуклыми в сторону плазмы. При дальнейшем увеличении C и в частности при $C = 2$ область изменяется сильно, влияние внешних проводников существенно, и этот факт

приводит к тому, что не весь объем плазмы при данной постановке располагался внутри области.

При $C < 0$ магнитное поле $H_n = H_r$ на границах – противоположного знака, т.е. оно втекает в цилиндр во втором и четвертом квадрантах и вытекает в первом и третьем. Плазменная конфигурация сжимается в горизонтальном направлении и расширяется – в вертикальном, где её внешняя граница становится выпуклой в сторону периферии. При $C \sim -1$ на лучах $\varphi = \pm \pi/2$ возникают особые точки типа седла. С ростом абсолютной величины C эти точки приближаются к центру, а за ними всё более ощущается влияние дополнительных токов положительного направления.

Таким образом, задачи с граничным условием первого рода (3) способны моделировать конфигурации в области с прозрачными для магнитного поля границами и с дополнительными токами за пределами цилиндра при умеренных значениях $|C| \sim 1$. Они описывают незначительную деформацию исследуемого объекта, вызванную либо небольшой величиной токов вне цилиндра, либо их достаточным удалением от цилиндра. При больших значениях $|C|$ дополнительные токи оказывают основное влияние на конфигурацию, и её математическая модель должна включать их в область исследования и в постановку задачи.

В третьей части второй главы рассматриваются результаты расчетов для второй краевой задачи. Условие второго рода с заданной нормальной производной искомой функции Ψ

$$H_r(\varphi) = G(\varphi) = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

где $H_r = H_\varphi(R, \varphi)$ - азимутальная компонента магнитного поля. Хорошо известно, что вторая краевая задача с уравнением Пуассона разрешима только при выполнении необходимого согласования потока через границу с мощностью источника. В рассматриваемой задаче аналогичное требование возникает, если проинтегрировать уравнение Грэда-Шафранова по кругу $r < R$ и использовать граничное условие (5): $R \int_0^{2\pi} H_r(\varphi) d\varphi = \iint_{r < R} g(\Psi) r dr d\varphi$ указанное равенство при

заданной функции $H_r(\varphi)$ однозначно определяет максимальное значение давления p_0 .

Математическая модель конфигурации «Пояс» в терминах второй краевой задачи с уравнением Грэда-Шафранова в круге $r < R$ представлена здесь тремя сериями расчетов. Функция $H_r(\varphi)$ в граничном условии второго рода $-\partial\Psi/\partial r = H_r(\varphi)$ будет варьироваться тремя способами, отталкиваясь от ее значения (5), полученного в численном решении первой краевой задачи для базового варианта.

Эта функция характеризуется двумя обстоятельствами. Её интеграл по границе или среднее значение соответствует циркуляции магнитного поля, т.е. полному току в квадранте

$$J^{tot} = J^{pl} + \frac{J_c}{2} \quad (6)$$

Отличие от среднего значения определяет профиль распределения величины тангенциального поля вдоль границы.

В первой серии расчетов положим

$$H_r(\varphi) = CG(\varphi) \quad (7)$$

т.е. пусть полный ток и профиль тангенциального поля изменяются одновременно пропорционально друг другу с коэффициентом подобия $C > 0$. Из результатов расчетов следует, что при $C > 1$ конфигурация деформируется по сравнению с базовой, а именно, сжимается в горизонтальном направлении и становится более выпуклой в вертикальном. Магнитное поле втекает в цилиндр во втором и четвертом квадрантах. С ростом параметра C возрастает величина полного, а следовательно, плазменного тока, т.к. в формуле (6) ток в проводнике J_c постоянен. Возрастает и максимальное значение p_0 давления плазмы, которую ток может удерживать. В диссертационной работе приводится зависимость токов и давления от множителя C . Из неё следует, что с ростом C быстро растет положительный плазменный ток J^+ вне сепаратрисы. Отрицательный ток J^- при $C > 2$ интенсивно падает и, следовательно, теряет способность не допускать соприкосновения плазмы с проводником. При $C = 2,5$ область проводника практически полностью залита

плазмой. Одновременно усложняется топология магнитного поля в окрестности $r = 0$. При изменении множителя C в меньшую относительно $C = 1$ сторону токи в плазме обоих знаков быстро уменьшаются и при $C = 0,955$ полностью исчезают. То обстоятельство, что этот вакуум наступил при незначительном изменении C от 1 до близкого значения 0,955 объясняется тем, что в базовом варианте ($C = 1$) значение тока в плазме $J^{pl} = 0,22$ значительно меньше тока в проводнике: безразмерные значения тока $J_c/2$ в формуле (6) равно 3,14.

Во второй серии граничное условие при $r = 2$ имеет вид

$$H_r(\varphi) = \langle G \rangle + C(G(\varphi) - \langle G \rangle) \quad (8)$$

где $\langle G \rangle$ - среднее значение базового азимутального поля на отрезке $0 < \varphi < \pi/2$. Множитель C определяет знак и величину профиля функции (8). Его значение $C = 1$ опять соответствует базовой конфигурации. В результате расчетов установлено, что при $C > 1$ (более крутой профиль $H_r(\varphi)$) происходит деформация магнитного поля: на периферии оно заметно сжимается в горизонтальном направлении, а в центральной части цилиндра меняется значительно меньше. Поэтому плазменная конфигурация почти не изменяется, слабо расширяясь по вертикали. Полный ток в области определяется средним значением функции (8) и потому остается равным базовому $J^{pl} = 0,22$ независимо от C . Положительный J^+ и отрицательный J^- плазменные токи незначительно и согласованно убывают по величине с ростом C , так что их сумма не изменяется. Максимальное значение давления несколько снижается (от $p_0 = 0,3$ при $C = 1$ до $p_0 = 0,23$ при $C = 2,5$) в результате расширения плазменной конфигурации. При $C < 1$ (профиль $H_r(\varphi)$ менее крутой или даже противоположного знака) конфигурации поля и, следовательно, плазмы сжимаются в вертикальном направлении и растягиваются в горизонтальном. Магнитное поле втекает в цилиндр в первом и третьем квадрантах. Плазменные токи J^+ и J^- несколько возрастают, оставляя неизменной их сумму. Максимальное давление p_0 снижается незначительно, т.к. площадь области, занятой плазмой, деформируясь, лишь слегка увеличивается.

В конце главы рассматривается модель «Пояса» сопоставленная с близкой к ней моделью токового слоя, обращено внимание на общие черты обеих моделей и на их различия.

Третья глава посвящена конфигурации ловушки типа «трилистник». Численная модель равновесия плазмы в цилиндрической ловушке с тремя погруженными в нее прямыми проводниками рассмотрена кратко в качестве обобщения аналогичной конфигурации «Пояс». Расчеты конфигурации в изложенной выше модели позволили найти значения ее характерных параметров и сопоставить их с аналогичными значениями в «Поясе» для сравнительного анализа. Метод численного решения, при описанной выше постановке не изменяется.

Как и в случае ловушки «Пояс» существенную роль играет сепаратриса (трехлистная), которая проходит через центр и отделяет силовые линии, окружающие каждый проводник в отдельности от линий на периферии, охватывающих все три проводника. Плазма занимает в основном область в центре, которая имеет вид криволинейного шестиугольника с узкими ответвлениями, опоясывающими проводники. Максимальное значение давления - в центре и на сепаратрисе. В качестве базового варианта с граничным условием $\Psi = \Psi_r = \text{const}$, качественно описанного выше, выбрана конфигурация с параметрами $p_0 = 0.5$ $a = 0.1$ $q = 0.5$ Рис.2

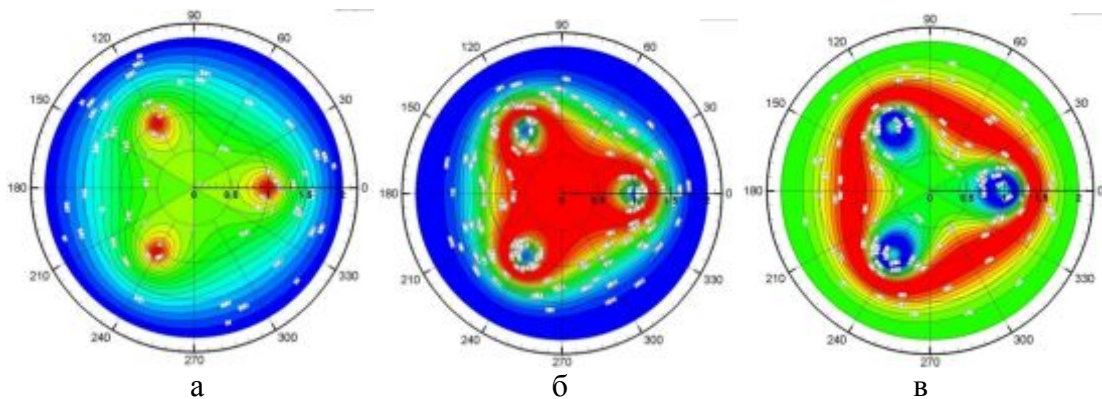


Рис.2. а) Магнитное поле б) давление в) распределение плазменного тока в Трилистнике

Интегральные значения тока, отрицательного внутри сепаратрисы и положительного вне ее, в «Трилистнике» меньше, чем в «Поясе», т.е. его значения убывают с добавлением третьего проводника.

Ограничения на максимум давления $p_0 < p^{cr}$, связанные с переходом границы спектра оператора через нуль в область отрицательных значений, имеют место и в модели «Трилистник». По сравнению с «Поясом» они оказались в 1,5-2 раза выше, т.е. при добавлении третьего проводника указанное ограничение становится слабее.

Далее используется граничное условие с переменным $\Psi_r(\varphi)$

$$\Psi_r(\varphi) - \Psi_0 = -2,13 + C \cos(3\varphi), \quad (9)$$

где значение константы -2,13 соответствует базовому варианту. Как и ранее, множитель C пусть принимает разные значения. Представлены распределения магнитного поля, давления и распределение плазменного тока в Трилистнике при решении краевой задачи с граничным условием (9) при $C=1$. Видно, что при $C > 0$ магнитное поле деформировано, оно втекает в нечетных секторах. Магнитная и плазменная конфигурация сжимается в направлении вдоль нечетных осей симметрии и вытекает вдоль четных. При этом при значениях $C \sim 1$ эта деформация незначительна, плазма занимает область, схожую по размерам и параметрам с классическими конфигурациями. Плазменный ток распределен следующим образом: положительный плазменный ток расположен вблизи внешней границы плазмы в форме вогнутого треугольника, вершины которого охватывают область проводников. Вблизи проводников сосредоточен отрицательный плазменный ток, занимающий кольцевые области. При значениях $C \geq 2$ деформации становятся значительны, а дальнейшее увеличение до $C \geq 3$ приводит к сильным изменениям распределений всех характеристик.

При $C < 0$ магнитное поле H_r на границах – противоположного знака, т.е. оно втекает в цилиндр в четных секторах. Плазменная конфигурация сжимается в направлениях вдоль четных осей симметрии и расширяется – во внешнюю область по нечетным, где её внешняя граница становится выпуклой в сторону периферии. Плазменный ток в частности положительный распределен в форме треугольника, но если ранее стороны треугольника были вогнутые, то в этом случае уже при $C = -1$ они прямые, со значительным уширением на стороне. С ростом абсолютной величины $C < 0$ конфигурации магнитного поля, плазмы и тока меняются значительно. Всю конфигурацию в основной своей массе «растягивает наружу», при этом роль основных токов не ослабевает. Таким образом, задачи с граничным

условием первого рода (9) способны моделировать конфигурации с дополнительными токами за пределами цилиндра при умеренных значениях $|C| \sim 1$. Как и в случае «Пояса» они описывают незначительную деформацию исследуемого объекта, вызванную либо небольшой величиной токов вне цилиндра, либо их достаточным удалением от цилиндра. При больших значениях $|C|$ дополнительные токи оказывают основное влияние на конфигурацию, и её математическая модель должна включать их в область исследования и в постановку задачи.

Вторая часть третьей главы посвящена математической модели конфигурации «Трилистник» в терминах второй краевой задачи с уравнением Грэда-Шаффранова. Она представлена здесь как и выше тремя сериями расчетов.

В первой серии расчетов положим граничное условие в виде (7), т.е. пусть полный ток и профиль тангенциального поля изменяются одновременно пропорционально друг другу с коэффициентом подобия $C > 0$. Из результатов расчетов следует, что при $C > 1$ конфигурация деформируется по сравнению с базовой, а именно, сжимается вдоль нечетных осей симметрии и становится более выпуклой вдоль четных. Магнитное поле втекает в цилиндр в четных секторах. С ростом параметра C возрастает величина полного, а следовательно, плазменного тока, т.к. ток в проводнике J_c постоянен. Возрастает и максимальное значение p_0 давления плазмы, которую ток может удерживать.

Плазма сосредоточена в треугольной, практически правильной, неискаженной ровной области. При сравнении с базовым он менее растянут в центр конфигурации. С ростом C быстро растет положительный плазменный ток J^+ вне сепаратрисы. Отрицательный ток J^- при $C > 2$ интенсивно падает и, следовательно, теряет способность не допускать соприкосновения плазмы с проводником. При $C = 2$ область проводника практически полностью залита плазмой, однако в плазме вокруг проводника протекающие токи разных направлений. При изменении множителя C в меньшую относительно $C = 1$ сторону токи в плазме обоих знаков быстро уменьшаются и при $C = 0,967$ полностью исчезают, как и в случае ловушки пояса.

Во второй серии рассматривается граничное условие при $r = 2$ вида (8), где $\langle G \rangle$ - среднее значение базового азимутального поля на отрезке $0 < \varphi < \pi/3$.

Множитель C определяет знак и величину профиля функции (8). Его значение $C = 1$ по-прежнему соответствует базовой конфигурации.

В результате расчетов установлено, что при $C > 1$ происходит деформация магнитного поля: на периферии оно заметно сжимается вдоль лучей $\varphi = 2n\pi/3$, а в центральной части цилиндра меняется значительно меньше. Поэтому плазменная конфигурация почти не изменяется, слабо расширяясь вдоль лучей $\varphi = (2n + 1)\pi/3$.

При $C < 1$ конфигурации поля и, следовательно, плазмы сжимаются вдоль лучей $\varphi = (2n + 1)\pi/3$ и растягиваются вдоль лучей $\varphi = 2n\pi/3$. Магнитное поле втекает в цилиндр в нечетных секторах.

Таким образом все рассмотренные процессы качественно совпадают с таковыми в ловушке типа «Пояс», но отличаются количественно.

Четвертая глава посвящена более сложной и интересной задаче о равновесии в ловушке «Стелларатор- галатей». Она отличается от «Трилистника» предположением винтовой симметрии с тем же шагом, что и винтовые проводники. Винтовые проводники внесли качественное изменение в геометрию магнитного поля. Винтовая природа проводников проявляется в том, что сепаратриса магнитного поля, разделяющая различные по структуре области, не проходит через центр. Помимо областей, окружающих проводники, появляется область в виде криволинейного треугольника в центральной части цилиндра, в которой магнитное поле ориентировано по часовой стрелке. Если сосредоточить плазму, как и выше, на сепаратрисе, получим конфигурацию сложной формы. Рассматриваемая модель конфигураций позволяет сравнить между собой два варианта распределения плазмы.

В случае рассмотрения цилиндрических ловушек с винтовыми проводниками, дополнительно предполагается винтовая симметрия задач: все искомые величины зависят от двух пространственных переменных r и $\theta = \varphi - \alpha z$, где $\alpha = 2\pi/h$, h - шаг винта проводников. При этом ток, как и ранее, состоит из заданного в области проводниками и индуцированного плазменного $j_z = j_z^{ex} + j_z^{pl}$, а уравнение Грэда-Шафранова видоизменяется в соответствии с винтовой симметрии [13].

Существует два типа варианта конфигурации: первый тип - это сосредоточение плазмы в центральной части ловушки, второй тип - сосредоточение плазмы в области сепаратрисы. Кратко рассмотрим конфигурации с плазмой, расположенной в центре. В конфигурациях с плазмой в центре плазменный ток везде

отрицателен, т.е. противоположен по направлению токам в проводниках. Электромагнитная сила отжимает плазму от проводников в основном в сторону центра, а небольшое количество в пространстве за проводниками - в противоположную сторону. При малых давлениях p_0 ее удерживает неподвижная граница, вблизи которой можно заметить небольшое повышение давления. При более высоких значениях p_0 плазму удерживает от разлета изменившее направление азимутальное поле за упомянутым выше вторым поясом особых точек. В работе получены и обсуждаются значения полного плазменного тока в зависимости от параметров.

Более интересны конфигурации, в которых плазма сосредоточена вблизи сепаратрисы Рис.3, в этом случае, очевидно, она занимает гораздо большую часть объема цилиндра, как впервые показано в работе [14]. В частности, диапазон допустимых значений p^{cr} здесь шире, чем в рассмотренных выше конфигурациях. Эти обстоятельства согласуются с изученными ранее результатами и еще раз демонстрируют преимущества ловушек-галатей перед традиционными стеллараторами.

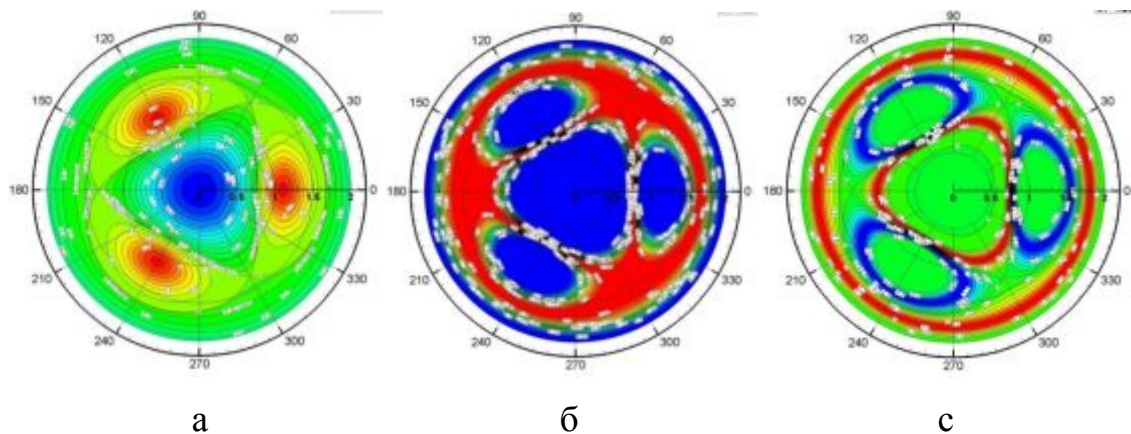


Рис.3. а) Магнитное поле б) давление в) распределение плазменного тока в Стеллараторе-галатее

Направление тока в плазме отлично от рассмотренных выше вариантов. Ток по-прежнему отрицателен и способствует отжатию плазмы от проводников в их окрестности, т.е. внутри лепестков сепаратрисы, а в центральном треугольнике и вне сепаратрисы - положителен. На самой сепаратрисе направление тока меняет знак,

т.е. $j^{pl} = 0$, конфигурация плазмы на ней, как и в «Поясе», имеет характер токового «бислоя», а не слоя. Максимальный по величине ток обоих знаков протекает в районе границ конфигураций, т.е. как и выше испытывает тенденцию к «скинированию». Получены значения полного тока в плазме – положительного и отрицательного.

Расчеты магнитоплазменных конфигураций в СГ как в «Трилистнике» и «Поясе», выполнены первоначально в терминах первой краевой задачи с уравнением Грэда-Шафранова с граничным условием $\Psi = \text{const}$ при $r = R$. Используя граничное условие в виде $\Psi_r(\theta) - \Psi_0 = \Psi_b + C \cos(3\theta)$, где Ψ_0 - значение Ψ на сепаратрисе, а Ψ_b - «базовое» значение $\Psi_r - \Psi_0$, полученное в традиционной постановке задачи с $\Psi_r = \text{const}$ при значениях $R = 2$, $r_c = 0.25$, $p_0 = 0.5$, $q = 0.5$. При $C > 0$ поле втекает в цилиндр в первом секторе, и, следовательно, во всех нечетных секторах, и вытекает из него в четных. Магнитоплазменная конфигурация деформируется при этом, сжимаясь к центру в направлениях нечетных лучей $\theta = (2n+1)\pi/3$ посередине между проводниками и растягиваясь от центра в четных направлениях за проводниками при $\theta = 2n\pi/3$.

Если плазма сосредоточена в центре, конфигурации не претерпели хоть сколько-нибудь заметного изменения при изменении граничного условия. А в случае расположения плазмы вдоль сепаратрисы, в центральной части находится плазменное и соответственно электромагнитное образование треугольной формы, которое при изменении граничного условия не изменило своей формы, по сравнению с базовой конфигурацией. Полученная деформация в СГ ослабляет выпуклость в сторону периферии, что по-видимому, должно положительно влиять на его устойчивость.

При $C < 0$ конфигурация деформируется противоположным образом: поле втекает в цилиндр в четных секторах и вытекает – в нечетных, плазма прижимается к центру за проводниками, а между проводниками её внешняя граница стремится вытянуться от центра и стать более выпуклой наружу.

Следует заметить, что в СГ внутренняя граница плазменной конфигурации, а также положение сепаратрисы и седловых точек, вокруг которых в основном

сосредоточена плазма, при деформациях обоих типов практически не меняются, т.е. деформируется только её внешняя граница.

Произведен подробный анализ зависимости формирования магнитных конфигураций в зависимости от C . Приводится детальное описание результатов исследования распределения токов в области.

Далее рассматривается постановка задачи с граничным условием второго рода. Расчеты конфигураций в терминах второй краевой задачи проведено в двух сериях, как и ранее, отталкиваясь от значений $r = R$: $-\partial\Psi/\partial r = H_r(\theta) = G(\theta)$ где $G(\theta)$ – численные значения $-\partial\Psi/\partial r$, полученные в расчетах «базовых» задач при $\Psi_r = \text{const}$ в «центральном» и «сепаратрисном» СГ с указанными выше параметрами. При $C > 1$, т.е. при увеличении полного тока обе конфигурации деформируются, сжимаясь вдоль четных лучей, проходящих через проводники, и вытягиваясь вдоль нечетных - между проводниками. Магнитное поле втекает в цилиндр в нечетных секторах и вытекает в четных. В «центральном» случае постановки расчеты равновесия допускают достаточно сильное возрастание коэффициента C . Плазма и электрический ток занимают круглую область в центре ловушки не меняя своей геометрии, при этом магнитное поле в области за проводниками в плоть до границы ловушки способно меняться.

Равновесные конфигурации сосредоточенные вдоль сепаратрисы устанавливаются лишь при ограниченных значениях $1 < C < 1.4$.

При значениях $C < 1$, т.е. при уменьшении полного тока, равновесные конфигурации в обеих ловушках устанавливаются только в узком диапазоне $C_{cr}^- < C < 1$, где $C_{cr}^- = 0.886$ в «центральном» случае и $C_{cr}^- = 0.745$ в «сепаратрисном».

Во второй серии расчетов, в которой фиксируется полный ток, граничное условие имеет вид $-\partial\Psi/\partial r = H_r(\theta) = \langle G \rangle + C(G(\theta) - \langle G \rangle)$, где $\langle G \rangle$ - среднее значение «базовой» функции $G(\varphi)$ заданной ранее. Как и ранее, это граничное условие возмущает лишь профиль азимутального поля. При $C = 1$ профиль $H_r(\theta)$ совпадает с базовым, при $C > 1$ – становится более крутым, при $C < 1$ – менее крутым, а при $C < 0$ – монотонным в противоположную сторону. В обеих ловушках

конфигурация сжимается вдоль четных лучей $\theta = 2\pi n/3$ и расширяется вдоль нечетных $\theta = (2n+1)\pi/3$, где становится более выпуклой.

Изменение профиля $H_r(\theta)$ в противоположную сторону приводит к противоположным деформациям плазмы и поля: сжатию вдоль нечетных лучей и растяжению вдоль четных. В обоих рассмотренных типах деформаций значения максимального давления p_0 незначительно убывают за счет незначительного перераспределения положительного и отрицательного токов в плазме.

Заключение .

Построена численная модель равновесия плазмы, магнитного поля и электрического тока в трех магнитных ловушках-галатеех: «Пояс», «Трилистник» и «Стелларатор-галатее» в их распрямленной в цилиндр модификации. Изложен математический аппарат модели - вычислительная плазмостатика, основанная на численном решении краевых задач с уравнением Грэда-Шафранова. Получены новые результаты дополняющие и развивающие теорию в рассматриваемой области: указаны значения максимального давления плазмы, ограничивающего возможность существования равновесных конфигураций в трех ловушках с фиксированными расположением проводников и значениями тока в них, спектральный анализ бифуркаций, связанных с неединственностью решения задач о «Поясе»; расчет конфигурации «Трилистник» с тремя параллельными проводниками с током; подробный анализ распределения плазмы, магнитного поля и плотности тока в «Стелларатор-галатее» с винтовыми токонесящими проводниками в двух различных вариантах сосредоточения плазмы. Во всех трех примерах обращается внимание на тенденцию к «скинированию» электрического тока в плазме, т.е. его сосредоточение на границах плазменных конфигураций. Получены новые результаты в двух направлениях: 1) расширение традиционных краевых условий первого рода и модели конфигураций в областях с прозрачными для магнитного поля границами; 2) задачи с краевыми условиями второго рода и модели конфигураций с заданным током в плазме. Исследованы равновесные конфигурации плазмы, поля и тока в зависимости от различных вариантов условий на границе. Показано, что при изменении этих условий равновесные конфигурации деформируются. Это может быть связано, например, с влиянием дополнительных проводников с током,

расположенных за пределами цилиндра. Результаты расширяют возможности теоретических исследований равновесия плазмы в магнитных ловушках-галатеех.

Цитируемая литература: .

- [1] Шафранов В.Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях. // ЖЭТФ. 1957. Т.33 Вып3(9). С. 710-722
- [2] Grad H., Rubin H. Hydromagnetic equilibria and force-free fields. // Proc. 2nd United Nations Int.Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva. Vol. 31., P.190. Columbia Univ. Press, N.Y. 1959.
- [3] Сахаров А.Д. в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций Т.1 (Под ред. М.А. Леонтовича)(М.:изд-во АН СССР, 1958) с.20
- [4] Орлинский Д.В. в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций Т.4 (Под ред. М.А. Леонтовича)(М.:изд-во АН СССР, 1958) с.49
- [5] Yoshikawa S. experiments on plasma confinement in internal-ring devices. // Nucl. Fusion. 1973. V.13, №3. P.433-450.
- [6] Морозов А.И. О галатеех – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками //Физ. плазмы. 1992 Т.18 Вып. 3. с.305-316
- [7] Морозов А.И., Савельев В.В. О галатеех – ловушках с погруженными в плазму проводниками // Усп. физ. наук. 1998. Т. 168, №11. С. 1153-1194.
- [8] Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатееа с азимутальным током //Физ. плазмы. 1994. Т.20. №11. С.982-989
- [9] Морозов А.И., Пустовитов В.Д. О стеллараторе с левитирующими обмотками //Физ. плазмы. 1991. Т. 17. Вып. 10. С. 1276.
- [10] Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физ. плазмы. 1994. т. 20. №3. С. 284-292.
- [11] Брушлинский К.В., Савельев В.В. Магнитные ловушки для удержания плазмы // Матем. моделирование. 1999. Т. 11, №5. С. 3-36.
- [12] Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 200с.
- [13] Johnson J.L., Oberman C.R., Kulsrud R.M., Frieman E.A. Some stable hydromagnetic equilibria // Phys. Fluids. 1958. V.1. №4. P.281-296.

[14] Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б. Численное моделирование равновесной винтовой конфигурации с плазмой на сепаратрисе // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. №11. С. 29-36.

Основные результаты диссертации представлены в работах: .

1. Брушлинский К. В., Гольдич А.С., Десятова А.С. Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Математическое моделирование, 2012, том 24, номер 8, стр. 81-96;
2. Брушлинский К. В., Гольдич А.С. Краевые задачи вычислительной плазмостатики // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 2013, том 2, № 3, стр. 292–304;
3. Брушлинский К. В., Гольдич А.С. Плазмостатические модели ловушек-галатей с магнитопроницаемыми границами // Физика плазмы, 2014, том 40, №8, стр. 687-696;
4. Гольдич А.С. Численная модель равновесия плазмы в магнитной ловушке // Научная сессия НИЯУ МИФИ, Москва, 2009.С.129;
5. Гольдич А.С. Математическое моделирование равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках// Научная сессия НИЯУ МИФИ, Москва, 2012. С.138;
6. Гольдич А.С. Влияние граничных условий в плазмостатической модели магнитной ловушки Галатеи // Научная сессия НИЯУ МИФИ, Москва, 2013. С.127;
7. Гольдич А.С. Математическое моделирование равновесия плазмы в ловушках с магнитопроницаемыми границами // Научная сессия НИЯУ МИФИ, Москва, 2014. С.226;
8. Гольдич А.С. Плазмостатические модели некоторых ловушек галатей // Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", посвященной памяти К.И. Бабенко Дюрсо, 2012.
9. Брушлинский К. В., Гольдич А.С. Численные модели удержания плазмы в магнитных ловушках // Международная конференция «Забабахинские научные чтения»: сборник материалов XI Международной конференции Снежинск: 2012. С.127;

10. Гольдич А.С. Роли граничных условий в плазмостатических моделях магнитных ловушек//Международная конференция «Современные проблемы прикладной математики и информатики» С56 (МРАМС'2012):Тезисы докладов международной молодежной конференции- школы Дубна, ОИЯИ 2012г. С.77.
11. Гольдич А.С. Краевые задачи с уравнением Грэда-Шафранова в моделировании магнитных ловушек//Международная конференция «Математическое моделирование и вычислительная физика» (ММСР'2013): Тезисы докладов международной конференции Дубна, ОИЯИ, 2013г.