

На правах рукописи

ИВАНОВА ТАТЬЯНА БОРИСОВНА

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ  
СТАЦИОНАРНЫХ И БИФУРКАЦИОННЫХ  
ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2012 год

Работа выполнена в Институте компьютерных исследований Удмуртского государственного университета.

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
профессор Мамаев И. С.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Маркеев А. П. (ИПМ РАН),  
доктор физико-математических наук,  
профессор Мисюрин С. Ю. (ИМАШ РАН)

Ведущая организация: Институт прикладной механики  
Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится 15 февраля 2012 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 в Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ «МИФИ».

Автореферат разослан 13 января 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
д. ф.-м. н., профессор



А. С. Леонов

## Общая характеристика работы

### Актуальность работы

В последние несколько десятилетий для исследования многих задач механики, физики и других наук все больше применяются компьютерные методы, различные численные алгоритмы, системы аналитических вычислений и компьютерной визуализации. Кроме того, с появлением быстродействующих компьютеров возобновился интерес к решению классических задач механики, гидродинамики, астрофизики, аналитические подходы к решению которых исчерпали себя. Для таких задач, наряду с аналитическими методами, для описания глобального поведения возможно также применение численных методов теории динамических систем: построение сечения Пуанкаре, методы поиска периодических решений, топологический анализ инвариантных многообразий интегрируемых и неинтегрируемых систем (на основе бифуркационного комплекса), а также различные численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Одной из главных целей диссертации является создание комплекса программ, в котором реализуются приведенные выше численные методы для исследования систем гидродинамического типа. Одной из наиболее сложных для исследования проблем, которые встречаются в системах гидродинамического типа, является проблема определения фигур равновесия самогравитирующих жидких и газовых масс.

Классическая задача о фигурах равновесия самогравитирующей жидкости имеет более чем трехсотлетнюю историю, тем не менее, в этих исследованиях на сегодняшний день остается много открытых вопросов, которые могут быть разрешены с использованием компьютеров. В рассматриваемой области актуальными являются численная реализация топологических методов анализа и поиск областей устойчивости системы, компьютерная визуализация эволюции и распада фигур равновесия, в том числе в области неустойчивости, которые позволяют приблизиться к пониманию многих наблюдаемых в природе астрофизических явлений. Однако трехмерная задача, к классическим результатам которой относятся эллипсоиды Маклорена и Якоби [8, 13], является достаточно сложной как для моделирования, так и с точки зрения наглядности представления результатов [2]. Упрощенной формой общей проблемы является задача о фигурах равновесия бесконеч-

ной однородной массы цилиндрической формы, вращающейся с заданным моментом вокруг оси цилиндра, так как достаточно рассматривать плоское сечение. Ранее подробно задача о существовании и устойчивости плоских фигур равновесия исследовалась Липшицем [5], который проинтегрировал данную систему в квадратурах, Джинсом [4] и Лавом [6]. Но, несмотря на то, что квадратуры известны, о качественном и количественном поведении системы было известно очень мало. Поэтому актуальными являются исследование фигур равновесия и анализ их устойчивости современными топологическими методами, с помощью визуализации бифуркационных диаграмм и с использованием современных пакетов аналитических вычислений. Кроме исследования однородных самогравитирующих тел в двумерной постановке, в ходе работы была поставлена новая задача о равновесии неоднородного вращающегося самогравитирующего эллипсоида вращения. Эта задача подробно рассмотрена в работах Чаплыгина [14], который из-за аналитических сложностей не довел решение до конца. Используемые в созданном комплексе программ методы позволяют полностью исследовать данную задачу.

Все известные результаты, полученные ранее аналитическими методами, относятся к эллипсоидальным формам (или формам, бесконечно близким к эллипсоидальным). Для описания динамики более сложных конфигураций решение не может быть получено аналитически из-за сложностей при решении уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Поэтому актуальным является исследование данной системы компьютерными методами и проведение визуализированного численного эксперимента не только в области существования и устойчивости, но и в областях возможных распадов, для которых на сегодняшний день вообще нет аналитического решения.

Для визуализации эволюции фигур равновесия самогравитирующей жидкости возможно использование метода дискретизации сплошной среды (бесконечномерная система аппроксимируется конечномерной системой с большим числом степеней свободы), так как суммарный гравитационный потенциал определяется взаимодействием отдельных частиц, и для каждой частицы можно записать и проинтегрировать уравнения движения (в области свободного движения). Основная проблема при интегрировании уравнений движения возникает на малых расстояниях между частицами. Актуальной также является разработ-

ка процедуры регуляризации на малых расстояниях, которая позволит в хорошем приближении описать динамику самогравитирующих систем с учетом законов сохранения.

Такого рода аппроксимации оправдали себя при исследовании систем точечных вихрей [9] и в статистической механике [10] для выявления различных статистических закономерностей. Исследования динамических систем с большим числом степеней свободы с помощью компьютерного моделирования также служат развитию методов неравновесной термодинамики и новых статистических методов анализа динамических систем, предложенных недавно в работах В. В. Козлова [12].

### **Цель работы**

Целью диссертационной работы является создание программного комплекса для исследования динамики жидких и газовых самогравитирующих масс методом дискретизации, а также для исследования систем с одной степенью свободы, анализ которых возможен с помощью гироскопической функции и топологических методов.

### **Методы исследования**

Для исследования рассматриваемых в диссертации задач использовался спектр аналитических и компьютерных методов теории динамических систем. При решении уравнений движения дискретных частиц использовался модифицированный метод Рунге–Кутты четвертого порядка с переменным шагом по времени. Шаг по времени определялся с помощью регуляризации уравнений движения и корректным описанием рассеяния частиц. Программирование осуществлялось на языке C++ в среде Visual Studio.NET 2003. Многие алгебраические преобразования, в том числе построение бифуркационной диаграммы, выполнялись с помощью программы Maple. Для исследования систем, описываемых гироскопической функцией (к которым относится жидкий эллиптический цилиндр), и определения областей устойчивости применялись топологические методы анализа (на основе бифуркационного комплекса).

### **Научная новизна работы**

Предложена математическая модель, описывающая динамику самогравитирующих масс, включающая метод дискретизации сплошной

среды в двумерной постановке. Частицы взаимодействуют по логарифмическому закону. Также модель включает в себя процедуры регуляризации и рассеяния на малых расстояниях (частицы на малых расстояниях ведут себя как упругие диски конечного радиуса), при этом с высокой точностью выполняются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса системы. Данная модель впервые реализована в комплексе программ, позволяющем визуализировать процессы эволюции системы взаимодействующих частиц во времени.

Также впервые в общем виде реализована процедура компьютерного анализа устойчивости систем, описываемых гироскопической функцией, на примере жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним течением в классе эллиптических возмущений. Для данной системы также впервые получены фигуры равновесия и построена бифуркационная диаграмма, указаны условия существования стационарных решений. Найден новый класс фигур равновесия неоднородной самогравитирующей идеальной жидкости — сфероид с гомотокальным расслоением плотности. Получена зависимость угловой скорости для случая двух однородных оболочек и для непрерывной функции плотности.

### **Положения и результаты, выносимые на защиту**

- 1) Разработана математическая модель, описывающая динамику самогравитирующей системы большого числа частиц конечного радиуса в двумерной постановке, взаимодействующих по логарифмическому закону, которая включает в себя регуляризацию уравнений движения (использование переменного шага по времени и законы упругого отталкивания частиц на малых расстояниях).
- 2) Разработан метод компьютерного анализа устойчивости систем, описываемых гироскопической функцией, реализующий топологические методы.
- 3) Создан комплекс программ, реализующий описанные выше математическую модель и метод компьютерного анализа.
- 4) С помощью комплекса построена бифуркационная диаграмма и определены области существования и устойчивости жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с заданным моментом импульса и внутренним полем скоростей. Определены точки

бифуркации эллиптического цилиндра с нулевой завихренностью. Найдены двумерные аналоги эллипсоидов Якоби и Дедекинда.

- 5) Найден новый класс фигур равновесия неоднородной самогравитирующей жидкости — сфероиды с гомофокальным расслоением. Получена замкнутая система уравнения гидродинамики в частных производных в криволинейной неортогональной системе координат, описывающая движение сфероидов с гомофокальным расслоением. В общем виде найдено совместное решение данной системы, а также найдены зависимости угловой скорости и давления от слоя для заданной функции плотности.

### **Аргументированность, обоснованность и достоверность результатов диссертации**

Полученные в диссертации результаты основываются на строго доказанных теоремах и утверждениях, имеют ясную физическую трактовку и не противоречат известным результатам, обобщают результаты, полученные ранее другими авторами. Достоверность результатов, полученных при работе с разработанным комплексом программ, подтверждается согласованностью с аналитическими результатами в рассматриваемых задачах.

Комплекс программ для моделирования динамики дискретных частиц был опробован на задаче о движении двух тел, взаимодействующих по ньютоновскому и логарифмическому законам. Полученные траектории соответствуют классическому решению задачи двух тел. Кроме того, при численных расчетах проверялось выполнение законов сохранения энергии, импульса и момента импульса.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Программный комплекс для моделирования динамики самогравитирующей системы большого числа частиц может быть использован для решения космогонических задач эволюции самогравитирующих небесных тел, в том числе при описании распадов на двойные системы и наблюдении их эволюции. Метод компьютерного анализа устойчивости систем, описываемых гироскопической функцией, может быть использован для изучения различных систем механики, приводимых к одной степени свободы. Полученные в ходе апробации модуля научные результаты, описанные во второй главе, носят теоретический ха-

раक्टर и могут быть основой для дальнейших исследований, например, устойчивости эллиптического цилиндра с внутренним полем скоростей при произвольных возмущениях. Кроме того, интересно было бы указать при помощи компьютерных методов новые семейства неэллиптических фигур равновесия с внутренним полем скоростей.

### **Апробация результатов**

Основные результаты работы неоднократно обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований УдГУ, Института Машиноведения им. А. А. Благодярова РАН, а также докладывались на всероссийских и международных конференциях:

- 1) Всероссийская конференция “Регулярная и хаотическая динамика”, г. Ижевск, 19–24 января, 2010 г.
- 2) Международная конференция “Регулярная и хаотическая гидродинамика. Приложения к атмосфере и океану”, г. Ижевск, 12–15 мая, 2010 г.
- 3) Конференция-семинар “Проблемы классической и статистической механики”, г. Ижевск, 20–23 декабря, 2010 г.
- 4) Всероссийская конференция “Динамические системы и робототехника”, г. Ижевск, 3–6 июня, 2011 г.
- 5) III International conference “Geometry, dynamics, integrable systems — GDIS 2011”, Lisbon — Sintra, Portugal, 10–16 September, 2011.

### **Публикации автора по теме диссертации**

Результаты диссертации отражены в 8 публикациях, из них 3 статьи — в научных журналах списка ВАК. Список приведен в конце автореферата.

### **Личный вклад**

Постановка задачи, обсуждение и интерпретация результатов проводились совместно с научным руководителем и соавторами работ. Автором разработаны математические модели, проведено программирование всех задач и выполнены все численные эксперименты.

### **Структура и объем работы**

Диссертация изложена на 104 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы (56 наименований). Диссертация содержит 38 рисунков.



## Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, определяются цели исследования, раскрывается научная новизна полученных результатов и формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации описан программный комплекс для моделирования динамики большого числа взаимодействующих частиц. В п. 1.1 подробно описан метод компьютерного анализа устойчивости одностепенных интегрируемых систем, описываемых гироскопической функцией. В п. 1.2, 1.3 описаны основные методы и дополнительные модули, используемые при интегрировании уравнений движения. В частности, регуляризация уравнений движения, включающая процедуры расчета переменного шага по времени и упругого рассеяния на малых расстояниях.

Обозначим  $\mathbf{r}_i^n = (x_i, y_i)$ ;  $\mathbf{V}_i^n = (V_{xi}, V_{yi})$  — радиус вектор и скорость частицы  $i$ ;  $\mathbf{r}_{ij}^n = \mathbf{r}_i^n - \mathbf{r}_j^n$  — вектор, определяющий взаимное расположение двух частиц с номерами  $i, j$ ,  $\mathbf{V}_{ij}^n = \mathbf{V}_i^n - \mathbf{V}_j^n$  — их относительная скорость. Тогда за шаг по времени  $dt$  взаимное положение частиц будет определяться вектором  $\mathbf{r}_{ij}^{n+1} = \mathbf{r}_{ij}^n + \mathbf{V}_{ij}^n dt$ . Рассматривая частицы, летящие навстречу друг другу ( $(\mathbf{r}_{ij}^n, \mathbf{V}_{ij}^n) < 0$ ), определяем из всех те, для которых возможны столкновения, и для каждого возможного столкновения определяем шаг интегрирования  $d\tau$ , не позволяющий сблизиться на расстояние меньше радиуса рассеяния  $\varepsilon$ . В п. 1.3.1 подробно описаны правила определения наименьшего  $d\tau$ , то есть такого шага интегрирования, за который только одна пара частиц попадет на границу рассеяния. Для интегрирования уравнений движения используется метод Рунге-Кутты четвертого порядка с переменным шагом по времени.

После определения шага по времени и интегрирования среди всех частиц могут появиться те, которые летят навстречу друг другу и для которых взаимное расстояние  $\mathbf{r}_{ij}^{n+1} \leq \varepsilon$ . В принятой модели при таких условиях частицы взаимодействуют как абсолютно упругие диски. Для них в программном комплексе включается модуль рассеяния, который определяет новые скорости частиц. Уравнения для определения скоростей частиц с номерами  $i, j$  при таком взаимодействии

ИМЕЮТ ВИД

$$\mathbf{V}_i^+ = \mathbf{V}_i^- - \frac{(1 + \lambda)(\mathbf{V}_{ij}^-, \mathbf{r}_{ij})}{2 |\mathbf{r}_{ij}|^2} \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{V}_j^+ = \mathbf{V}_j^- + \frac{(1 + \lambda)(\mathbf{V}_{ij}^-, \mathbf{r}_{ij})}{2 |\mathbf{r}_{ij}|^2} \mathbf{r}_{ij},$$

где  $V^+, V^-$  — скорости после и до удара соответственно,  $\lambda$  — коэффициент восстановления при ударе, при абсолютно упругом ударе  $\lambda = 1$ . Легко показать, что при таком законе отталкивания выполняются законы сохранения энергии, импульса и момент импульса, координаты частиц не изменяются, так же как и прицельное расстояние частиц. Полученные скорости используются на новом шаге по времени.

Для более детального описания наблюдаемых форм в программном комплексе были введены дополнительные модули для определения статистических распределений частиц по углу и по радиусу от времени. Кроме того, на каждом шаге интегрирования определяются средние и среднеквадратичные значения, а также дисперсии по углу и расстоянию частиц от центра масс. Интерфейс программного комплекса (рис.1) подробно описан в п. 1.4 диссертации.

Во второй главе диссертации рассмотрена задача об определении фигур равновесия самогравитирующей идеальной жидкости.

В п. 2.1 приведены основные этапы развития теории фигур равновесия, проведен обзор классических и современных работ, указаны от-

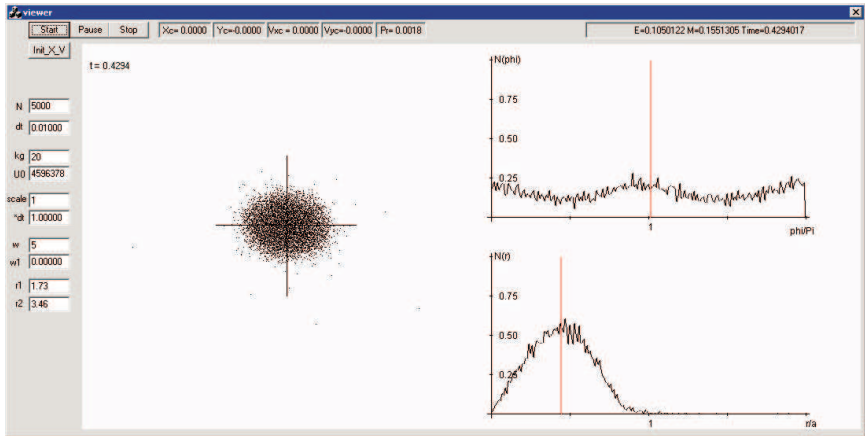


Рис. 1. Интерфейс программного комплекса

крытые вопросы в рассматриваемой области. Процедура определения точек бифуркации однородной сферы, сфероида Маклорена и эллипсоида Якоби и соответствующая бифуркационная диаграмма, полученная в ходе работы над диссертацией, вынесены в Приложение А.

В п. 2.2 топологическими методами аналитически исследуется модельная задача о фигурах равновесия бесконечной однородной массы цилиндрической формы, вращающейся с заданным моментом импульса вокруг оси цилиндра и внутренним полем скоростей.

Жидкий цилиндр — система с бесконечным числом степеней свободы, однако уравнения Лагранжа–Эйлера допускают частное решение, которое описывается конечным числом динамических переменных и линейно зависит от начальных условий [11]. В качестве обобщенных координат выбраны полуось эллипса сечения  $a$ ,  $\varphi$  — угол поворота цилиндра вокруг своей оси как целого в неподвижной системе координат и  $\psi$  — угловая переменная, описывающая вихревое движение жидкости относительно главных осей цилиндра.

После приведения системы к одной степени свободы гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{p_a^2}{2(1+1/a^4)} + U_r, \quad U_r = \frac{c_1^2}{(a-1/a)^2} + \frac{c_2^2}{(a+1/a)^2} + 2\omega_0^2 \ln \frac{a+1/a}{2}, \quad (1)$$

где  $U_r$  — приведенная потенциальная энергия,  $\omega_0^2 = 2\pi\rho G$ ,  $c_1, c_2$  — фиксированные константы первых интегралов:

$$c_1 = (p_\varphi + p_\psi)/2, \quad c_2 = (p_\varphi - p_\psi)/2.$$

Стационарные состояния соответствуют критическими точкам приведенной потенциальной энергии системы (1) и определяются уравнением

$$f(u) = \omega_0^2 u^3 - (8\omega_0^2 + c_1^2 + c_2^2)u^2 + 8(2\omega_0^2 + c_2^2)u - 16c_2^2 = 0, \quad (2)$$

где  $u = (a+1/a)^2$ .

В данном случае функция  $f(u)$  является гироскопической функцией системы, что позволяет нам применить метод компьютерного анализа устойчивости, описанный в п. 1.1. При  $c_1 \neq 0$  существует одно двухпараметрическое семейство критических точек  $u_*(c_1, c_2)$ , которым соответствуют эллиптические цилиндры, сохраняющие форму. Кроме

того, при  $c_1 = 0$  всегда имеется критическая точка  $u = 4$ , соответствующая круговому цилиндру. Стационарные решения  $u_*(c_1, c_2)$  определяют в пространстве первых интегралов  $(c_1, c_2, H)$  двумерную бифуркационную поверхность

$$H = h(c_1, c_2) = H|_{p_a=0, a=a_*} = U_r(u_*(c_1, c_2), c_1, c_2). \quad (3)$$

Эта поверхность отделяет область возможных значений интегралов от тех значений, при которых движение невозможно. Область возможных значений энергии при фиксированных  $c_1, c_2$  определяется неравенством  $H \geq h(c_1, c_2)$ .

Стационарные решения, отвечающие круговому цилиндру ( $u_* = 4$ ), в пространстве первых интегралов  $(c_1, c_2, H)$  определяют бифуркационную кривую (параболу), заданную уравнениями

$$c_1 = 0, H_{cir} = c_2^2/4. \quad (4)$$

Бифуркационная поверхность (3) и бифуркационная кривая (4) совместно с отмеченной областью возможных значений интегралов образуют полную бифуркационную диаграмму системы, общий вид которой приведен на рис. 2.

Зависимости энергии кругового цилиндра (парабола) и эллиптического цилиндра представлены на рис. 3. Точка ответвления

$$c_2 = \pm 2\omega_0, H = \omega_0^2 \quad (5)$$

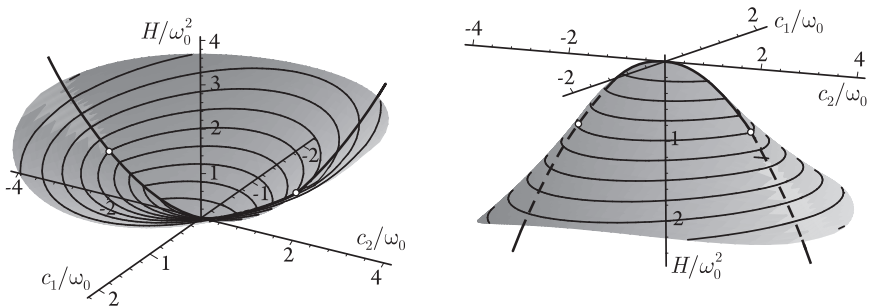


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма эллиптического цилиндра в пространстве интегралов  $c_1, c_2, H$ . Выделенная кривая (парабола) соответствует круговому цилиндру, выделенные точки ответвления — точки бифуркации от кругового цилиндра к эллиптическому

является точкой бифуркации, в которой решение, соответствующее круговому цилиндру, меняет свой тип с *центра* на *фокус*, то есть при  $|c_2| < 2\omega_0$  устойчивым является круговой цилиндр, при  $|c_2| > 2\omega_0$  — эллиптический.

При  $c_1 = 0$ ,  $u = 4$  интегралы движения  $p_\varphi$  и  $p_\psi$  перестают быть независимыми и определяют одинаковое вращение с угловой скоростью  $\omega = \dot{\varphi} - \dot{\psi}$ . При  $u = 4$  получим угловую скорость, соответствующую точке бифуркации:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = 2\pi G\rho. \quad (6)$$

Если внутреннего течения нет (то есть  $\dot{\psi} = 0$ , цилиндр вращается как твердое тело), приведенная потенциальная энергия принимает вид

$$U_r = \omega_0^2 \ln(u/4) + p_\varphi^2/2/(u-2),$$

где  $p_\varphi = (u-2)\omega$  — интеграл движения,  $\omega = \dot{\varphi}$  — угловая скорость вращения цилиндра. Угловая скорость вращения эллиптического цилиндра — двумерного аналога эллипсоида Якоби и энергия в точке бифуркации  $u = 4$  имеет вид

$$\omega^2 = 2\omega_0^2/u = \omega_0^2/2, \quad H = \omega_0^2/2.$$

Аналогичный результат получится для двумерного аналога эллипсоидов Дедекинда ( $\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} \neq 0$ ).

Потеря устойчивости кругового цилиндра по отношению к эллиптическим возмущениям происходит при  $\omega^2 > \omega_0^2$ , а не при  $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$ .

Неточность в вышеприведенных работах [4, 3, 13] связана с тем, что энергия при  $\omega^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$  не является функцией Ляпунова, тем не менее, существует линейная комбинация первых интегралов, которая служит функцией Ляпунова.

В ходе работы при анализе уравнений Римана для эллиптического цилиндра [1] были определены области существования решения (обла-

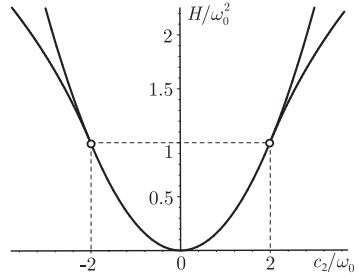


Рис. 3. Сечение бифуркационной диаграммы (3) плоскостью  $c_1 = 0$ . В выделенных точках происходит ответвление бифуркационной кривой (4) от поверхности (3)

сти положительного давления). В плоскости  $c_1 = 0$  давление положительно при  $|c_2| < 2\omega_0$ . Таким образом, выше точки бифуркации на ветви кругового цилиндра физического решения не существует.

На рис. 4 приведены сечения области физического решения поверхностями  $H = \text{const}$ . Анализ областей отрицательного давления показывает, что они нигде не перекрываются и всегда касаются бифуркационной поверхности (2) только по линии  $c_1 = 0$  при  $|c_2| > 2\omega_0$ .

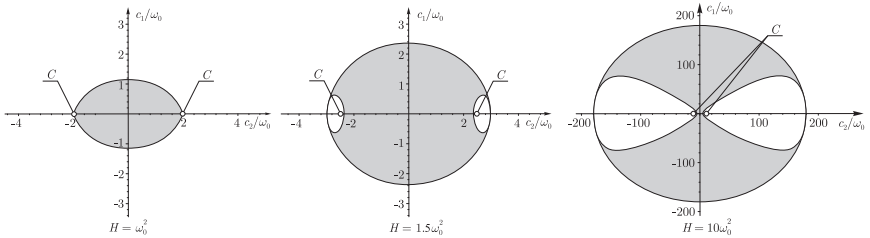


Рис. 4. Область возможных значений интегралов (выделена серым цветом) при различных значениях энергии. Область отрицательного давления, где не существует физического решения, обозначена белым цветом. Выделенная точка соответствует круговому цилиндру

В п. 2.3 аналитическими методами определяется новый класс фигур равновесия неоднородной жидкости — сфероиды с гомофокальным расслоением.

Уравнение произвольного гомофокального слоя сфероида определяется параметром  $\mu$  и имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + \mu} + \frac{z^2}{b^2 + \mu} = 1, \quad -b^2 \leq \mu \leq 0, \quad a > b.$$

Для определения фигур равновесия необходимо найти совместное решение уравнения непрерывности, Пуассона и гидродинамических уравнений Эйлера, которые рассматриваются в криволинейной системе координат  $(r, \varphi, \mu)$ , переход в которую от декартовых координат  $(x, y, z)$  задается следующим образом:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = (b^2 + \mu - (b^2 + \mu)r^2/(a^2 + \mu))^{1/2}. \quad (7)$$

Будем рассматривать движение жидкости, сохраняющее форму эллипсоида, то есть угловая скорость  $\omega$  зависит только от  $\mu$ . После аналитических преобразований для поля скоростей  $V(0, \omega(\mu), 0)$  получим

замкнутую систему из трех уравнений для определения  $\omega(\mu)$ , гравитационного потенциала  $U(r, \mu)$  и давления  $p(r, \mu)$ :

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad 0 = \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial \mu},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{2(a^2 + \mu)}{(a^2 + \mu)^2 - r^2(a^2 - b^2)} \left( (a^2 + 2b^2 + 3\mu) \frac{\partial U}{\partial \mu} + \right.$$

$$\left. + 2(b^2 + \mu) \left( r \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial r} + (a^2 + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \mu} \right) \right) = -4\pi G \rho(\mu).$$

Если плотность меняется непрерывно, то для совместности данной системы уравнений необходимо, чтобы потенциал имел вид

$$U = r^2 f(\mu) + g(\mu). \quad (8)$$

Уравнения для функций  $f(\mu)$  и  $g(\mu)$  получим, подставляя потенциал  $U(r, \mu)$  в уравнение Пуассона и приравнявая коэффициенты при разных степенях  $r$ . После введения новой переменной

$$x = (a^2 - b^2)/(b^2 + \mu)$$

данные уравнения принимают вид

$$2x(x+1)^2 f(x)'' + 3(x^2 - 1) f(x)' - 2f(x) = 2\pi G \rho(x),$$

$$2(x+1)xg''(x) + (3x+1)g'(x) = -\frac{2(x+1)(a^2 - b^2)(\pi G \rho(x) + f(x))}{x^2}.$$

В диссертации приведены решения для функций  $f$  и  $g$  для точек внутри и вне сфероида. Найденные в общем виде, они обобщают известное решение Маклорена для однородного сфероида и результаты работы [7] для двух оболочек разной плотности. Решение, представленное в общем виде, позволяет определять давление и угловую скорость гомофокального сфероида с произвольной функцией плотности (в работе представлен один из частных случаев).

В главе 3 описана постановка численного эксперимента и приведены результаты компьютерного анализа динамики большого числа частиц конечного радиуса в двумерной постановке. Математическая модель динамики системы абсолютно упругих частиц, взаимодействующих по логарифмическому закону, включает в себя регуляризацию,

использование переменного шага по времени и законы упругого отталкивания частиц на малых расстояниях. Процесс визуализирован, что позволяет наблюдать эволюцию системы во времени.

Рассмотрим систему большого количества самогравитирующих бесконечных цилиндров. Для описания динамики системы достаточно рассмотреть плоское сечение, перпендикулярное оси цилиндров. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{m_0}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) - m_0^2 G \sum_{j>i}^N \ln r_{ij} \right],$$

где  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  — расстояние между частицами,  $N$  — число частиц,  $m_0$  — масса одного цилиндра на единицу длины, которая связана с массой системы (эллиптическим цилиндром с полуосями  $a_1, a_2$ ), описанной в п. 2.2, следующим образом:

$$m_0 = \rho \pi a_1 a_2 / N.$$

Для верификации численных результатов с аналитическими (изложенными в главе 2) необходимо определить минимальную потенциальную энергию системы частиц, которая затем, в численных расчетах, выбирается в качестве нулевого уровня. Для этого с помощью пакета аналитических вычислений Maple определяется потенциальная энергия взаимодействия частиц, упакованных в гексагональную плотную упаковку.

Выбирая масштаб энергии  $E_0 = Gm_0^2$ , единицу измерения длины  $r_0$ , суммарную безразмерную площадь  $\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = C$ , масштаб времени  $t_0^2 = 2/(\omega_0^2 NC)$ , где  $\omega_0^2 = 2\pi G\rho$ , уравнения движения для частицы с номером  $i$  будут иметь вид

$$\ddot{x}_i = - \sum_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^2}, \quad \ddot{y}_i = - \sum_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}^2}.$$

Вместо двух уравнений второго порядка запишем систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка (для координаты  $y$  они имеют аналогичный вид):

$$\dot{x}_i = V_{xi}, \quad \dot{V}_{xi} = - \sum_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^2}. \quad (9)$$



Для того чтобы система (9) имела единственное решение, необходимо и достаточно определить начальные условия при  $t = 0$  (начальные координаты и скорости). В начальный момент времени координаты частиц определяются случайным образом с помощью генератора случайных чисел, для каждой пары координат  $(x_i^0, y_i^0)$  выполняется проверка на попадание в эллипс с заданными полуосями  $a_1$  и  $a_2$ . Начальные скорости частиц связаны с угловой скоростью вращения как целого  $\omega$  и скоростью относительного вихревого вращения  $\omega_1$  следующим образом:

$$V_{xi}^0 = -(\omega + \omega_1)y_i^0, V_{yi}^0 = \left(\omega + \frac{a_2^2}{a_1^2}\omega_1\right)x_i^0. \quad (10)$$

Система (9) с начальными условиями (10) решается методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Основная проблема при интегрировании уравнений движения возникает на малых расстояниях между частицами (знаменатель в уравнениях движения стремится к нулю). Для получения корректного результата в программном комплексе введен модуль для определения переменного шага по времени на основе регуляризации уравнений движения вблизи столкновений. Разработанный алгоритм дробления шага интегрирования, описанный в п. 1.3, исключает многочастичные столкновения.

Анализ получаемых в ходе численных экспериментов распределения частиц по углу и расстоянию от центра масс показал возможность пульсаций системы, аналитическое описание которых является достаточно сложной задачей. Об отклонении от круговых форм также дает информацию вычисляемое на каждом шаге интегрирования отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  собственных значений матрицы  $\Delta$ , составленной из среднеквадратичных значений координат  $x, y$  частиц:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xy \rangle \\ \langle xy \rangle & \langle y^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (11)$$

**Характерные процессы эволюции эллиптического цилиндра в области существования** изложены в п. 3.2 диссертации.

На рис. 5 представлена одна из таких систем с параметрами:  $N = 5000, E = 0.1, M = 0.15, a_1/a_2 = 1/2, \omega = 10$ .

В ходе численных экспериментов было выявлено, что данная система, соответствующая области существования, проходит через последовательность эллиптических форм к круговой форме (то есть рав-

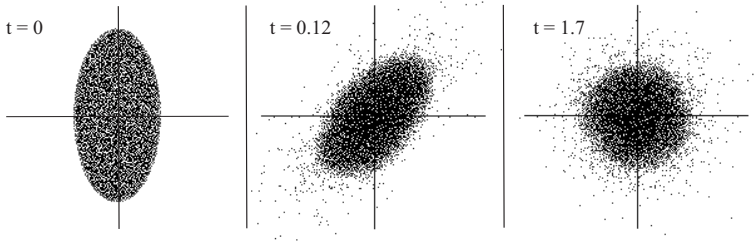


Рис. 5. Характерный вид эволюции эллиптического цилиндра в области существования решения

номерному распределению по углу). В ходе численного эксперимента наблюдаются пульсации системы, но так как параметры системы соответствуют точке, не лежащей на бифуркационной поверхности, эллиптическая форма не сохраняется. Кроме того, на рис. 5 хорошо видно пылевое облако, которое образуется на начальном этапе. Оно образуется из-за того, что взаимодействие между частицами не ограничивает их взаимного расстояния. На рис. 6, 7 представлены зависимости среднего радиуса  $\langle r \rangle$  и  $\lambda_1/\lambda_2$  от времени, подтверждающие приход к круговому распределению ( $\lambda \rightarrow 1$ ) и наличие пульсаций.

Значительный интерес представляет также наблюдение и анализ **характерной эволюции системы в области отрицательного давления**, например, с образованием двойных систем. Основные резуль-

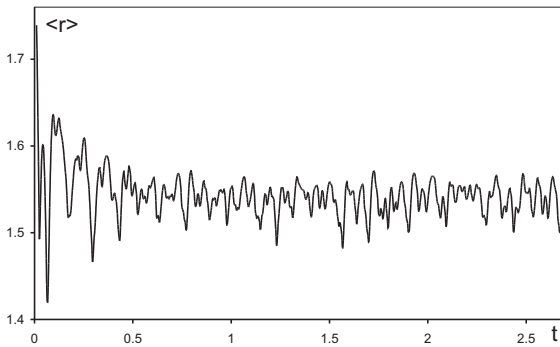


Рис. 6. Характерные колебания среднего радиуса системы во времени в области существования решения

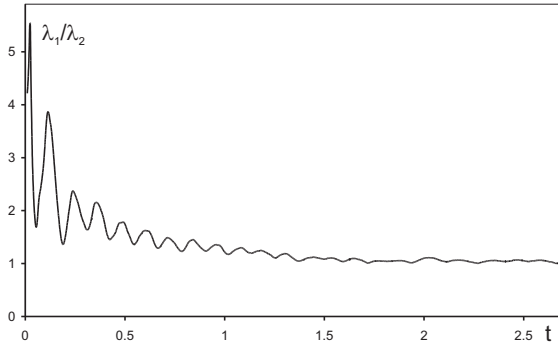


Рис. 7. Характерные изменения отношения собственных значений матрицы (11) системы, соответствующей области существования решения. Стремление  $\lambda_1/\lambda_2 \rightarrow 1$  соответствует эволюции к круговому цилиндру

таты и различные сценарии эволюции в области распада изложены в п. 3.3 диссертации.

На рис. 8 представлен процесс распада в системе с параметрами:  $N = 1000, E = 0.28, M = 0.63, a_1/a_2 = 1/10, \omega = 10$ . Результатом численного эксперимента является образование двух отдельных масс в результате деления системы, которые устойчиво вращаются вокруг общего центра масс.

При наблюдении эволюции данной системы видно, что распад происходит не за счет колебаний плотности, а за счет деформации формы и, по-видимому, может быть установлен в результате Фурье-анализа, то есть аналитическими методами, развиваемыми в работе Лава [6].

На рис. 9, 10 представлены зависимости среднего расстояния

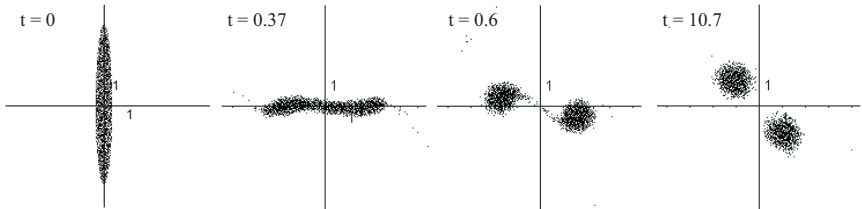


Рис. 8. Характерный вид эволюции эллиптического цилиндра в области отрицательного давления

$\langle r \rangle$  и угла  $\langle \varphi \rangle$  от времени данной системы. Из графиков видно, что вращение вокруг центра масс образовавшихся отдельных частей системы регулярно с постоянным периодом и постепенно устанавливается на круговые орбиты.

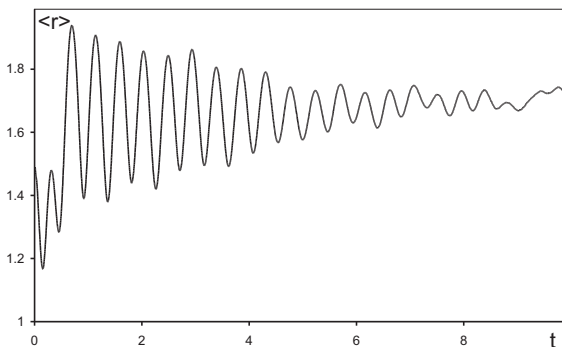


Рис. 9. Характерная зависимость среднего расстояния  $\langle r \rangle$  от времени в области распада. Колебания соответствуют эллиптичности орбит вращения центров масс образовавшихся частей вокруг общего центра масс. Затухание данных колебаний соответствует установлению вращения по круговым орбитам

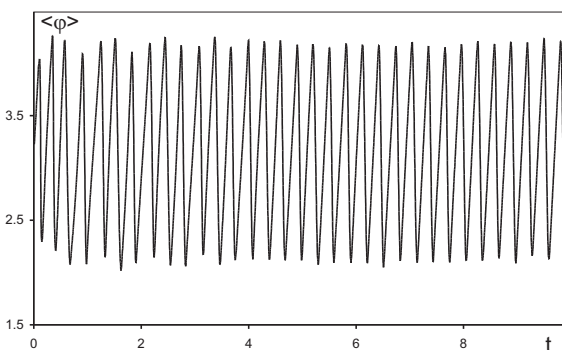


Рис. 10. Характерная зависимость среднего угла  $\langle \varphi \rangle$  от времени в области распада. Колебания соответствуют периодическому вращению образовавшихся частей, причем «размывание» формы отсутствует

Таким образом, разработанная математическая модель, описывающая динамику системы многих взаимодействующих частиц, демонстрирует поведение, схожее с аналитическими результатами для вращающихся масс жидкости. Однако из-за того, что взаимодействие между частицами не ограничивает их взаимного расстояния, данная модель ближе к газовым эллипсоидам или сжимаемой жидкости. Но в области малых энергий и моментов импульса находится в согласии с аналитическими результатами. Результаты численного моделирования, иллюстрирующие распад эллиптической фигуры на две и более части, согласуются с теоретическими предсказаниями о несуществовании решения в области отрицательного давления.

### **Публикации автора по теме диссертации**

- 1) Иванова Т. Б. Построение бифуркационной диаграммы и анализ устойчивости жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним вращением // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 4. С. 77–86.
- 2) Борисов А. В., Мамаев И. С., Иванова Т. Б. Устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним вращением // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 4. С. 807–822.
- 3) Бизяев И. А., Иванова Т. Б. Фигуры равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 3. С. 142–153.
- 4) Иванова Т. Б. К вопросу о равновесных формах самогравитирующей вращающейся жидкости // Регулярная и хаотическая динамика: тез. докл. Всерос. конф., г. Ижевск, 19–24 января, 2010 г. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Ин-т компьютер. исследований, ГОУВПО “УдГУ”. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. С. 44.
- 5) Иванова Т. Б. Равновесные конфигурации вращающегося жидкого цилиндра с внутренним течением // Регулярная и хаотическая гидродинамика. Приложения к атмосфере и океану: тез. докл. Междунар. конф., г. Ижевск, 12–15 мая, 2010 г. — Ижевск: РХД, 2010. С. 19–20.

- 6) Иванова Т. Б., Мамаев И. С. Исследование динамики большого количества самогравитирующих упругих дисков с ударами // Проблемы классической и статистической механики: тезисы докл., г. Ижевск, 20–23 декабря, 2010 г. / ИКИ, ГОУВПО “УдГУ” — Ижевск: РХД, 2010. С. 25.
- 7) Иванова Т. Б., Бизяев И. А. Исследование фигур равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс // Динамические системы и робототехника: тез. докл. Всерос. конф., г. Ижевск, 3–6 июня, 2011 г. / ИКИ, ГОУВПО “УдГУ”. — Ижевск: РХД, 2011. С. 22.
- 8) Ivanova T. The modeling of the dynamics of rotating self-gravitating liquid // III International conference “Geometry, dynamics, integrable systems — GDIS 2011”: тез. докл. междунар. конф., Lisbon — Sintra, Portugal, 10–16 September, 2011. P. 12.

## Список цитируемой литературы

- [1] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The Hamiltonian dynamics of self-gravitating liquid and gas ellipsoids // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, N. 2. P. 179–217.
- [2] Fasso F., Lewis D. Stability properties of the Riemann ellipsoids // Arch. Rational Mech. Anal., 2001, vol. 158. P. 259–292.
- [3] Globa-Mikhaïlinko B. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation // J. Math. Pures Appl. (7), 1916, vol. 2. P. 1–78.
- [4] Jeans J. N. On the equilibrium of rotating liquid cylinders // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 1903, vol. 200. P. 67–104.
- [5] Lipschitz R. Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders // J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), 1874, vol. 78. P. 245–272.
- [6] Love A. E. H. On the Motion of a liquid elliptic cylinder under its own attraction // Q. J. Pure Appl. Math., 1889, vol. 23. P. 153–158.
- [7] Montalvo D., Martinez F. J., Cisneros J. On equilibrium figures for ideal fluids in the form of confocal spheroids rotating with common and different angular velocities // Rev. Mexicana Astron. Astrof., 1990, vol. 20. P. 15–22.
- [8] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.–М.: ОНТИ, 1936. — 376 с.
- [9] Васькин В. В., Васькина А. В., Мамаев И. С. Проблемы устойчивости и асимптотическое поведение вихревых пятен на плоскости // Нелинейная динамика. 2010, 6 (2). С. 327–343.
- [10] Васькин В. В., Ермакова Н. Н., Мамаев И. С. Статистическая механика нелинейных динамических систем // Нелинейная динамика. 2009, 5 (3). С. 385–402.
- [11] Дирихле Л. Исследование одной задачи гидродинамики // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: РХД, ИКИ, 2010. С. 19–58.
- [12] Козлов В. В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. М.–Ижевск: РХД, 2008. 208 с.
- [13] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.–Ижевск: РХД, 2004. 252 с.
- [14] Чаплыгин С. А. Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероида. Собрание сочинений. Том II «Гидродинамика. Аэродинамика». 1948. С. 576–585.

Подписано в печать 12.01.2012. Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5.

Бумага офсетная № 1. Тираж 100 экз. Заказ № 11-64.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.