На правах рукописи

КИРИН НИКОЛАЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА КОНФИГУРАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре математики и МПМД
ГАОУ ВПО "Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт"

Научный руководитель — доктор физико-математических наук,профессор
Лексин Владимир Павлович,
Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,профессор
Веденяпин Виктор Валентинович,
ведущий научный сотрудник Института прикладной
математики им. М.В.Келдыша РАН

кандидат физико-математических наук
Гонцов Ренат Равилевич,
старший научный сотрудник Института проблем
передачи информации им. А.А.Харкевича РАН

Ведущая организация — Институт земного магнетизма, ионосферы и
распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН
(ИЗМИРАН)

Защита состоится "14"октября 2015 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Национальном исследовательском ядерном университете "МИФИ"по адресу: 115409, Москва, Каширское шоссе, 31, тел.: 324-84-98, 324-92-56

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке НИЯУ МИФИ

Автореферат разослан "__"__________ 2015г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., проф. Леонов А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Во многих разделах современной теоретической физики возникают задачи описания аналитических и динамических свойств систем с гамильтонианами, определяемыми итерационными процедурами. Естественной математической базой этих задач являются теория итерированных интегралов Чена.

Одной из первых таких задач, появившихся в гидродинамике, и тем не менее еще полностью не решенной, является проблема описания движения n вихрей на плоскости или на сфере.

Основателями вихревой динамики являются Р.Декарт, Х.Гюйгенс, Иоганн и Даниил Бернулли.

Значительное развитие вихревой динамики относится к середине XIX века. Оно связано с именами Г.Гельмгольца, Г.Кирхгофа, лорда Кельвина, В.Гребли. Ими получены существенно новые результаты в гидродинамике, создана наиболее общая вихревая теория материи.

Г.Гельмгольц[1] доказал основные теоремы движения жидкости с неоднозначным потенциалом скоростей. Важнейшим его достижением является теорема, согласно которой вихревые линии вморожены в идеальную жидкость. Эта теорема позволила рассматривать вихревые образования как некоторые материальные объекты, подобные телам в классической механике. Подробный анализ результатов Гельмгольца и приложение теории вихрей к электродинамике и метеорологии содержится в лекциях А.Пуанкаре[2].

В 1867 году лордом Кельвином (У. Томсон) была предложена теория вихревых атомов, в которой он дал механическую интерпретацию вихревого движения. Кельвин изучал задачу об устойчивости стационарного вращения системы n точечных вихрей, помещенных в вершины правильного многоугольника. Такие конфигурации вихрей называют томсоновскими конфигурациями. Он провел опыты с плавающими магнитами во внешнем магнитном поле и выявил ряд закономерностей вихревого движения. Устойчивость системы вложенных друг в друга правильных вихревых многоугольников изучалась Т.Х.Хавелоком[3].

Г.Кирхгоф изучал вихревую динамику параллельно с Г.Гельмгольцем. В 1876 году он опубликовал работу, в которой вывел общие уравнения

---

[1] Гельмгольц, Г. Основы вихревой теории [Текст]/Г.Гельмгольц.–М.-Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2002.–82 с.

[2] Пуанкаре, А. Теория вихрей [Текст]/А.Пуанкаре.–Ижевск: Изд-во РХД, 2001.–160 с.

[3] Havelock, T.H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation[Text]/T.H.Havelock//Phil.Mc, 1931.–Ser.7, v.11, N70.–P.617–633.

движения n точечных вихрей, записал их в гамильтоновой форме[4] и показал, что уравнения, определяющие движение вихрей, в отличие от задачи движения небесных тел, имеют первый порядок относительно координат. В этих уравнениях фигурируют параметры, которые Г.Кирхгоф называл циркуляциями, и, в отличие от масс в задачах небесной механики, эти параметры могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Г.Кирхгоф нашел все первые интегралы системы n вихрей. Он предложил эллиптическую модель вихря, которая используется для изучения движений пятен завихренности.

В 1877 В.Гребли в своей диссертации подробно описал движение трех вихрей на плоскости. Эта задача всегда интегрируема независимо от значений интенсивностей вихрей. Система четырех вихрей в общем случае – неинтегрируема. Это было отмечено позднее многими учеными, например, А.Пуанкаре, С.Л.Зиглиным и другими. В.Гребли также рассмотрел случай движения $2n$ вихрей, обладающих n осями симметрии. Результаты Гребли были независимо переоткрыты и дополнены в работах Е.А.Новикова[5,6] и Х. Арефа[7].

Изучением различных частных случаев движения вихрей с дополнительными симметриями, которые обеспечивают сведение к квадратурам, занимался Д.Н.Горячев[8] Некоторые частные решения задачи о движении вихрей, найденные Д.Н.Горячевым, позволили прояснить ситуацию с движением вихрей в общем неинтегрируемом случае.

Современные исследования вихревой динамики принадлежат В.В.Коз-

---

[4]Кирхгоф, Г. Механика [Текст]: лекции по математической физике/Г.Кирхгоф.–М.: АН СССР, 1962.–404 с.

[5]Новиков, Е.А. Динамика и статистика системы вихрей[Текст]/Е.А.Новиков// ЖЭТФ, 1975.–Т.68, вып.5.–С.1868–1882.

[6]Новиков, Е.А. Коллапс вихрей[Текст]/Е.А.Новиков, Ю.Б.Седов// ЖЭТФ, 1979.–Т.77, вып.2/8.–С.588–597.

[7]Aref, H. Motion of three vortices[Text]/H.Aref//Phys.Fluids, 1988.–v.31,N5.–P.1392–1409.

[8]Горячев, Д.Н. О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей.[Текст]/Д.Н.Горячев// Москва: Унив. тип., 1898.

лову,[9,10] А.В.Борисову,[11] И.С.Мамаеву, Х.Арефу,[12,13] А.А.Фридману,[14] А.А.Килину, С.М.Рамаданову[15] и другим. Активно исследуются, например, взаимодействие вихревых цепочек с вихревыми решетками, взаимодействие одиночных вихрей с круговыми цилиндрами, изучается вихревое движение жидкости в ограниченной области и многие другие вопросы. В.В.Козлов совместно с А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым показали, что задача вихревого движения с потенциалом Дайсона не является интегрируемой в общем случае. В.А.Богомолов[16], А.А.Фридман и П.Я.Полубаринова исследовали уравнения вихреисточников – объектов, являющихся обобщениями вихрей Декарта.

В последнее время к изучению вихревой динамики активно привлекаются топологические методы. А.В.Борисов и И.С.Мамаев предложили Ли-алгебраическую классификацию типов движения трех вихрей и эффективную редукцию системы уравнений, описывающих движения вихрей. М.А.Бергером была высказана идея рассмотрения динамических систем, гамильтониан которых представляет топологический инвариант второго порядка. Приложением топологических инвариантов в магнитной динамике и гидродинамике занимались Г.К.Моффат[17],

---

[9] Козлов, В.В. Общая теория вихрей [Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998.–238 с.

[10] Козлов, В.В. Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике[Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм.ун-та, 1995.–432 с.

[11] Борисов, А.В. Математические методы динамики вихревых структур[Текст]/А.В.Борисов, И.С.Мамаев.–М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.–368 с.

[12] Aref, H. Point vortex motions with a center of symmetry[Text]/H.Aref//Phys. Fluids, 1982.–v.25/12.–P.2183–2187.

[13] Aref, H. Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-demential flows[Text]/H.Aref//Ann. Rev. Fluid Mech., 1983.–v.15.–P.345–389.

[14] Фридман, А.А., Полубаринова, П.Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости. Геофизический сборник.[Текст]/А.А.Фридман, П.Я.Полубаринова// 1928. С. 9Ц23.

[15] Рамоданов, С.М. Движение кругового цилиндра и n точечных вихрей в идеальной жидкости[Текст]/С.М.Рамоданов// В. Кн.: Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей; под.ред. А.В.Борисова, И.С.Мамаева, М.А.Соколовского.–М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.–704 с.

[16] Богомолов, В.А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков[Текст]/В.А.Богомолов// Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1976.–N4.–С.21–27.

[17] Moffat, H.K. The degree of knottedness of tangled vortex lines[Text]/H.K.Moffat// J.Fluid Mach., 1969.–v.35/1.–P.117–129.

С.П.Новиков[18], П.М.Ахметьев[19] и другие.

Проблемы привлечения топологических методов к изучению движения магнитной жидкости и точечных вихрей, а так же выявления топологического смысла понятий и величин исходя из физико-механических соображений, являются одними из центральных задач гидродинамики и математической физики на сегодняшний день.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационного исследования является изучение гамильтоновых систем, описывающих движение точечных вихрей Декарта на плоскости, выявление топологического смысла гамильтониана таких систем, нахождение связи классической задачи о движении декартовых вихрей на плоскости с инвариантами Васильева первого порядка для геометрических кос, обобщение этой классической задачи на случай, когда выбор гамильтониана системы основан на его связи с инвариантами Васильева порядка больше первого, исследование геометрических и динамических свойств решений гамильтоновых систем, нахождение условий, при которых система вихрей образует некоторые устойчивые классические конфигурации.

Научная новизна. Показано, что классический гамильтониан системы вихрей Декарта на плоскости является мнимой частью инварианта Васильева первого порядка для геометрических кос, представленного 1-итерированным интегралом Чена от логарифмических дифференциальных форм, а вещественная часть этого инварианта является многозначным потенциалом системы вихрей на плоскости.

Описан общий способ построения гамильтоновых систем, связанных с инвариантами Васильева произвольного конечного порядка.

Показано, что гамильтонова система, впервые рассмотренная М.А.Бергером[20], представляет частный случай гамильтоновой системы, отвечающей инварианту Васильева второго порядка. Указана весовая система, действующая на коэффициенты соответствующих итерированных интегралов, использованная для получения числового инварианта Васильева, приводящая к системе Бергера.

Показано, что произвольный инвариант Васильева второго порядка для геометрических кос из трех нитей можно представить в виде суммы трех инвариантов, один из которых совпадает с интегралом использованным А.М.Бергером для построения соответствующей гамильтоновой

[18]Новиков, С.П. Аналитический обобщенный инвариант Хопфа[Текст]: Многозначные функционалы/С.П.Новиков// УМН, 1984.–N39/5.–С.97–106.

[19]Akhmet'ev, P.M. A forth-order invariant for magnetic and vortex lines[Text]/P.M.Akhmet'ev, A.Ruzmaikin// J.Geom.Phys., 1995.–v.15.–P.95–101.

[20]Berger, M.A. Hamiltonian dynamics generated by Vassiliev invariants[Text]/ M.A.Berger// J. Phys. A: Math. Gen., 2001.–v.34.–P.1363–1374.

системы. Для каждого слагаемого в разложении инварианта Васильева второго порядка рассмотрены соответствующие возмущения гамильтониана классической системы трех вихрей на плоскости. Показано, что полученные гамильтоновы системы задают движение, которое можно трактовать как вихревое движение на плоскости. Для каждой такой гамильтоновой системы установлено сохранение центра завихренности соответствующей системы вихрей и выведены уравнения, действительные корни которых определяют сохраняющиеся коллинеарные конфигурации. В частности, доказано, что уравнение, определяющее коллинеарные конфигурации вихрей, для случая гамильтониана представляющего инвариант Васильева порядка не выше второго с примененной мультипликативной весовой системой, совпадает с уравнением для задачи трех вихрей с классическим гамильтонианом. Доказано существование сохраняющейся томсоновской конфигурации для системы трех вихрей с гамильтонианом, отвечающим инварианту Васильева порядка не выше второго. Доказано, что все сохраняющиеся конфигурации для системы классических точечных вихрей на плоскости сохраняются и для случая, когда гамильтониан представлен полным инвариантом Васильева.

Проанализирована задача двух вихрей для случаев, когда гамильтониан представляет инвариант Васильева второго и третьего порядков, соответственно.

Методы исследования. При формулировке и доказательстве утверждений и теорем использованы дифференциально-геометрические и топологические понятия и методы, а так же методы математического анализа, систематически применяются аппарат итерированных интегралов Чена и инварианты Васильева для геометрических кос.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Методы и результаты исследования могут быть использованы как в математической физике для описания движения жидкости (в том числе и в МГД), так и для динамической интерпретации инвариантов конечных порядков для геометрических кос.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Международная конференция "Александровские чтения – 2006", посвященная 110-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, МГУ, 2006; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2006; Воронежская зимняя математическая школа "Современные методы теории функций и смежные проблемы – 2007", Воронеж, 2007; Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы – 2007", посвященная памяти И.Г.Петровского, Москва, 2007; Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 70-летию В.И.Арнольда, Москва, 2007; "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2008", Воронеж, 2008; Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина (1908-1988), Москва, 2008; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2008, "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2010", Воронеж, 2010, а также обсуждалась на следующих семинарах: семинар "Узлы и теория представлений"под рук.дфмн., профессора В.О.Мантурова, Д.П.Ильютко, И.М.Никонова (МГУ, 2006), научный семинар "Проблемы современной математики"под руководством дфмн., профессора Н.А.Кудряшова (НИЯУ "МИФИ", 9 октября 2014), семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений под рук. дфмн., профессора Ю.С.Ильяшенко (МИАН, 22 октября 2014), семинар под. руководством кфмн., профессора А.Б.Сосинского (МЦНМО Независимый московский университет, 19 декабря 2014) а также на семинаре по геометрии и топологии под руководством дфмн., профессора В.П.Лексина в ГАОУ ВПО МГОСГИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, состоящих из 22 параграфов, и списка литературы. Объем работы составляет 142 страницы, включая список литературы, содержащий 48 наименований.

Содержание работы.

Во введении обсуждается история проблемы, изложены основные результаты представляемой диссертационной работе и ее структура.

В первой главе сформулированы определения следующих понятий: лагранжиан L, гамильтониан H, градиентная система $\dot{y}^i = (\nabla f)^i$, канонические координаты, гамильтоновы системы.

Указана связь уравнений Эйлера-Лагранжа с уравнениями Гамильтона. Обсуждается геометрическая основа гамильтоновых уравнений, как частного случая градиентных систем. Отмечен ряд, необходимых для изложения основного материала, свойств скобок Пуассона.

Во второй главе рассматриваются интегральные представления инвариантов Васильева для геометрических кос с помощью итерированных интегралов Чена. Топологическими инвариантами кос (узлов) являются функции определенные на классах эквивалентности кос (узлов). Особую роль среди топологических инвариантов играют инварианты Васильева.

Они распространены на множество сингулярных кос (узлов) соотношением

$$I'(K^{sing,m+1}) = I(K_+^{sing,m}) - I(K_-^{sing,m}),$$

где $K_+^{sing,m}$ и $K_-^{sing,m}$ - косы (узлы), полученные из первоначального заменой одной из сингулярных точек, соответственно переходом и проходом.

Интегральное представление инвариантов Васильева конечного порядка было предложено Концевичем[21]. В предложенной им конструкции использовались логарифмические дифференциальные формы. Т.Коно[22] была предложена запись инварианта Васильева с помощью итерированных интегралов Чена. В работе сформулированы определение и ряд свойств итерированных интегралов от логарифмических дифференциальных форм[23].

Пусть $P_a^b(M)$ – пространство путей в многообразии M с началом в точке a и концом в точке b. Каждый путь путь $\gamma \in P_a^b(M)$ представлен отображением отрезка $[0;1]$,

$$\gamma : [0;1] \to M, \gamma(0) = a \text{ и } \gamma(1) = b.$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_q$ – 1-дифференциальные формы, определенные на пространстве кусочно гладких путей $P_a^b(M)$ многообразия M.

Определение. *Итерированными интегралами Чена от 1-форм* $\omega_1, \ldots, \omega_q$ *называются гладкие функции на пространстве* $P_a^b(M)$, *определяемые индуктивным правилом*

$$I_r(\gamma) = \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_r := \int_\gamma \left(\int_{\gamma^t} \omega_1 \ldots \omega_{r-1} \right) \omega_r,\ \gamma^t(\tau) = \gamma(t\tau);\ t, \tau \in [0;1].$$

Для итерированных интегралов от 1-форм имеют место формула дифференцирования

$$d \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_q = -\sum_{i=1}^{q} \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_{i-1} d\omega_i \omega_{i+1} \ldots \omega_q -$$

$$- \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i \int_\gamma \omega_1 \ldots \omega_{i-1} (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \omega_{i+2} \ldots \omega_q,$$

[21]Kontsevich, M. Vassiliev's Knot Invariants[Text]/M.Kontsevich//Advances in Soviet Mathematics, 1993.–v.16,Part 2.– P.137–150.

[22]Kohno, T. Vassiliev Invariants of Braids and Iterated Integrals [Text]/T.Kohno// Advanced Studies in Pure Mathematics, 2000.–v. 27.–P.157–168.

[23]Хейн, Р.М. Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов[Текст]/Р.М.Хейн.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 96 с.

и формула Стокса

$$\int\limits_{C}\left(d\int\omega_1\ldots\omega_q\right)=\int\limits_{\partial C}\left(\int\omega_1\ldots\omega_q\right)=\int\limits_{C(1)}\omega_1\ldots\omega_q-\int\limits_{C(0)}\omega_1\ldots\omega_q,$$

где $C:[0;1]\to P_a^b(M)$ – путь, рассматриваемый как сингулярный симплекс в пространстве $P_a^b(M)$. Начальная и конечная точки $C(0)$ и $C(1)$ пути C в свою очередь являются элементами пространства путей $P_a^b(M)$. Этот симплекс задает гомотопию между γ_1 и γ_2, $C(0)=\gamma_1$ и $C(1)=\gamma_2$ в пространстве путей $P_a^b(X_n)$.

Рассмотрим конфигурационное пространство $X_n=\mathbb{C}^n\setminus(\cup_{i<j}H_{ij})$ упорядоченных наборов n попарно различных точек плоскости $\mathbb{C}$, где H_{ij} - диагональная гиперплоскость определяемая уравнением $z_i-z_j=0$. Путь γ в пространстве X_n задает пространственно-временную диаграмму движения n точек на плоскости. Эта диаграмма является геометрической косой в пространстве $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$.

Зададим замкнутую 1-форму $\widetilde{\omega}$ выражением

$$\widetilde{\omega}=\sum_{i<j}X_{ij}\otimes\omega_{ij}\in\mathcal{A}\otimes\Omega^1(\ln(\cup_{i<j}H_{ij})),$$

где $\mathcal{A}=[X_{ij}:1\le i<j\le n]$ является алгеброй некоммутирующих полиномов от формальных переменных X_{ij}, а $\Omega^1(\ln(\cup_{i<j}H_{ij}))$ – векторное пространство логарифмических дифференциальных 1-форм, порожденное формами $\omega_{ij}=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\cdot\frac{d(z_i-z_j)}{z_i-z_j}$.

Форма $\widetilde{\omega}$ определяет формальную связность, которая будет интегрируемой в смысле Фробениуса, если выполнено условие $\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\omega}=0$. Это условие эквивалентно следующему набору коммутационных соотношений для коэффициентов связности

$$[X_{ij};X_{kl}]=0,\text{ если }\{i,j\}\cap\{k,l\}=\emptyset,$$

$$[X_{ij};X_{jk}+X_{ik}]=0,\text{ где }i\ne j\ne k\ne i.$$

В работе доказано

Предложение 2.4.1. *Итерированный интеграл* $I_r(\gamma)=\int_\gamma\underbrace{\widetilde{\omega}\ldots\widetilde{\omega}}_{r}$ *определяет топологический инвариант для геометрических кос, то есть зависит лишь от класса изотопий косы* γ *при фиксированных концах.*

Т.Коно[22] была доказана следующая

[22]Kohno, T. Vassiliev Invariants of Braids and Iterated Integrals [Text]/T.Kohno// Advanced Studies in Pure Mathematics, 2000.–v. 27.–P.157–168.

Теорема. *Сумма*

$$I_{\leq m} = 1 + \int_\gamma \widetilde{\omega} + \int_\gamma \widetilde{\omega}\widetilde{\omega} + \ldots + \int_\gamma \underbrace{\widetilde{\omega}\ldots\widetilde{\omega}}_{m}$$

определяет универсальные инварианты Васильева порядка не выше m, если форма $\widetilde{\omega}$ удовлетворяет условию интегрируемости $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} = 0$.

Универсальность инварианта означает, что любой числовой инвариант Васильева конечного порядка можно получить, применив к коэффициентам универсального инварианта весовую систему $W : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, сохраняющую соотношения, обеспечивающие интегрируемость формы $\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij}$. Иными словами, для $m \leq 2$ должны выполняться соотношения

$$W(X_{ij}X_{kl}) = W(X_{kl}X_{ij}), \text{ если } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset,$$

$$W(X_{ij}X_{jk}) + W(X_{ij}X_{ik}) = W(X_{jk}X_{ij}) + W(X_{ik}X_{ij}), \text{ где } i \neq j \neq k \neq i.$$

Замечание. *В конструкции, предложенной Т.Коно, использованы формальные коэффициенты X_{ij}. Эти коэффициенты можно интерпретировать, например, как хордовые диаграммы кос. Тогда указанным коммутационным соотношениям будут соответствовать соотношения в алгебре хордовых диаграмм.*

В третьей главе рассматриваются основные определения и конструкции, используемые в классической теории точечных вихрей на плоскости. Уравнения движения системы точечных вихрей с интенсивностями $\Gamma_s \in \mathbb{R}$ на плоскости имеют гамильтонову форму

$$\Gamma_s \dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \;\; \Gamma_s \dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \;\; 1 \leq s \leq n,$$

где гамильтониан H имеет вид

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i<j}^{n} \Gamma_i \Gamma_j \ln\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\right),$$

который задает энергию системы взаимодействующих вихрей.

Уравнения движения вихрей можно записать и в градиентном виде[24]

$$\Gamma_s \dot{x}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s}, \;\; \Gamma_s \dot{y}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial y_s}, \;\; 1 \leq s \leq n,$$

[24]Козлов, В.В. Общая теория вихрей [Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998.–238 с.

используя функцию потенциала

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\Gamma_i\Gamma_j\varphi_{ij},$$

где $\varphi_{ij} = arctg\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$ обозначает угол, который образует отрезок с концами (x_i, y_i) и (x_j, y_j) с положительным направлением оси абсцисс.

В работе непосредственно используются относительные переменные, которыми являются квадраты взаимных расстояний M_{ij} и ориентированные площади треугольников Δ_{ijk} натянутые на тройки вихрей заданных радиус-векторами $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k$. Относительные переменные выражаются через комплексные абсолютные координаты $z_k = x_k + \sqrt{-1}y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ следующим образом

$$\Delta_{ijl} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left((z_j - z_l)\overline{z}_i + (z_l - z_i)\overline{z}_j + (z_i - z_j)\overline{z}_l\right)$$
$$M_{ij} = (z_i - z_j)(\overline{z}_i - \overline{z}_j).$$

В работе приведено уравнение

$$p(z) = (\Gamma_1 + \Gamma_2)z^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)z^2 - (2\Gamma_3 + \Gamma_2)z + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0,$$

вещественные корни которого определяют сохраняющиеся коллинеарные конфигурации системы трех классических вихрей на плоскости[11].

В четвертой главе рассмотрено представление обобщенных инвариантов Васильева с помощью итерированных интегралов Чена. Указан общий способ построения гамильтоновых систем, отвечающих инвариантам Васильева. Проанализирована задача двух вихрей для случаев, когда гамильтониан, представляют, соответственно, инвариант Васильева второго и третьего порядков. Для каждого вида гамильтониана выписаны уравнения движения, записаны уравнения, определяющие эволюцию квадрата расстояния между вихрями, проанализированы основные случаи для значений интенсивностей вихрей.

Как было отмечено во второй главе, справедливо

Предложение 2.4.3. *Сумма*

$$I_{\le n} = 1 + \int\widetilde{\omega} + \int\widetilde{\omega}\widetilde{\omega} + \ldots + \int\underbrace{\widetilde{\omega}\ldots\widetilde{\omega}}_{n}$$

[11]Борисов, А.В. Математические методы динамики вихревых структур[Текст]/А.В.Борисов, И.С.Мамаев.–М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.–368 с.

определяет универсальные инварианты Васильева порядка не выше n, если форма $\widetilde{\omega}$ удовлетворяет условию интегрируемости $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} = 0$.

Укажем общую схему построения гамильтоновой системы, отвечающую произвольной комплекснозначной аналитической функции $F = K + \sqrt{-1}H$, где K и H - вещественнозначные функции. Выберем в качестве гамильтониана нашей динамической системы мнимую часть функции F. Производная по времени от координат частиц системы с гамильтонианом H может быть вычислена как $\dot{z}_k = \{z_k; H\}$, с использованием скобки Пуассона в комплексных координатах

$$\{f; g\} = -2\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma_k}(\partial_k f \overline{\partial}_k g - \overline{\partial}_k f \partial_k g), \text{где } \Gamma_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Учитывая условия Коши-Римана, получим

$$\dot{z}_k = \frac{1}{\Gamma_k}\overline{\partial}_k \overline{F}.$$

При таком подходе к построению гамильтоновой системы, справедлива теорема

Теорема 4.1.5. *Если гамильтониан системы на плоскости представлен мнимой частью некоторой аналитической функции $F(z_1, \ldots, z_n)$, то соответствующая функция потенциала представляет действительную часть этой функции, причем соответствующая градиентная система имеет вид*

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{F + \overline{F}}{2}\right), \ \ \Gamma_i \dot{y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{F + \overline{F}}{2}\right), \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Данный подход применяется для случая, когда выше указанная функция F представляет числовой инвариант Васильева конечного порядка. Рассмотрим числовые инварианты Васильева порядка не выше первого $V = W(1 + I_1) = W(1) + \sum\limits_{1 \le i < j \le n} W(X_{ij}) \int \omega_{ij}$.

В качестве гамильтониана нашей системы выберем мнимую часть инварианта Васильева первого порядка $H(\gamma) = \mathrm{Im} W(I_1(\gamma))$.

Пусть $W(X_{ij}) = \Gamma_i \Gamma_j$ и $\forall s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $\Gamma_s \in \mathbb{R}$. Тогда Гамильтониан имеет вид

$$H = H(\gamma) = \mathrm{I}m \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{1 \le i < j \le n} \Gamma_i \Gamma_j \int_\gamma \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1 \le i < j \le n} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij},$$

где $r_{ij} = \sqrt{M_{ij}}$.

Следует заметить, что выражение для $H(\gamma)$ является топологическим инвариантом, поэтому при малых деформациях, не меняющих класс эквивалентности косы γ, зависит только от начального положения вихрей $\gamma(0) = (z_1(0), \ldots, z_n(0))$ и от их конечного положения на плоскости $\gamma(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$ в момент времени t.

Каждую константу Γ_s можно интерпретировать как интенсивность s-ого вихря на плоскости .

В работе доказана

Теорема 4.1.3. *Пусть гамильтониан H является мнимой частью инварианта Васильева первого порядка, представленного 1-итерированным интегралом Чена $W(I_1) = \sum_{i<j} \left(\frac{W(X_{ij})}{2\pi\sqrt{-1}} \otimes \int_\gamma d\ln(z_i - z_j) \right)$ с весовой системой $W(X_{ij}) = \Gamma_i \Gamma_j$. Тогда динамическая система на конфигурационном пространстве $X_n = \mathbb{C}^n \backslash (\cup_{i<j} H_{ij})$, определяемая гамильтонианом H совпадает с системой n точечных декартовых вихрей на плоскости.*

$$\begin{cases} \Gamma_i \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}; \; \Gamma_i \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ H = ImW(I_1(\gamma)) = -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{1 \le i < j \le n} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij}. \end{cases}$$

Вещественная часть этого инварианта также имеет вполне определенный физический и геометрический смысл.

Как известно, в классической задаче вихрей на плоскости фигурирует функция потенциала Φ, с помощью которой можно записать уравнения движения вихрей в виде градиентной системы[24].

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \;\; \Gamma_i \dot{y}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}.$$

В работе доказано следующее

Предложение 4.1.4. *В классической задаче системы вихрей на плоскости с гамильтонианом, являющимся мнимой частью инварианта Васильева первого порядка, функция потенциала является действительной частью того же инварианта:*

$$H = \mathrm{Im}W \left(\sum_{i \neq j} \frac{X_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\ln(z_i - z_j) \right) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{1 \le i < j \le n} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij},$$

$$\Phi = \mathrm{Re}W \left(\sum_{i \neq j} \frac{X_{ij}}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\ln(z_i - z_j) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \le i < j \le n} \Gamma_i \Gamma_j \varphi_{ij},$$

[24]Козлов, В.В. Общая теория вихрей [Текст]/В.В.Козлов.–Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998.–238 с.

где $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$, *а* $\varphi_{ij} = arctg\frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$.

Следовательно, если записать инвариант Васильева в виде аналитической функции, например, с помощью итерированных интегралов Чена, то гамильтонову систему, порожденную таким инвариантом, можно записать в градиентном виде. Тогда аналогом классической функции потенциала для системы точечных вихрей на плоскости будет являться действительная часть рассматриваемого инварианта Васильева.

С инвариантом Васильева второго порядка, представленным 2-итерированным интегралом Чена $I_2 = \int \widetilde{\omega}\widetilde{\omega}$, можно связать динамическую систему с гамильтонианом $H = \mathrm{Im}\, W(I_2)$.

Уравнения Гамильтона будут иметь вид

$$\begin{cases} \Gamma_i \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i};\ \Gamma_i \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ H = \mathrm{Im}\, W(I_2(\gamma)) = \displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}\ \sum_{1\le k<l\le n} W(X_{ij}X_{kl}) \int_\gamma \omega_{ij}\omega_{kl}. \end{cases}$$

Далее будем рассматривать системы трех вихрей на плоскости. В работе доказано следующее предложение:

Предложение 4.4.1. *Произвольный 2-итерированный интеграл, задающий инвариант Васильева второго порядка для геометрических кос с тремя нитями*

$$W\left(\int_\gamma \widetilde{\omega}\widetilde{\omega}\right) = \sum_{1\le i<j\le 3}\ \sum_{1\le k<l\le 3} W(X_{ij}X_{kl}) \int_\gamma \omega_{ij}\omega_{kl},$$

можно представить в виде суммы трех инвариантов Васильева второго порядка, два из которых Θ_{123} *и* Φ_{123} *являются суммой разложимых инвариантов Васильева второго порядка в произведение инвариантов Васильева первого порядка, а третий* Ψ_{123} *представляет интеграл, введенный М.А.Бергером, и является неразложимым инвариантом Васильева второго порядка.*

$$W\left(\int_\gamma \widetilde{\omega}\widetilde{\omega}\right) = \Theta_{123} + \Phi_{123} + \Psi_{123},$$

где

$$\Theta_{123} = \frac{1}{2}\Bigg[W(X_{12}X_{12}) \int_\gamma \omega_{12} \int_\gamma \omega_{12} + W(X_{13}X_{13}) \int_\gamma \omega_{13} \int_\gamma \omega_{13} + \\ + W(X_{23}X_{23}) \int_\gamma \omega_{23} \int_\gamma \omega_{23}\Bigg]$$

$$\Phi_{123} = \frac{1}{2}W(X_{13}X_{12} + X_{12}X_{13})\int_\gamma \omega_{13}\int_\gamma \omega_{12} +$$
$$+\frac{1}{2}W(X_{23}X_{13} + X_{13}X_{23})\int_\gamma \omega_{13}\int_\gamma \omega_{23} + \frac{1}{2}W(X_{23}X_{12} + X_{12}X_{23})\int_\gamma \omega_{12}\int_\gamma \omega_{23}$$

$$\Psi_{123} = \frac{1}{2}W(X_{13}X_{12} - X_{12}X_{13})\Bigg[\int_\gamma (\omega_{13} - \omega_{23})\omega_{12} + \int_\gamma (\omega_{23} - \omega_{12})\omega_{13} + \\ + \int_\gamma (\omega_{12} - \omega_{13})\omega_{23}\Bigg].$$

Это разложение получено применением соотношений на коэффициенты X_{ij} и свойства итерированных интегралов для 1-форм

$$\int \omega_1 \dots \omega_r \cdot \int \omega_{r+1} \dots \omega_{r+s} = \sum_{\sigma_{r,s} \in S_{r+s}} \int \omega_{\sigma(1)} \dots \omega_{\sigma(r+s)},$$

где в правой части ведется суммирование по всем перестановкам типа (r, s), то есть перестановкам σ удовлетворяющим требованиям

$$\sigma^{-1}(1) < \sigma^{-1}(2) < \dots < \sigma^{-1}(r),$$
$$\sigma^{-1}(r+1) < \sigma^{-1}(r+2) < \dots < \sigma^{-1}(r+q).$$

Вихревое движение с гамильтонианом $H = \operatorname{Im}\Psi_{123}$ было впервые рассмотрено М.Бергером. Не трудно указать весовую систему, которая приводит к системе М.Бергера. Определим весовую систему правилом

$$W(X_{ij}X_{kl}) = \frac{1}{8}\operatorname{sign}(k-i+l-j)(-1)^{(k-i+l-j)}(\Gamma_i + \Gamma_k)(\Gamma_j + \Gamma_l).$$

Легко проверить, что данная весовая система сохраняет требования на интегрируемость формы $\widetilde{\omega}$. Случай рассмотренный Бергером соответствует условию $\frac{1}{2}W(X_{13}X_{12} - X_{12}X_{13}) = 1$, которое очевидно выполнено, при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$. Им были указаны некоторые свойства этой системы, такие как сохранение центра завихренности системы и отсутствие рассеяния. Можно проверить, что данная система не будет иметь сохраняющихся коллинеарных и равносторонних конфигураций.

Найдем условия, которые определяют сохраняющиеся коллинеарные конфигурации системы трех вихрей на плоскости для возмущений классических гамильтоновых систем с помощью слагаемых Θ_{123}, Φ_{123} и Ψ_{123}.

Для случая трех вихрей определена единственная ориентированная площадь треугольника Δ_{123}. Необходимым и достаточным условием сохранения коллинеарных конфигураций трех вихрей являются уравнения

$$\begin{cases} \Delta_{123} = 0 \\ \dot{\Delta}_{123} = 0. \end{cases}$$

Если вихри расположены на одной прямой, то все относительные координаты можно выразить через одну из них. Например, можно положить

$$\begin{cases} z_1 - z_2 = z_{12} \\ z_3 - z_2 = u \cdot z_{12} \\ z_3 - z_1 = (u-1) \cdot z_{12}. \end{cases}$$

Справедливо следующее предложение

Предложение. *Если* $W(X_{13}X_{12} - X_{12}X_{13}) \neq 0$, *то система вихрей с гамильтонианом* $H = Im\ W(I_1 + I_2) = Im\ W(I_1) + Im\ (\Theta_{123} + \Phi_{123} + \Psi_{123})$ *не будет обладать сохраняющимися коллинеарными конфигурациями.*

Далее будем считать, что весовая система W, применяемая к коэффициентам итерированных интегралов, определяется правилом

$$W(X_{i_1j_1}X_{i_2j_2}) = W(X_{i_1j_1})W(X_{i_2j_2}), W(X_{i_sj_s}) = \Gamma_{i_s}\Gamma_{j_s}, \text{где все } \Gamma_s \in \mathbb{R},$$

то есть является мультипликативной. В этом случае гамильтониан будет иметь вид

$$H = \mathrm{Im}\ W(I_1 + I_2) = \mathrm{Im}\ W(I_1) + \mathrm{Im}\ (\Theta_{123} + \Phi_{123})$$

Для рассматриваемой весовой системы W можно указать явный вид гамильтониана

$$H = \sum_{1 \le i < j \le 3} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij} + \sum_{1 \le i < j \le 3} \sum_{1 \le k < l \le 3} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k \Gamma_l \cdot \varphi_{ij} \cdot \ln r_{kl}$$

Воспользовавшись соотношением $\Gamma_s \dot{z}_s = \overline{\partial}_s(\overline{W(I_1)} + \overline{\Theta_{123}} + \overline{\Phi_{123}})$, получим следующее уравнение, определяющее сохраняющиеся коллинеарные конфигурации

$$\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{L}{8\pi^2\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{(\Gamma_1+\Gamma_2)u^3 - (2\Gamma_1+\Gamma_2)u^2 - (2\Gamma_3+\Gamma_2)u + (\Gamma_2+\Gamma_3)}{u(1-u)}\right) = 0,$$

где $L = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3$ представляет собой полный вихревой момент системы трех вихрей. Значения $u = 0$ и $u = 1$ соответствуют ситуации коллапса двух из трех вихрей. В этом случае коллинеарная конфигурация является тривиальной.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 4.6.1. *Пусть гамильтониан системы трех вихрей представляет инвариант Васильева порядка не выше второго, выраженный суммой итерированных интегралов Чена, с мультипликативной весовой системой* $W(X_{ij}X_{kl}) = W(X_{ij})W(X_{kl})$*, где* $W(X_{ij}) = \Gamma_i\Gamma_j$*, тогда уравнение, определяющее коллинеарные конфигурации данной системы вихрей полностью совпадает с уравнением для классической задачи трех точечных вихрей на плоскости*

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)u^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)u^2 - (2\Gamma_3 + \Gamma_2)u + (\Gamma_2 + \Gamma_3) = 0.$$

Предложение.*Для случая произвольной весовой системы* W*, сохраняющей условия для интегрируемости формы* $\widetilde{\omega}$*, выбрав в качестве гамильтониана функцию*

$$H = Im\ (W(I_1) + \Theta_{123} + \Phi_{123} + \Psi_{123}),$$

а так же при условии $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \neq 0$ *выполняется соотношение*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 + \Gamma_3 z_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}\right) = \frac{\Gamma_1 \dot{z}_1 + \Gamma_2 \dot{z}_2 + \Gamma_3 \dot{z}_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} = 0,$$

которое означает неподвижность центра завихренности системы трех вихрей на плоскости с интенсивностями Γ_1, Γ_2 *и* Γ_3.

Одной из центральных задач исследования движения вихрей на плоскости является проблема отыскания сохраняющихся конфигураций, в частности, исследование устойчивости стационарного вращения системы n точечных вихрей, помещенных в вершины правильного n-угольника. Такие конфигурации, как было отмечено выше, называют томсоновскими по имени В.Томсона (лорд Кельвин), который впервые поставил данную задачу.

Мы будем исследовать случай трех вихрей. В §4.7 главы IV представлено новое доказательство существования томсоновских конфигураций для трех классических вихрей с равными интенсивностями, а так же приведено доказательство существование такой томсоновской конфигурации для системы трех неклассических вихрей, определяемой гамильтонианом

$$H = \mathrm{Im}\ W(I_1 + I_2) = \mathrm{Im}\ W(I_1) + \mathrm{Im}\ (\Theta_{123} + \Phi_{123}),$$

который отвечает инварианту Васильева порядка не выше второго. Этот инвариант получен применением к коэффициентам универсального инварианта Васильева порядка не выше второго мултипликативной весовой системы W.

Для доказательства существования томсоновских конфигураций системы трех вихрей будем использовать относительные переменные M_{12}, M_{13} и M_{23}, которые являются квадратами взаимных расстояний. Сохраняющиеся томсоновские конфигурации будут определяться системой

$$\begin{cases} M_{12} = M_{13} = M_{23} \\ \dot{M}_{12} = \dot{M}_{13} = \dot{M}_{23} = 0 \end{cases}$$

Так как $M_{ks} = (z_k - z_s)(\overline{z}_k - \overline{z}_s)$, то

$$\dot{M}_{ks} = (\dot{z}_k - \dot{z}_s)(\overline{z}_k - \overline{z}_s) + (z_k - z_s)(\dot{\overline{z}}_k - \dot{\overline{z}}_s).$$

Подставляя соотношения для производных от абсолютных координат в выражение для $\dot{M}_{12}$ и предполагая $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$, окончательно получаем

$$\dot{M}_{12} = -\frac{3\Gamma^3}{4\pi^2} \cdot \ln M_{12}M_{13}M_{23}$$

Очевидно, при условии $M_{12} = M_{13} = M_{23} = 1$, производная $\dot{M}_{12} = \dot{M}_{13} = \dot{M}_{23} = 0$, что означает сохранение расстояния между вихрями во время движения.

Таким образом, рассмотренная нами система неклассических вихрей также обладает томсоновскими конфигурациями, как и в классическом случае.

В работе так же рассмотрен вопрос о существовании устойчивых томсоновских и устойчивых коллинеарных конфигураций вихрей для случая гамильтоновой системы, отвечающей полному инварианту Васильева, то есть с гамильтонианом $H = \mathrm{Im}W(I_\infty)$, где $W(I_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} W(I_k)$. Если рассмотреть мультипликативную весовую систему W, действующую по правилу

$$W(X_{k_1s_1}X_{k_2s_2}\ldots X_{k_ns_n}) = W(X_{k_1s_1})W(X_{k_2s_2})\ldots W(X_{k_ns_n}),$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и удовлетворяющей требованию для интегрируемости связности $\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij}$, то

$$W(I_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} W(I_k) = e^{W(I_1)},$$

где $W(I_1) = \Phi + iH$, а H и Φ, соответственно, гамильтониан и функция потенциала для системы классических вихрей, соответствующей инварианту Васильеву первого порядка.

Учитывая соотношения

$$\dot{z}_k = \overline{\partial}_k \overline{W(I_\infty)} = \overline{\partial}_k e^{\overline{W(I_1)}} = e^{\overline{W(I_1)}} \cdot \overline{\partial}_k \overline{W(I_1)},$$

заключаем, что, если $H = \mathrm{Im}W(I_1) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то производные по времени относительных координат $\dot{\Delta}^\infty$ и $\dot{M}_{ks}^\infty$ для случая $H = \mathrm{Im}W(I_\infty)$, будут пропорциональны соответствующим производным $\dot{\Delta}$ и $\dot{M}_{ks}$ для случая $H = \mathrm{Im}W(I_1)$, а именно

$$\dot{\Delta}^\infty = C \cdot \dot{\Delta},\ \dot{M}_{ks}^\infty = C \cdot \dot{M}_{ks},$$

где C – некоторая константа.

Данные соотношения означают, что справедлива теорема

Теорема 4.7.1. *Все существующие сохраняющиеся томсоновские и сохраняющие коллинеарные конфигурации для классической системы вихрей имеют место и для системы неклассических вихрей с гамильтонианом $H = Im(\sum_{k=0}^{\infty} W(I_k))$, представляющим мнимую часть полного числового инварианта Васильева, полученного применением к коэффициентам формы $\widetilde{\omega} = \sum_{i<j} X_{ij} \otimes \omega_{ij}$ мультипликативной весовой системы W, действующей по правилу $W(X_{ij}) = \Gamma_i \Gamma_j$, если $H = ImW(I_1) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.*

В заключительном параграфе §4.7 главы IV, рассмотрена задача двух вихрей для двух частных случаев, когда гамильтониан представляет собой мнимую часть инварианта Васильева порядка не выше второго и порядка не выше третьего. Предполагая, что весовая система W является вещественнозначной, то есть $W : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, выпишем явный вид гамильтонианов и производных от координат по времени. В нашем случае логарифмическая форма, порождающая инварианты Васильева имеет вид $\widetilde{\omega} = X_{12} \otimes \omega_{12} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot \frac{d(z_1 - z_2)}{z_1 - z_2}$.

Для инварианта Васильева порядка не выше второго

$$H = \mathrm{I}mW(I_1 + I_2) = -\frac{1}{2\pi} W(X_{12}) \ln|z_1 - z_2| - \frac{1}{4\pi^2} W(X_{12}X_{12}) \varphi_{12} \ln|z_1 - z_2|,$$

$$\begin{cases} \Gamma_1 \dot{z}_1 = -\dfrac{W(X_{12})}{2\pi\sqrt{-1}} \dfrac{1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} - \dfrac{W(X_{12}X_{12})}{4\pi^2} \dfrac{\ln(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} \\ \Gamma_2 \dot{z}_2 = \dfrac{W(X_{12})}{2\pi\sqrt{-1}} \dfrac{1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} + \dfrac{W(X_{12}X_{12})}{4\pi^2} \dfrac{\ln(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} \end{cases}$$

Как и ранее, применяется мультипликативная весовая система W, поэтому $W(X_{12}X_{12}) = W(X_{12})W(X_{12}) = \Gamma_1^2 \Gamma_2^2$. В этом случае изменение квадрата взаимного расстояния M_{12} между двумя вихрями задается уравнением

$$\dot{M}_{12} = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi^2} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \ln M_{12}$$

Знак $\dot{M}_{12}$ зависит только от знака $\ln M_{12}$. Таким образом, если $W(X_{12}X_{12}) > 0$, $\Gamma_1 > 0$ и $\Gamma_2 > 0$ и расстояние между двумя вихрями достаточно велико, то есть, $|\mathbf{r}_{12}| > 1$, то вихри стремятся сблизиться. Если же вихри сближаются на расстояние меньше единицы, то расстояние между ними начинает увеличиваться. Другими словами, если расстояние между двумя вихрями равно $|\mathbf{r}_{12}| = 1$, то такое положение будет устойчивым.

В случае, если $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, получаем $\dot{M}_{12} = 0$. Следовательно, отрезок, соединяющий вихри, не изменяет свою длину. При этом, как и в случае классической системы двух вихрей, он будет двигаться прямолинейно, то есть остается параллельным самому себе.

Для инварианта Васильева порядка не выше третьего

$$H = \mathrm{Im} W(I_1 + I_2 + I_3) = -\frac{1}{2\pi} W(X_{12}) \ln |z_1 - z_2| -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} W(X_{12}X_{12})\varphi_{12} \ln |z_1 - z_2| + \frac{W(X_{12}X_{12}X_{12})}{48\pi^3} (\ln^3 |z_1 - z_2| - 3\varphi_{12}^2 \ln |z_1 - z_2|),$$

а производные от абсолютных координат будут иметь вид

$$\begin{cases} \Gamma_1 \dot{z}_1 = -\dfrac{W(X_{12})}{2\pi\sqrt{-1}} \dfrac{1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} - \dfrac{W(X_{12}X_{12})}{4\pi^2} \dfrac{\ln(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} + \\ \qquad + \dfrac{W(X_{12}X_{12}X_{12})}{16\pi^3\sqrt{-1}} \dfrac{\ln^2(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}, \\ \Gamma_2 \dot{z}_2 = \dfrac{W(X_{12})}{2\pi\sqrt{-1}} \dfrac{1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} + \dfrac{W(X_{12}X_{12})}{4\pi^2} \dfrac{\ln(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2} - \\ \qquad - \dfrac{W(X_{12}X_{12}X_{12})}{16\pi^3\sqrt{-1}} \dfrac{\ln^2(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}. \end{cases}$$

Скорость изменения квадрата взаимного расстояния M_{12} между двумя вихрями выражается формулой

$$\dot{M}_{12} = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi^2}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \ln M_{12} + \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{16\pi^3\sqrt{-1}}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \ln M_{12} \cdot \ln\left(\frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}{z_1 - z_2}\right)$$

В случае интенсивностей $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ квадрат взаимного расстояния между вихрями остается неизменным.

Работы автора по теме диссертации

1. Кирин, Н.А. Инварианты первого порядка и гамильтоновы системы [Текст]/Н.А.Кирин//Александровские чтения – 2006: тезисы докладов Международной конференции "Александровские чтения – 2006", посвящ. 110-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, Москва, 30 мая–2 июня 2006 г. –М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2006. – С. 69 – 70. (0,125 п.л.)

2. Кирин, Н.А. Гамильтоновы системы, отвечающие инвариантам Васильева первого порядка[Текст]/Н.А.Кирин//Начало: сборник научных статей аспирантов и соискателей.–Коломна: КГПИ, 2006. – С.186–191. (0,36 п.л.)

3. Кирин, Н.А. Гамильтоновы системы и инварианты Васильева [Текст]/Н.А.Кирин//Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 10–15 июля 2006 г.–Владимир: Владимирский государственный университет, 2006. С.120–121. (0,06 п.л.)

4. Кирин, Н.А. Гамильтоновы системы и инварианты Васильева [Текст]/Н.А.Кирин//Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж, 27 янв.–2 фев. 2007 г.–Воронеж: Воронежский государственный университет, 2007.– С.101–102. (0,06 п.л.)

5. Кирин, Н.А. Коллинеарные конфигурации вихревого движения, порожденного инвариантами Васильева [Текст]/ Н.А.Кирин// Начало: сборник научных статей аспирантов и соискателей.–Коломна: КГПИ, 2007,- с.148-154. (0,36 п.л.).

6. Кирин, Н.А. Инварианты Васильева первого и второго порядка, порождающие гамильтоновы системы[Текст]/ Н.А.Кирин// Вестник КГПИ.–Коломна: КГПИ, 2007, с 48-61. (0,9 п.л.)

7. Кирин, Н.А. Инварианты Васильева и динамические системы вихрей Декарта на плоскости [Текст]/ Н.А.Кирин//Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г.Петровского: сборник тезисов, Москва, 21–26 мая 2007 г.–М.: Изд-во МГУ, 2007. С.140–141. (0,06 п.л.)

8. Кирин, Н.А. Динамические системы и инварианты Васильева второго порядка [Текст]/ Н.А.Кирин//Международная конференция "Анализ и особенности", посвященная 70-летию В.И.Арнольда: тезисы докладов/ - М.: Изд-во МИАН, 2007. С.60–61. (0,1 п.л.)

9. Кирин, Н.А. Гамильтоновы системы и топологические инварианты малых порядков [Текст] / Н.А.Кирин //Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2008, Воронеж 24 -30 января 2008 г.: Тезисы докладов. - Воронеж: ВорГУ, 2008. - С.67-68. (0,06 п.л.)

10. Кирин, Н.А. Конечномерные аппроксимации уравнения Эйлера магнитной гидродинамики и инварианты Васильева [Текст]/ Н.А.Кирин//Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семчновича Понтрягина (1908-1988), Москва, 17-22 июня 2008 г. : Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ, 2008. С.468-469. (0,1 п.л.)

11. Кирин, Н.А. Инварианты Васильева и конечномерные аппроксимации уравнения Эйлера магнитной гидродинамики [Текст]/ Н.А.Кирин // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль 27 июня -2 июля 2008 г. : Тезисы докладов. - Владимир.: Изд-во ВГУ, 2008. С.133-135. (0,12 п.л.)

12. **Kirin, N.A. Hamiltonian systems and Vasil'ev invariants// Journal of Mathematical Sciences: Springer New York, Volume 160, Number 1, 2009. - pp. 10-20.**

13. Кирин, Н.А. Применение инвариантов Васильева и инвариантов Милнора для описания системы n точечных вихрей на плоскости[Текст] / Н.А.Кирин // Вестник КГПИ. - Коломна: КГПИ, 2010.

14. Кирин, Н.А. Классическая задача о движении вихрей на плоскости и основные пути ее обобщения [Текст] / Н.А.Кирин //Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна - 2010: Тезисы докладов. - Воронеж: ВорГУ, 2010. - С.79-80. (0,1 п.л.)

15. Кирин, Н.А. Исследование систем неклассических вихрей с помощью высших коэффициентов зацепления и инвариантов Васильева [Текст]/ Н.А.Кирин // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль 2 -7 июля 2010 г. : Тезисы докладов. - М: МИАН, 2010. С.100-101. (0,1 п.л.)

16. **Кирин Н.А. Инварианты Васильева и конечномерные аппроксимации уравнения Эйлера магнитной гидродинамики. ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2010, т. 270, с. 161-169 (0,5 п.л.)**

17. Кирин Н.А. Общие подходы к изучению классической задачи о движении вихрей на плоскости и ее обобщений[Текст] / Н.А.Кирин// Материалы конференции, посвященной 70-летию математического образования в КГПИ: сборник материалов конференции/ отв.ред. Л.П.Шибасов. - Коломна: Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, 2010. - С 46-52. (0,37 п.л.)

18. **Кирин Н.А. Сохраняющиеся конфигурации в неклассической теории точечных вихрей на плоскости. Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", 2015, т.4, №1, с. 41-47**