На правах рукописи

УДК 517.95

АКостин

Костин Андрей Борисович

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре Высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ».

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Пётр Николаевич Вабищевич, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН;
	доктор физико-математических наук, профессор Виктор Петрович Шутяев, Институт вычислительной математики РАН;
	доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Григорьевич Ягола, кафедра математики Физического факультета МГУ.
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов (РУДН, Москва)

Защита состоится 2 марта 2016 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.212.130.09 при Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, Москва, Каширское шоссе, дом 31, аудитория К-608.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ МИФИ и на сайте: ods.mephi.ru

Автореферат разослан « » января 2016 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-матем. наук, профессор А. С. Леонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Теория обратных задач — область современной математики, начало активного развития которой, часто связывают с работами А. Н. Тихонова. Эти работы были инициированы задачами практики и в первую очередь геологоразведки. В постановках обратных задач для уравнений математической физики, наряду с решением, считаются неизвестными источники или коэффициенты уравнения, т. е. считаются неизвестными свойства изучаемой модели (среды). Такая постановка совершенно естественна с точки зрения исследователя и может быть даже более естественна, чем постановки, так называемых, прямых задач, когда все коэффициенты уравнения, источники и граничные условия даны, а ищется только решение уравнения. При достаточно широком подходе к термину обратная задача, можно считать, что зарождение теории обратных задач связано с работами И. Ньютона, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Л. Лихтенштейна, В. А. Амбарцумяна и др.

При изучении любого явления или процесса сначала формируется его физическая модель на основе соответствующих опытов и наблюдений, после чего задача формулируется на математическом языке, возникает модель математическая. Математические модели составляют предмет изучения для математиков. На каждом из этих двух основных этапов получения математической модели происходит огрубление процесса, пренебрежение «малыми членами». В этом случае вопрос о том насколько математическая модель отражает реальный процесс, является ключевым. Основными критериями адекватности математической модели принято считать единственность, существование и устойчивость решения — это составляющие понятия корректности задачи по Ж. Адамару.

Таким образом вопросы существования и единственности решения относятся к наиболее принципиальным вопросам теории дифференциальных уравнений и, в частности, теории обратных задач для таких уравнений. Кроме того, большое значение имеет поиск наиболее общих постановок обратных задач, для которых удаётся выявить достаточно легко проверяемые условия существования и единственности решения. Поскольку традиционно обратные задачи диктовались и диктуются задачами практическими, то помимо существования и единственности очень важно получить и обосновать формулу либо алгоритм для нахождения решения. Этим вопросам в целом и посвящена данная работа.

В последние десятилетия наблюдается большой интерес к разнообразным «неклассическим» задачам для уравнений с частными производными с более сложными дополнительными «граничными» условиями или с усложнённой структурой самих уравнений. Исследования ведутся по многим направлениям, в результате формируются современные теории обратных, некорректных и нелокальных задач, возникают новые вопросы в спектральной теории дифференциальных операторов, теории целых функций, теории уравнений с частными производными, в прикладной математике и численных методах.

Диссертация посвящена изучению цикла обратных задач для «нестационарных» параболических уравнений[1] с нелокальным по времени условием наблюдения. Рассмотрены как линейные задачи об источнике, так и нелинейные обратные задачи восстановления коэффициентов уравнения, исследованы вопросы существования и единственности для обобщённых по С. Л. Соболеву решений.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ — разработать новые, достаточно общие подходы, позволяющие проводить исследование как линейных, так и нелинейных обратных задач для «нестационарных» параболических уравнений с общим нелокальным наблюдением и при минимальных ограничениях на входные данные, довести развитые методы до возможности применения к нахождению решения, получить необходимые и достаточные условия разрешимости в линейной задаче об источнике.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Все результаты, представленные в диссерта-

[1]Такой термин будем использовать для уравнений с зависящими от t коэффициентами, в противном случае будем говорить о «стационарных» уравнениях.

ции, являются новыми, математически строго доказанными, носят теоретический характер и получены автором самостоятельно. Основные из них состоят в следующем.

1. (Глава 1, §§ 1–7.) Исследована линейная обратная задача восстановления правой части в «нестационарном» параболическом уравнении по нелокальному наблюдению. В частности:

а) общая задача эквивалентно сведена к операторному уравнению второго рода относительно $f \in L_2(\Omega)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{B}$;

б) предложен новый метод доказательства корректности, основанный на оценке спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$ и теореме Крейна–Рутмана, обоснован алгоритм нахождения решения обратной задачи об источнике;

в) доказана единственность решения методом позитивности, что потребовало его существенной модификации, привлечения современных методов и результатов по качественной теории уравнений с частными производными;

г) доказаны новые теоремы о единственности и корректности в случае второй начально–краевой задачи;

д) получен критерий единственности и корректности в терминах полноты и базисности в $L_2(\Omega)$ системы функций, связанной с обратной задачей об источнике;

е) доказана полнота и базисность по Риссу в $L_2(\Omega)$ широкого класса систем функций в многомерном случае;

Аналоги отдельных результатов автора встречались ранее для «стационарных» в основном уравнений, частных случаев переопределений и при более жёстких ограничениях (см. цикл работ А. И. Прилепко с В. В. Соловьёвым, А. Б. Костиным, И. В. Тихоновым, Д. С. Ткаченко, а также работы В. М. Исакова, В. Л. Камынина, А. И. Кожанова).

2. (Глава 2, §§ 8–11.) Изучена обратная задача нахождения источника в абстрактном дифференциальном уравнении $u'(t)+Au(t) = \Phi(t)f$, которое рассматривается в гильбертовом пространстве H. Искомым является элемент $f \in H$. Для задачи с оператором A, обладающим ортонормированным базисом из собственных векторов, получены такие основные результаты:

а) доказано, что единственность решения обратной задачи с финальным наблюдением равносильна полноте в H некоторой системы элементов $\{\psi_k\}$;

б) доказано, что корректность обратной задачи с финальным наблюдением равносильна базисности Рисса в H системы элементов $\{\psi_k\}$;

в) из результатов автора по корректности выведена базисность Рисса в H для широкого класса систем элементов, а при некоторых дополнительных условиях на полугруппу, порождаемую оператором $(-A)$ установлена базисность по Бари для таких систем элементов;

Связь корректности обратной задачи с базисностью Рисса обнаружена автором, ранее не встречалась.

3. (Глава 2, §§ 12.) Вопросы, рассмотренные в предыдущих четырёх параграфах, развиваются на случай, когда система собственных и присоединённых векторов оператора A^* является полной или образует базис (базис со скобками, базис Рисса со скобками) в пространстве H. Предложен спектральный метод исследования линейной обратной задачи. Основные результаты:

а) доказано, что единственность решения обратной задачи с финальным наблюдением равносильна полноте в H некоторой системы элементов $\boldsymbol{\psi}$;

б) установлена «эквивалентность» корректности обратной задачи и базисности Рисса со скобками системы элементов $\boldsymbol{\psi_c}$;

в) приведён ряд примеров, очерчивающих границы развитой теории, в частности, построен пример оператора с бесконечной цепочкой Жордана, для которого доказанные критерии не справедливы;

4. (Глава 2, §§ 13, 14.) Развитый в §§ 8–12 спектральный метод исследования стимулировал изучение задачи о расположении спектра эллиптических операторов. Основные результаты:

а) доказано, что все собственные значения достаточно общих краевых задач для эллиптических операторов в ограниченной области, лежат во множестве $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{C}_\lambda$, граница которого явно выписана (см. формулу (19) на стр. 23);

б) приведён пример показывающий, что найденное множество $\mathcal{D}_0$ является асимптотически точным (пример 0.1, стр. 26);

в) установлена теорема о расположении на комплексной плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ числовой области значений некоторого класса полуторалинейных форм;

г) построен пример эллиптического оператора с гладкими вещественными коэффициентами и условиями Дирихле, имеющего комплексные собственные значения;

д) приведён пример обратной задачи, показывающий, что условие монотонности весовой функции в условиях единственности решения обратной задачи с финальным наблюдением, без дополнительных ограничений отброшено быть не может;

Результаты § 13 существенно уточняют результаты Гепперта–Карлемана о расположении спектра эллиптического оператора, ранее были неизвестны (см. рисунок 1 на стр. 25). Найденные примеры показывают, что условия единственности в многомерном случае не могут быть ослаблены в указанном в пункте д) направлении.

5. (Глава 3, § 15.) Обратная задача восстановления коэффициента при u в уравнении изучается отдельно для интегрального и общего нелокального наблюдения, искомый коэффициент $c(x)$ ищется в классе отрицательных функций из $L_p(\Omega)$. Основные результаты:

а) доказаны теоремы единственности и существования решения задачи, как с интегральным, так и с общим нелокальным наблюдением;

б) в условиях теорем о разрешимости предложен итерационный процесс нахождения $c(x)$, обоснована его сходимость, найдена оценка снизу для искомого коэффициента;

Найденные достаточные условия единственности и существования решения не содержат ограничений на нормы заданных функций, имеют вид достаточно легко проверяемых, односторонних неравенств типа положительности и монотонности. Задача в $L_p(\Omega)$ ранее не исследовалась. Развит новый метод доказательства разрешимости основанный на теории монотонных операторов и теореме Биркгофа–Тарского. Отдельные результаты были получены ранее лишь для частных случаев наблюдения, при специальных ограничениях на оператор и для более гладких решений (см. А. И. Прилепко и В. В. Соловьёв[2], V. Isakov[3]).

6. (Глава 3, § 16.) Обратная задача восстановления векторного коэффициента $\vec{b}(x)$ при u_x в уравнении изучается для интегрального (векторного) наблюдения, искомый коэффициент ищется в классе $\big(L_\infty(\Omega)\big)^n$. Основные результаты:

а) доказана теорема существования решения, носящая «глобальный» характер;

б) получены достаточные условия единственности решения и дан пример класса задач, для которых выполнены условия теорем существования и единственности решения;

[2]Дифференц. уравнения. — 1987. – Т. 23, № 1. – С. 136–143.
[3]Inverse problems for partial differential equations. — New York: Springer, 2006.

Результаты по восстановлению векторного коэффициента в близкой постановке автору неизвестны. Одномерная же по x задача с интегральным наблюдением изучалась в работе В. Л. Камынина[4]. Наше доказательство отличается от данного в этой работе, поэтому даже в одномерном случае даёт новый результат.

7. (Глава 3, §§ 17–18.) Обратная задача восстановления коэффициента при u_t в уравнении изучается отдельно для интегрального и общего нелокального наблюдения, искомый коэффициент $r(x)$ ищется в классе положительных функций из $L_\infty(\Omega)$. Подробно изучена, важная в приложениях, задача для модельного уравнения теплопроводности. Здесь условия теорем выписываются проще, чем в случае общего параболического уравнения, который рассмотрен отдельно. Основные результаты:

а) доказаны теоремы существования и единственности решения задачи, как с интегральным, так и с общим нелокальным наблюдением;

б) в условиях теорем о разрешимости предложен итерационный процесс нахождения решения, обоснована его сходимость, найдена оценка сверху для искомого коэффициента;

Получен цикл теорем существования и единственности решения в нелинейной обратной задаче восстановления старшего коэффициента в нестационарном параболическом уравнении. В такой общей постановке задача ранее не изучалась. Даже в случае модельной задачи для уравнения теплопроводности получены новые результаты, включающие в себя известные частные случаи (финальное наблюдение, «стационарное» уравнение, более жёсткие ограничения на входные данные; см. работы [2], [3], V. Isakov[3]).

8. (Глава 4, §§ 19–22.) Поставлены и решены новые обратные задачи восстановления граничного условия третьего рода для многомерного уравнения теплопроводности. В качестве дополнительной информации задаётся граничное условие наблюдения интегрального или финального

[4]Дифференц. уравнения. — 2012. – Т. 48, № 2. – С. 207–216.

вида. Рассмотрены задачи двух видов — о восстановлении функций зависящих только от x или только от t. Для каждой из этих задач установлены «глобальные» теоремы единственности решения. В случае линейной задачи о неизвестной функции переменной t получена «глобальная» теорема существования.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. В работе изучаются обобщённые по С. Л. Соболеву решения обратных задач, поэтому широко применяется техника пространств Соболева, результаты о разрешимости и гладкости решений прямых задач, как для параболических, так и для эллиптических уравнений в L_p. Доказательство главных результатов использует современную качественную теорию уравнений с частными производными, такие её результаты, как слабое и сильное неравенства Харнака, слабый принцип максимума, лемма Олейник–Хопфа для сильных обобщённых решений эллиптических и параболических уравнений. Активно применяются методы линейного и нелинейного функционального анализа, такие результаты, как теорема Крейна–Рутмана, теория полугрупп операторов, результаты о базисах (базисах со скобками) в гильбертовом пространстве, теоремы Биркгофа–Тарского, Шаудера и др.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. Её ценность, как работы теоретической, состоит в доказательстве теорем существования и единственности решения для широкого класса обратных задач, как линейных, так и нелинейных, в получении необходимых и достаточных условий единственности и корректности в линейной задаче. Методы развитые при этом, носят достаточно общий характер, поэтому могут применяться в обратных задачах для уравнений других типов, а также для абстрактных дифференциальных уравнений в банаховом (гильбертовом) пространстве. Таким образом, получены новые фундаментальные результаты, закладывающие основу для дальнейших исследований.

Несмотря на сугубо теоретический характер работы, автор стремился довести результаты до алгоритма нахождения (вычисления) решения обратных задач. Это открывает широкие возможности для численных приложений и для использования результатов в практических задачах.

Материал диссертации может представлять интерес для специалистов в области уравнений с частными производными, функционального анализа и теории управления, он может быть востребован в отечественных и международных математических научных центрах.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации с полными доказательствами докладывались автором на семинаре «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» мех-мата МГУ (руководители: академик В. А. Садовничий и профессор А. И. Прилепко). За последние несколько лет основные результаты диссертации докладывались на семинарах г. Москвы по уравнениям в частных производных, по спектральной теории дифференциальных операторов, по теории функций и её приложениям в анализе, по обратным задачам математической физики (руководители семинаров: академики В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, В. А. Садовничий, профессора В. И. Агошков, А. Б. Бакушинский, В. В. Власов, А. М. Денисов, А. М. Седлецкий, А. Л. Скубачевский, А. В. Тихонравов, А. А. Шкаликов, В. П. Шутяев, А. Г. Ягола).

Центральные результаты диссертации доложены на международных конференциях И. Г. Петровского (Москва, 2007, 2011), А. Н. Тихонова (Москва, 1996, 2006, 2011), В. К. Иванова (Екатеринбург, 1995, 1998), М. М. Лаврентьева (Новосибирск, 2007, 2012), С. Л. Соболева (Новосибирск, 2013), П. Л. Чебышёва (Обнинск, 2011), Л. Д. Кудрявцева (Москва, 2013), Б. М. Левитана (Москва, 2014). Ряд докладов был сделан автором на конференциях по обратным и некорректным задачам (Москва, факультет ВМиК МГУ).

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты диссертации полностью опубликованы. Список основных 20 статей приведен в конце автореферата. Из них 19 работ опубликованы в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК, а 18 в базы Web of Science, Scopus. Из совместных работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором. Вклад соавторов

(А. И. Прилепко и В. Л. Камынина) чётко выделен в тексте диссертации и отделен от результатов автора.

СТРУКТУРА И ОБЪЁМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы, изложена на 237 страницах. После введение имеется небольшой технический раздел «Терминология и обозначения». Далее следует основная часть, разбитая на четыре главы (22 параграфа). Нумерация параграфов — сквозная, нумерация пунктов ведется по параграфам. Для исключения тройной нумерации утверждений и уравнений, параграф сделан основной структурной единицей работы. Кроме того, сквозная нумерация сохранена для определений и теорем. При этом ссылка из другого параграфа дополняется указанием страницы. Нумерация формул, условий, лемм, замечаний, предложений и примеров по параграфам. Таким образом ссылка, например, на уравнение (m.n) означает уравнение с номером n из параграфа m диссертации. Завершает всё список литературы, где сперва в алфавитном порядке идут работы на русском языке, а потом — работы авторов на иностранных языках. Библиография состоит из 350 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во ВВЕДЕНИИ описывается общее направление исследования и даётся краткое изложение результатов. Все точные постановки задач, определения и формулировки утверждений приведены в тексте диссертации. Также в основном тексте, как правило в конце параграфа, имеется более детальное обсуждение и сопоставление с известными результатами.

Основной текст диссертации разбит на четыре главы, отличающиеся тематикой, но тесно связанные друг с другом характером результатов. Изложим наиболее принципиальные из них, при этом будем нумеровать теоремы и формулы независимо от основного текста диссертации.

Рассматриваемые ниже пространства $W_p^{2,1}(Q)$, $W_p^2(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $C^k(\overline{G})$, $C^{2,1}(Q)$, $L_{q,r}(Q)$ понимаются в общепринятом смысле, все равенства и неравенства понимаются почти всюду, а все производные — как обобщённые по С. Л. Соболеву, $BV[0,T]$ — пространство скалярных (вещественных) функций ограниченной вариации на $[0,T]$. Символ $\bigvee\limits_0^T(\mu)$ будем использовать для полной вариации функции $\mu \in BV[0,T]$ на отрезке $[0,T]$. Для равенства по определению применяется обозначение $A := B$, где слева стоит определяемый объект.

В первой главе (§§ 1–7) исследуется обратная задача восстановления правой части в параболическом уравнении. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, а $Q = \Omega \times (0,T)$ — это основной цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0,T]$. В § 1 показано, что общая задача об источнике, при соответствующих условиях, сводится к нахождению пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\rho(x,t)\, u_t(x,t) - L(t)u(x,t) = h(x,t)f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad B\,u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S, \tag{2}$$

$$l(u) := \int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь функции ρ, h, χ, $\mu(t)$ заданы, равномерно эллиптический оператор $L(t)$ с достаточно гладкими коэффициентами имеет вид:

$$L(t)u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x,t)u,$$

а оператор краевых условий всюду в работе — либо первого, либо третьего (второго) рода, т. е.

$$B\,u \equiv u\,, \text{ или } B\,u \equiv \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)\,u, \text{ где } \frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \cos(\mathbf{n}, x_i)\, a_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}$$

производная по конормали, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\sigma \in C^1(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geq 0$ на $\partial\Omega$. Функции $\chi(x)$ и $h(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &\chi \in W_2^2(\Omega); \quad B\,\chi(x) = 0,\ x \in \partial\Omega; \\ &h,\ h_t \in L_{\infty,2}(Q); \quad |l(h)(x)| \geqslant \delta > 0,\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Скалярная функция $\mu \in BV[0,T]$, а интеграл в (3) понимается как интеграл Римана – Стилтьеса от непрерывной функции. Относительно заданных функций предполагаются выполненными следующие условия гладкости

$$
\begin{aligned}
&a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}); \quad \rho,\, \rho_t \in C(\overline{Q}); \quad b_i,\, \partial b_i/\partial t,\, d,\, d_t \in L_\infty(Q);\\
(A.1)\quad &\mu \in BV[0,T], \quad \mu(0) = \mu(0+), \quad \mu(t) \not\equiv \text{const} \ \text{ на отрезке } [0,T];\\
&\rho(x,t) \geqslant \rho_0 > 0, \quad (x,t) \in Q;
\end{aligned}
$$

Под решением обратной задачи (1)–(3) понимается пара функций $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ удовлетворяющая уравнению (1) п. в. в Q и условиям (2), (3). Эквивалентно, под решением иногда будем понимать $f \in L_2(\Omega)$ такую, что $u = u(x,t;f)$, как решение прямой задачи (1), (2) с данной f, удовлетворяет условию наблюдения (3).

Важную роль на протяжении всей работы играют следующие условия на функцию $\mu(t)$:

$$(5) \quad \mu(t) \text{ — неубывающая, непрерывная справа на } [0,T] \ \text{ и } \ \bigvee_0^T(\mu) > 0\,.$$

Частными случаями нелокального наблюдения (3) являются переопределения финального вида, т. е.

$$l(u) \equiv u(x,t_1), \qquad 0 < t_1 \leq T < \infty,$$

где t_1 фиксировано и интегрального вида, т. е.

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\omega(t)\,dt.$$

Задачи с такими условиями наблюдения для «стационарных» параболических уравнений в L_2 рассматривались в работах [1]–[4]. В работах А. И. Прилепко, В. В. Соловьёва[5] и В. В. Соловьёва[6] задача с финальным наблюдением рассмотрена в классах Гёльдера, доказано свойство фредгольмовости и теорема единственности, предложен метод позитивности (см. также V. Isakov[7]).

[5]Дифференц. уравнения. — 1987. – Т. 23, № 1. – С. 136–143.
[6]Дифференц. уравнения. — 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1577–1583.
[7]Comm. on Pure and Appl. Math. — 1991. – V. 44, P. 185–209.

Более общее условие, а именно,

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\,d\mu(t),$$

возникло чуть позже в работе А. И. Прилепко и И. В. Тихонова[8] (абстрактные уравнения, метод полугрупп).

В § 2 для удобства дальнейших ссылок приведены некоторые вспомогательные утверждения, используемые в диссертации. Это свойства, описывающие повышенную гладкость решения прямой задачи, а также свойства, связанные с неотрицательностью решений параболических уравнений и монотонностью интеграла Римана – Стилтьеса.

В § 3 даны формулировка и доказательство теоремы об эквивалентности обратной задачи (1)–(3) операторному уравнению второго рода относительно неизвестной функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4), (A.1). Тогда обратная задача (1)–(3) эквивалентна линейному операторному уравнению второго рода с вполне непрерывным в* $L_2(\Omega)$ *оператором* $\mathcal{B}$*.*

Для ряда последующих результатов будем предполагать, что в операторе $L(t)$ можно выделить стационарную часть L_0:

$$\left.\begin{aligned} &L(t)u = L_0 u + d(x,t)u\,,\\ &L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(x)\,u\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, d, удовлетворяют условию $(A.1)$, функции b_i теперь не зависят от t, а коэффициент $c_0(x)$ подчинён требованиям

$$(E)\qquad \begin{aligned} &c_0 \in L_\infty(\Omega)\,, \quad c_0(x) \leqslant 0\,, \quad x \in \Omega\,;\\ &\text{причём, если}\quad B\,u \equiv \frac{\partial u}{\partial N}\,,\ \text{то}\quad c_0(x) \not\equiv 0 \quad \text{в}\ \ \Omega\,. \end{aligned}$$

В § 4 получены достаточные условия корректности общей линейной обратной задачи, здесь же приведём этот результат для задачи (1)–(3).

[8]Известия РАН. Сер. матем. — 1994. – Т. 58, № 2. – С. 167–188.

Теорема 2. *Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (1) имеет вид (6), выполнены условия (4), (A.1), (E), функция $\mu(t)$ является неубывающей на $[0,T]$; $|l(h)(x)| \geqslant \delta > 0$ в Ω, $h(x,t)l(h)^{-1}(x) \geqslant 0$ в Q и выполняется хотя бы одно из условий:*

1. *$h_t(x,t)l(h)^{-1}(x) \geqslant 0$, $d(x,t) \leqslant 0$, $d_t(x,t) \geqslant 0$ в Q;*
2. *$d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in W_1^1(0,T)$ такой, что справедливо неравенство $(\omega(t)\,\varrho(x,t))'_t + d(x,t)\,\omega(t) \leqslant 0$ в Q.*
3. *$d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0,T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x,t) \equiv \omega(t)\,\varrho(x,t) + \int_0^t d(x,\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau$ является невозрастающей по $t \in [0,T]$.*

Тогда существует и притом единственное решение $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ задачи (1)–(3) и справедлива оценка устойчивости:

$$\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leqslant C\,\|L_0\chi\|_{2,\Omega}\,.$$

Указанное решение $u(x,t)$ обладает следующими дополнительными дифференциальными свойствами:

$$u \in C([0,T]; W_2^2(\Omega))\,, \quad u_t \in C([0,T]; L_2(\Omega))\,, \quad u_t \in W_2^{2,1}(Q_\varepsilon)\,,$$

где $Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$, а ε – любое число из $(0,T)$.

Некоторые аналоги таких условий для «стационарных» уравнений в рамках полугруппового подхода и метода позитивности встречались в работе[8]. Для «нестационарных» параболических уравнений корректность доказана новым методом (см. [16]). Это позволило доказать сходимость к решению соответствующей итерационной последовательности.

Следствие 0.1. *В условиях теоремы 2 спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$ из теоремы 1 меньше единицы. Решение операторного уравнения f может быть получено в виде ряда Неймана, а функция $u = u(x,t;f)$ – как решение прямой задачи (1), (2) с этим f.*

Исследованию достаточных условий единственности решения обратной задачи посвящён § 5, его результаты широко используются в коэффициентных задачах. Отметим, что в силу линейности задачи, единственность её решения стандартным способом сводится к отсутствию ненулевых решений у однородной обратной задачи, т.е. задачи (1)–(3) с функцией $\chi = 0$.

При выполнении неравенства $|l(h)(x)| > 0$ п.в. в Ω, удобно ввести функцию $\varphi_0(x) := \operatorname{sgn} l(h)(x)$, для которой имеем $\varphi_0^2(x) = 1$ п. в. в Ω.

Теорема 3. *Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (1) имеет вид (6), выполнены условия (A.1), (E); $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (5); $|l(h)(x)| > 0$ в Ω, а $h(x,t)\varphi_0(x) \geqslant 0$ в Q. Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:*

1. *$h_t(x,t)\varphi_0(x) \geqslant 0, \quad d(x,t) \leqslant 0, \quad d_t(x,t) \geqslant 0$ в Q;*
2. *$d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0,T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x,t) \equiv \omega(t)\,\varrho(x,t) + \int_0^t d(x,\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau$ является невозрастающей по переменной $t \in [0,T]$.*

Тогда обратная задача (1)–(3) с функцией $\chi = 0$ имеет лишь нулевое решение $u = 0$ и $f = 0$.

Отдельно рассмотрен вопрос о единственности решения для второй краевой задачи. Это связано с тем, что точка $\lambda = 0$ является собственным значением эллиптического оператора ($c(x) \equiv 0$) и предыдущие результаты, даже в стационарном случае, не применимы. Данный случай не охватывается также и полугрупповым подходом, результат ранее не был известен. В качестве следствия фредгольмовости второй краевой задачи и единственности её решения получена корректность.

В § 6 при определённых условиях на функцию $h(x,t)$ дано описание ядра обратной задачи, т. е. множества пар $\{u(x,t); f(x)\}$, являющихся решениями однородной обратной задачи. Смысл результата состоит в том, что если в условиях теоремы единственности опустить требование

$|l(h)(x)| > 0$, то пара $\{u(x,t); f(x)\}$ принадлежит ядру обратной задачи только тогда, когда f принадлежит ядру оператора умножения на функцию $l(h)(x)$.

При изучении любой задачи важную роль играет получение необходимых и достаточных условий её разрешимости, а также единственности решения. Этим вопросам посвящён § 7, в котором изучена связь единственности и корректности параболической обратной задачи с полнотой и базисностью в $L_2(\Omega)$ некоторой системы функций. В этом параграфе рассматривается обратная задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из следующих условий

$$u_t(x,t) - \mathcal{L}_0 u(x,t) = h(x,t)\, f(x)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{7}$$

$$u(x,0) = 0\,, \quad x \in \Omega\,, \quad B\,u(x,t) = 0\,, \quad (x,t) \in S\,, \tag{8}$$

$$l(u) = \chi(x)\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{9}$$

Здесь $\chi \in W_2^2(\Omega)$, $B\,\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, а $\mathcal{L}_0$ – стационарный, равномерно эллиптический (симметрический) оператор вида:

$$\mathcal{L}_0\, u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c_0(x)\, u\,, \tag{10}$$

с коэффициентами $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c_0 \in L_\infty(\Omega)$ и выполняется условие (E).

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-\mathcal{L}_0\, v(x) = \lambda\, v(x)\,, \quad x \in \Omega\,; \quad B\,v(x) = 0\,, \quad x \in \partial\Omega \tag{11}$$

обозначим $\{e_k(x)\}$ и $\{\lambda_k\}$, занумеровав λ_k в порядке возрастания модуля (с учётом кратности) и считая, что $\|e_k\|_{2,\Omega} = 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Известно, что $e_k \in W_2^2(\Omega)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \to +\infty$. В нашем случае $\lambda_1 > 0$, а система $\{e_k(x)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Введём систему функций $(k \in \mathbb{N})$

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_k\,(t-\tau)}\, h(x,\tau)\, d\tau \right) d\mu(t)\, e_k(x) \equiv \beta_k(x)\, e_k(x) \tag{12}$$

Для этой системы получен критерий полноты.

Теорема 4. *Пусть $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\mu \in BV[0,T]$, а операторы $\mathcal{L}_0$ и B удовлетворяют условиям, перечисленным выше. Система $\{\psi_k(x)\}$, введённая в (12), полна в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда решение обратной задачи (7)–(9) единственно.*

Для системы $\{\psi_k\}$ может быть поставлена проблема моментов. Найти функцию $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенствам

$$(\psi_k, f) := \int\limits_\Omega \psi_k(x)\, f(x)\, dx = \alpha_k \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \dots \tag{13}$$

где числовая последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}$ задана. Условие $\alpha \in l_2$ означает, как обычно, что $\sum\limits_k |\alpha_k|^2 < \infty$. В работе [7] доказано, что разрешимость обратной задачи с финальным наблюдением эквивалентна разрешимости соответствующей проблемы моментов. Для более общей системы функций, определённой в (12), справедлив такой результат.

Теорема 5. *Пусть $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\mu \in BV[0,T]$, операторы $\mathcal{L}_0$ и B удовлетворяют условиям, перечисленным выше, а система $\{\psi_k(x)\}$ введена в (12). Разрешимость проблемы моментов (13) эквивалентна разрешимости обратной задачи (7)–(9), а именно справедливы следующие два утверждения.*

1. *Пусть последовательность $\alpha \in l_2$ и (13) разрешима. Тогда функция*

$$\chi(x) := \sum_k (\alpha_k/\lambda_k)\; e_k(x) \;\in W_2^2(\Omega)\,, \quad \text{причём} \quad B\,\chi(x) = 0,\; x \in \partial\Omega$$

и обратная задача (7)–(9) разрешима.

2. *Пусть обратная задача (7)–(9) с $l(u) = \chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ и такой, что $B\,\chi(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, разрешима. Тогда проблема моментов (13) с числами $\alpha_k = \lambda_k\,(\chi, e_k)$ разрешима и последовательность $\alpha \in l_2$.*

Автором обнаружено, что однозначная разрешимость обратной задачи (7)–(9) тесно связана с базисностью Рисса системы $\{\psi_k(x)\}$.

Обратную задачу (7)–(9) будем называть корректной, если для любой функции $\chi \in W_2^2(\Omega)$ такой, что $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, существует единственная функция $f \in L_2(\Omega)$, для которой решение $u(x,t;f)$ прямой задачи (7), (8) удовлетворяет условию наблюдения (9) и при этом справедлива оценка устойчивости:

$$\|f\|_{2,\Omega} \leqslant C \, \|\mathcal{L}_0\chi\|_{2,\Omega} .$$

Доказан критерий базисности системы $\{\psi_k(x)\}$.

Теорема 6. *Пусть $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\mu \in BV[0,T]$, операторы $\mathcal{L}_0$ и B удовлетворяют условиям, перечисленным выше, а система $\{\psi_k(x)\}$ введена в (12). Система $\{\psi_k(x)\}$ образует базис Рисса в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда обратная задача (7)–(9) корректна.*

Как следствие теорем 2 и 3, установлена полнота и базисность Рисса для широкого класса таких систем в многомерном случае.

Следствие 0.2. *Пусть $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, операторы $\mathcal{L}_0$ и B удовлетворяют условиям, перечисленным выше, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (5); $|l(h)(x)| > 0$ в Ω, а $h(x,t)\varphi_0(x) \geqslant 0$ в Q. Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:*

1. *$h_t(x,t)\varphi_0(x) \geqslant 0$ в Q;*

2. *$d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0,T]$, которая является невозрастающей на $[0,T]$.*

Тогда система $\{\psi_k(x)\}$, введённая в (12), полна в $L_2(\Omega)$.

Если в условиях этого следствия усилить ограничение $|l(h)(x)| > 0$ в Ω и потребовать, чтобы выполнялось неравенство $|l(h)(x)| \geqslant \delta > 0$ в Ω, то доказано, что система $\{\psi_k(x)\}$ образует базис Рисса в $L_2(\Omega)$.

Теоремы 4–6 показывают, что при изучении обратной задачи очень важно иметь точную информацию о спектре оператора L и его собственных функциях, эти вопросы изучаются в следующей главе.

Во второй главе (§§ 8–14) получают своё дальнейшее развитие результаты, связанные с полнотой и базисностью систем функций, установленные вначале для параболических уравнений (см. [1], [7], [14], [16]). Предложен спектральный метод исследования обратных задач для абстрактных дифференциальных уравнений.

В §§ 8–11 изучается связь корректности обратной задачи нахождения источника в абстрактном дифференциальном уравнении с вопросом базисности некоторого класса систем элементов в гильбертовом пространстве для случая диагонализуемого оператора. Постановка задачи состоит в следующем.

В комплексном гильбертовом пространстве H рассматривается линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A)$, плотной в H, резольвентное множество которого $\rho(A) \neq \varnothing$. Для удобства будем считать, что $0 \in \rho(A)$. Предполагается, что собственные векторы $\{e_k\}$ оператора A образуют ортонормированный базис (ОНБ) в H, а $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$ – соответствующие собственные значения, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$.

Пусть оператор $(-A)$ является генератором полугруппы $S(t)$ класса C_0. Рассмотрим следующую обратную задачу нахождения элемента $f \in H$ и функции $u(t)$ из условий:

$$u'(t) + Au(t) = \Phi(t)f, \quad t \in [0,\ T], \qquad u(0) = 0; \tag{14}$$

$$u(T) = \chi, \tag{15}$$

где $\Phi(t) \in C^1\left([0,\ T];\ \mathfrak{L}(H)\right)$, $\chi \in D(A)$ – заданы, $\mathfrak{L}(H)$ – пространство линейных ограниченных операторов в H. Под её решением понимается элемент $f \in H$, такой, что решение задачи Коши (14) удовлетворяет условию (15). Если элемент $f \in H$ задан, то при сделанных предположениях существует единственное решение (14) (см., например, A. Pazy[9])

$$u(t) \in C^1\left([0,T];H\right) \cap C\left([0,T];D(A)\right).$$

Введём в рассмотрение систему элементов гильбертова пространства H по формулам:

$$\boldsymbol{\psi}_k = \overline{\lambda}_k \int\limits_0^T \exp\bigl[-\overline{\lambda}_k\,(T-\tau)\bigr]\,\Phi^*(\tau)\,d\tau\; e_k, \qquad k=1,2,\ldots, \tag{16}$$

Таким образом, $\boldsymbol{\psi}_k = U_k e_k$, а операторы

$$U_k = \overline{\lambda}_k \int\limits_0^T \exp\bigl[-\overline{\lambda}_k\,(T-\tau)\bigr]\,\Phi^*(\tau)\,d\tau \in \mathfrak{L}(H).$$

Для системы $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$ может быть поставлена проблема моментов. Найти элемент $f \in H$, если

$$(f, \boldsymbol{\psi}_k) = \alpha_k, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где $\alpha = \{\alpha_k\} \in l_2$ задана.

Доказано (см. теорему 11, стр. 76 диссертации), что система элементов (16) полна в H только тогда, когда решение обратной задачи (14), (15) единственно. Разрешимость обратной задачи равносильна разрешимости проблемы моментов (17), а корректность задачи (14), (15) равносильна тому, что система (16) образует базис Рисса в пространстве H (см., соответственно, теоремы 12, 14 на стр. 76, 77).

В § 10 получены достаточные условия того, что система элементов (16) является базисом Бари в H, т.е. базисом квадратично близким к ОНБ (см. теорему 15 на стр. 81 и предложения 10.1, 10.2 на стр. 82, 83). В § 11 приведены теоремы о полноте и базисности систем элементов вида (16), которые получаются в качестве следствия из имеющихся результатов о единственности и корректности обратной задачи (14), (15) (см., теоремы 16, 17 § 11). В качестве иллюстрации приведём пример. В обратной

[9]Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.

задаче с финальным наблюдением для одномерного уравнения теплопроводности возникает система функций $\{\beta_k(x)\sin kx\}$, где веса $\beta_k(x)$ имеют следующий вид:

$$\beta_k(x) = k^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^T e^{-k^2(T-\tau)}h(x,\tau)\,d\tau, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

с заданными $T > 0$ и функцией $h \in C^1\left(\overline{Q}\right)$, где $\overline{Q} = [0,\pi]\times[0,T]$.

Из результатов по параболическим обратным задачам (см. § 7) следует, что если $h(x,t) \geqslant 0$, $h_t(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$ и $h(x,T) \equiv 1$ на $[0,\pi]$, то система функций $\{\beta_k(x)\sin kx\}$ образует базис Бари в $L_2(0,\pi)$.

В § 12 вопросы, рассмотренные в предыдущих четырёх параграфах, развиваются на случай, когда система собственных и присоединённых векторов оператора A^* является полной или образует базис (базис со скобками, базис Рисса со скобками) в пространстве H. В (12.7) на стр. 88 диссертации вводится система элементов $\boldsymbol{\psi}$, которая выражается через жордановы цепочки. Опишем кратко ситуацию с единственностью, которая здесь возникает. Пусть оператор A имеет компактную резольвенту. Обозначим $\boldsymbol{e}$ — объединение по всем собственным значениям λ жордановых базисов корневых подпространств $N(A^* - \overline{\lambda}I)$ сопряжённого оператора. Для каждой цепочки Жордана: e^0, e^1,…,e^r введём функции

$$\varphi^0(t;\overline{\lambda}) = \exp\left[\,\overline{\lambda}\,(t-T)\right]\cdot e^0, \quad \varphi^1(t;\overline{\lambda}) = \exp\left[\,\overline{\lambda}\,(t-T)\right]\cdot\left(\frac{t}{1!}e^0 + e^1\right), \ldots,$$

$$\varphi^r(t;\overline{\lambda}) = \exp\left[\,\overline{\lambda}\,(t-T)\right]\cdot\left(\frac{t^r}{r!}e^0 + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^1 + \ldots + e^r\right)$$

и $\psi^k(\overline{\lambda})$ по формулам

$$\psi^k(\overline{\lambda}) := \int_0^T \Phi^*(t)\varphi^k(t;\overline{\lambda})\,dt \quad \text{для всех } \ k = 0, 1, \ldots, r.$$

Обозначим $\psi(\overline{\lambda})$ систему элементов такого вида, полученную объединением по всем цепочкам жорданова базиса корневого подпространства $N(A^* - \overline{\lambda}I)$, а $\boldsymbol{\psi}$ — объединение систем $\psi(\overline{\lambda})$ по всем собственным значениям (по всем корневым подпространствам).

Теорема 7. *Пусть система элементов* $\boldsymbol{e}$ *полна в гильбертовом пространстве* H. *Однородная обратная задача имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда система элементов* $\boldsymbol{\psi}$ *полна в* H.

Теорема 19 на стр. 91 диссертации устанавливает «эквивалентность» корректности обратной задачи и базисности Рисса со скобками системы элементов $\boldsymbol{\psi_c}$, введённой в (12.10) на стр. 90 диссертации. В утверждениях § 12 существенно используется, что все цепочки Жордана имеют конечную длину. В заключительной части параграфа приведён целый ряд примеров, очерчивающих границы развитой теории. В частности, приведён пример оператора с бесконечной цепочкой Жордана, для которого доказанные критерии не справедливы. Такой пример дан в матричной и дифференциальной формах (см. примеры 12.1, 12.2 на стр. 96, 99) и по своей идее восходит к работе А. Н. Тихонова[10].

Развитый в §§ 8–12 спектральный метод исследования линейной обратной задачи инициировал изучение расположения спектра эллиптических операторов, что и проделано в следующем параграфе. Ещё одна причина интереса автора к этим вопросам состоит в следующем. Около 25 лет назад, благодаря в основном работам Ю. С. Эйдельмана[11,12] стало ясно, что наличие у оператора комплексных собственных значений играет ключевую роль для единственности решения обратных задач вида (14), (15). В связи с этим возник вопрос, а может ли эллиптический оператор с вещественными, гладкими коэффициентами и условиями Дирихле на границе ограниченной области иметь комплексные собственные значения? Что вообще можно сказать о расположении собственных значений эллиптического оператора в ограниченной области с классическими граничными условиями? Параграф 13 работы посвящён этим вопросам. Рассмотрим в ограниченной области Ω равномерно эллиптический

[10] Матем. сб. — 1935. – Т. 42, № 2. – С. 199–216.
[11] Дифференц. уравнения. — 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1647–1649.
[12] Укр. матем. журнал. — 1993. – Т. 45, № 1. – С. 120–127.

оператор $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x)w$$

с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$; $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$, $\nu > 0$ — константа эллиптичности. При этом считаем, что

$$c(x) \leqslant -q,\ q \in \mathbb{R},\ |\boldsymbol{b}(x)|^2 \equiv (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \leqslant b^2 \ \text{ в } \Omega,\ b = \operatorname{ess\,sup}\big\{|\boldsymbol{b}(x)| \mid x \in \Omega\big\}.$$

Для этого оператора рассматривается задача на собственные значения

$$\mathcal{L}w + \lambda w = 0, \quad x \in \Omega; \qquad Bw = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{18}$$

где на границе, как и выше, заданы краевые условия первого или третьего (второго) рода.

В параграфе 13 доказано, что все собственные значения задачи (18) и других, более общих краевых задач для эллиптического оператора $\mathcal{L}$, лежат во множестве $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{C}_\lambda$, которое может быть задано неравенствами

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} \alpha \geqslant \dfrac{\nu}{b^2}\,\beta^2 - |\beta| + q, & \text{если } |\beta| \geqslant \dfrac{b^2}{2\nu}; \\ \alpha \geqslant q - \dfrac{b^2}{4\nu}, & \text{если } |\beta| \leqslant \dfrac{b^2}{2\nu}. \end{cases} \tag{19}$$

Этот результат, первоначально полученный автором методами дифференциальных уравнений, оказалось удобнее и короче доказывать на языке полуторалинейных форм.

В унитарном пространстве V со скалярным произведением $(f,g)_V$ и нормой $\|f\|_V$ рассмотрим две полуторалинейные формы $\mathcal{L}_0\big(f,g\big)$ и $\mathcal{Q}\big(u,v\big)$ с областями определения $D\big(\mathcal{L}_0\big)\times D\big(\mathcal{L}_0\big)$ и $D\big(\mathcal{Q}\big)\times D\big(\mathcal{Q}\big)$ такими, что $D\big(\mathcal{L}_0\big) \subseteq D\big(\mathcal{Q}\big) \subseteq V$. Будем предполагать, что форма $\mathcal{L}_0$ является эрмитовой, т. е.

$$\forall f,\, g \in D\big(\mathcal{L}_0\big) \qquad \mathcal{L}_0\big(f,g\big) = \overline{\mathcal{L}_0\big(g,f\big)} \tag{20}$$

и, кроме того, найдутся числа $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ такие, что для всех элементов $f \in D\big(\mathcal{L}_0\big)$ с нормой $\big\|f\big\|_V = 1$ справедлива оценка

$$\mathcal{L}_0\big(f,f\big) \geqslant p\,\big|\mathcal{Q}\big(f,f\big)\big|^2 + q\,\big(f,f\big)_V \tag{21}$$

Рассмотрим возмущённую форму $\mathcal{L}(f,g) = \mathcal{L}_0(f,g) + \mathcal{Q}(f,g)$ с областью определения $D(\mathcal{L}) \times D(\mathcal{L})$, где $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}_0)$. Множество значений, которые принимает функция $\mathcal{L}(f,f)$, когда $f \in D(\mathcal{L})$, $\|f\|_V = 1$, будем называть числовой областью значений формы $\mathcal{L}$ и обозначать $\Theta(\mathcal{L})$ (Т. Като[13]). Собственным значением формы $\mathcal{L}(f,g)$, как обычно, называется число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что существует ненулевой элемент $h \in D(\mathcal{L})$, для которого выполнено равенство $\mathcal{L}(h,g) = \lambda(h,g)_V$ при любом элементе $g \in D(\mathcal{L})$. Отметим, что всякое собственное значение $\lambda \in \Theta(\mathcal{L})$. В диссертации установлена теорема о расположении на комплексной плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ числовой области значений некоторого класса полуторалинейных форм (см. теорему 20 на стр. 106 диссертации). Из неё в качестве следствия получена теорема о расположении на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ собственных значений достаточно широкого класса линейных (не обязательно эллиптических) операторов (см. теорему 21 на стр. 107). Несколько упрощённый вариант отмеченной теоремы формулируется так.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия (20), (21). Тогда числовая область значений $\Theta(\mathcal{L})$ квадратичной формы $\mathcal{L}(f,f)$ лежит во множестве*

$$\mathcal{D}_0(p,q) \equiv \bigcap_{\varepsilon \in (0,p]} \mathcal{D}(\varepsilon; p, q)\,, \qquad \text{где семейство множеств } \mathcal{D} \text{ имеет вид}$$

$$\mathcal{D}(\varepsilon; p, q) \equiv \Big\{ \lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \mid \alpha \geqslant (p-\varepsilon)|\beta|^2 - \frac{1}{4\varepsilon} + q \Big\}.$$

Множество $\mathcal{D}_0$ находится прямым вычислением и совпадает с заданным в (19), если в последнем обозначить $p = \nu/b^2$, оно изображено на рисунке 1, стр. 25. На этом же рисунке приведена граница множества $\mathcal{D}$ (например, при $\varepsilon = p/2$) — это известная парабола Карлемана (или Гепперта–Карлемана, см. H. Geppert[14], T. Carleman[15]). Видно, что $\mathcal{D}_0$ лежит внутри каждого из множеств $\mathcal{D}$. Приведены примеры (см. при-

[13]Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
[14]Mathematische Annalen. — 1927. – **98**, 2, 264–272.
[15]Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-Phys. Klasse. — 1936. – **88**, 119–132.

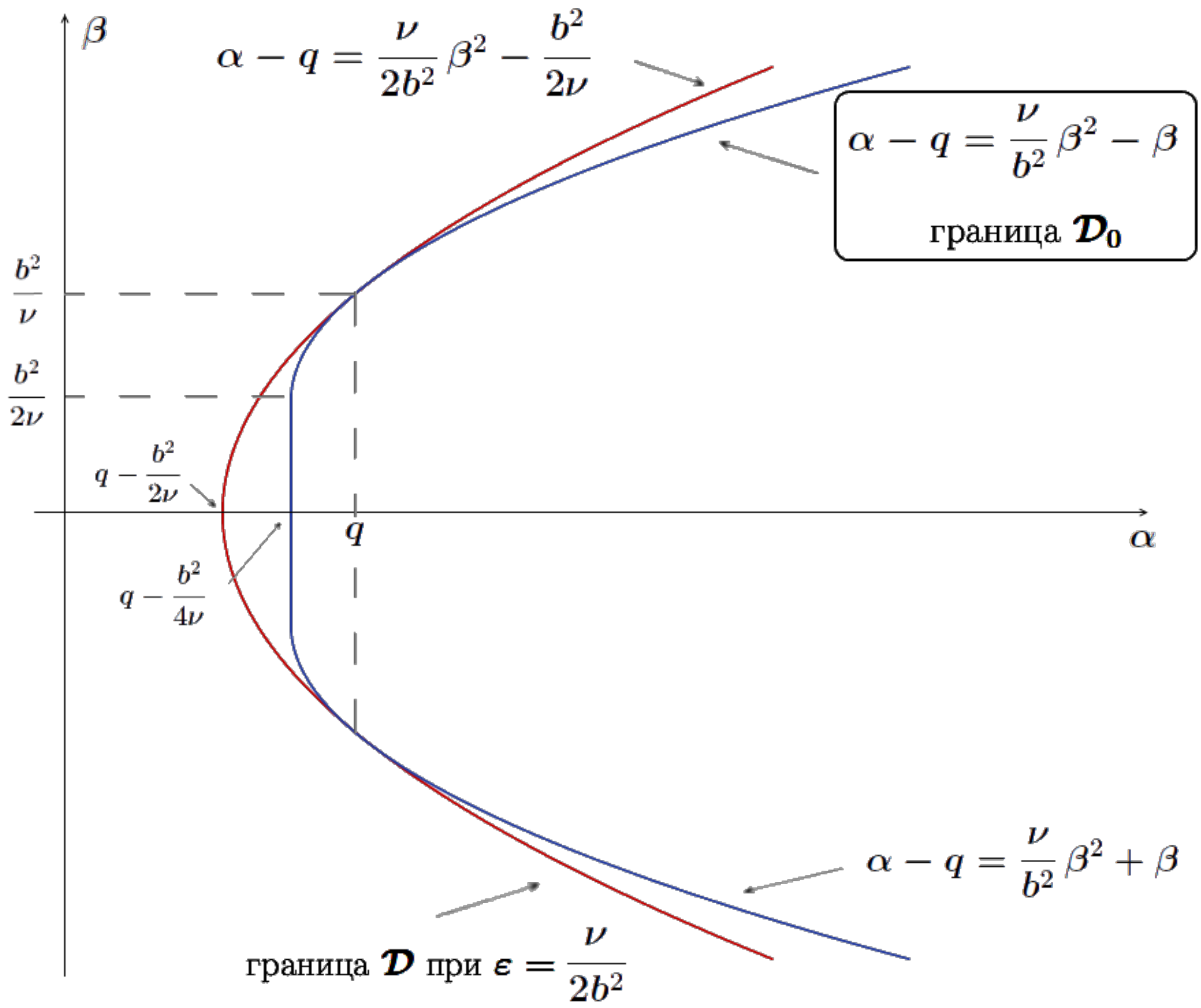

Рис. 1: Парабола Гепперта–Карлемана и граница множества $\mathcal{D}_0$ ($p = \nu/b^2$).

меры 13.1, 13.2 на стр. 104, показывающие асимптотическую «точность» найденного множества $\mathcal{D}_0$, один из них — это пример задачи Дирихле в круге с комплексными собственными значениями.

Пример 0.1. В круге $D = \{(x, y)\,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ рассмотрим задачу

$$\Delta w + y w_x - x w_y + \lambda w = 0, \quad (x, y) \in D; \quad w(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Переходя к полярным координатам, найдём её собственные функции и собственные значения

$$w_{n,k}(r, \varphi) = J_n(\gamma_k(n) r) \exp(\pm i n \varphi), \quad \lambda_{n,k} = \gamma_k^2(n) \pm i n;$$

здесь $k \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $J_n(\gamma)$– функция Бесселя порядка n, а $\gamma_k(n)$– положительные корни уравнения $J_n(\gamma) = 0$, занумерованные в порядке возрастания. Функции $w_{n,k}$ аналитические в $\mathbb{R}^2$, а система $\{w_{n,k}\}$ полна и ортогональна в $L_2(D)$. Из последнего следует, что $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$ — множество всех собственных значений задачи.

Пример 0.1 эллиптического оператора с условиями Дирихле, имеющего комплексные собственные значения позволил, в свою очередь, дать примеры неединственности решения в линейных обратных задачах с финальным наблюдением для параболических и эллиптических уравнений в случае, когда область — это круг.

Пример 0.2. Возьмём одно из комплексных собственных значений примера 0.1 $\lambda = \gamma^2 + i$, где γ первый положительный корень уравнения $J_1(x) = 0$. В единичном круге D рассмотрим обратную задачу, состоящую в нахождении пары функций $\{w(x, y, t), p(x, y)\}$ из условий

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + x w_y - y w_x - (\gamma^2 - \zeta) w = e^{-\zeta t} p & \text{в } D \times [0, 2\pi], \\ w\big|_{t=0} = w\big|_{t=2\pi} = 0 \quad \text{в } D, \qquad w = 0 & \text{на } \partial D \times [0, 2\pi], \end{cases} \tag{22}$$

где $\zeta \geqslant 0$ некоторое фиксированное число. Переходя к полярным координатам, непосредственной проверкой убеждаемся, что пара комплекснозначных функций

$$w = i J_1(\gamma r) e^{-\zeta t} \left(e^{i(\varphi - t)} - e^{i\varphi} \right) \quad \text{и} \quad p = J_1(\gamma r) e^{i\varphi} \tag{23}$$

есть решение однородной обратной задачи (22). Функция $p(x, y)$ является вещественно аналитической при $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, как собственная функция задачи Дирихле для эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами. Следовательно и функция $w(x, y, t) \equiv ie^{-\zeta t}(e^{-it} - 1)p(x, y)$ является аналитической по переменным $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а поэтому уравнение выполнено во всём пространстве переменных (x, y, t). В частности, это решение и все его производные принадлежат пространству Гёльдера и выполнены условия согласования всех порядков. Действительная и мнимая части решения (23) дают две пары вещественных решений

$$\begin{cases} w_1 = J_1(\gamma r)e^{-\zeta t}[\sin\varphi - \sin(\varphi - t)], \\ p_1 = J_1(\gamma r)\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_2 = J_1(\gamma r)e^{-\zeta t}[\cos(\varphi - t) - \cos\varphi], \\ p_2 = J_1(\gamma r)\sin\varphi, \end{cases}$$

удовлетворяющих тем же свойствам гладкости и уравнению во всём пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, t). Как показано в первой главе, достаточными для единственности решения в задаче (22) являются следующие условия:

$$c_0(x, y) \leqslant 0 \text{ в } D\,; \; h \geqslant 0\,, \; h_t \geqslant 0 \text{ в } D \times (0, T)\,; \; h(x, y, T) > 0 \quad \text{в } D. \quad (24)$$

В обратной задаче (22) функция $h \equiv \exp(-\zeta t) \geqslant \exp(-2\pi\zeta) > 0$ и убывает, а младший коэффициент оператора $c_0(x, y) \equiv \gamma^2 - \zeta \leqslant 0$ при $\zeta \geqslant \gamma^2$. Таким образом требование $h_t \geqslant 0$ в условиях (24) без дополнительных ограничений отброшено быть не может, теряется свойство единственности решения обратной задачи. Вопрос о том, сохраняется ли свойство единственности решения задачи (22), если отбросить условие $h_t \geqslant 0$ в Q, стоял с момента публикаций В. М. Исакова[16], А. И. Прилепко и В. В. Соловьева[5]. Приведённый пример даёт ответ на этот вопрос. Ещё раньше аналогичный вопрос возник в обратных задачах восстановления плотности Ньютонова потенциала[17], соответствующий пример построен и в этом случае.

[16] Докл. АН СССР. — 1982. – Т. 263, № 6. – С. 1296–1299.

[17] Прилепко А. И. Дифференц. уравнения. — 1967. – Т. 3, № 1. – С. 30–44.

Третья глава (§§ 15–18) целиком посвящена задачам восстановления коэффициентов в параболическом уравнении. В параграфе 15 изучается обратная задача восстановления коэффициента уравнения перед u. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0, T]$ рассматривается задача о нахождении функций $\{u(x,t); c(x)\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\rho(x,t)u_t - L_0 u - d(x,t)u = c(x)u + g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{25}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad Bu = \beta(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{26}$$

$$\int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{27}$$

Здесь функции ρ, d, g, u_0, β, μ, χ заданы, равномерно эллиптический оператор L_0 имеет вид

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(x)u\,, \quad c_0(x) \leqslant 0, \tag{28}$$

где $c_0(x)$ дополнительно подчинён условию (E). Заданные функции в соотношениях (25)–(27) удовлетворяют условиям (при некотором, фиксированном здесь $p \geqslant n+1$)

$$(A.2) \qquad \begin{array}{l} a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega});\ \rho,\, \rho_t \in C(\overline{Q});\ b_i \in L_\infty(\Omega);\ c_0 \in L_p(\Omega); \\ d,\, d_t \in L_\infty(Q); \quad \mu \in BV[0,T], \quad \mu(0) = \mu(0+), \\ \mu(t) \not\equiv \mathrm{const} \ \text{ на } \ [0,T]\,, \quad \rho(x,t) \geqslant \rho_0 > 0, \quad (x,t) \in Q\,, \\ c_0(x) \leqslant 0 \quad x \in \Omega\,, \quad \rho_0 = \mathrm{const}. \end{array}$$

Будем предполагать, что имеется функция $\Phi(x,t)$, заданная во всем цилиндре $\overline{Q}$ и такая, что Φ, $\Phi_t \in W_p^{2,1}(Q)$, причём $\Phi(x,0) = u_0(x)$ в Ω, а $B\Phi = \beta(x,t)$ на S. Итак, считаем, что

$$(B.2) \qquad \begin{array}{l} g,\, g_t \in L_p(Q), \quad u_0 \in W_p^2(\Omega), \quad \exists \Phi(x,t): \quad \Phi,\, \Phi_t \in W_p^{2,1}(Q)\,, \\ \Phi(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega\,, \qquad B\Phi(x,t) = \beta(x,t), \quad (x,t) \in S\,. \end{array}$$

Наложим ещё условия гладкости и согласования на функцию $\chi(x)$

$$(C.2) \qquad \chi \in W_p^2(\Omega) \qquad B\chi(x) = l(\beta)(x)\,, \quad x \in \partial\Omega.$$

При условиях гладкости и согласования $(A.2)$, $(B.2)$, $(C.2)$, решение этой задачи ищется в классе

$$u \in W_p^{2,1}(Q), \quad c \in E_- := \big\{v \in L_p(\Omega) \mid v(x) \leqslant 0 \ \text{ в } \Omega\big\},$$

с фиксированным $p \geqslant n+1$. Ранее для таких задач коэффициент $c(x)$ искался в классе ограниченных или даже более гладких функций.

Отдельные результаты для гёльдеровских решений и частного случая финального наблюдения имелись в работах[2,3,7]. В § 15 результаты автора [2], [3] усиливаются и развиваются на нелокальное наблюдение (27), общие краевые условия и «нестационарный» оператор в уравнении (25).

Отдельно рассмотрен случай абсолютно непрерывной меры $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0,T]$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{gathered} d\mu(t) = \omega(t)dt, \text{ где } \omega \in BV[0,T],\ \omega(t) \geqslant 0 \text{ на } [0,T] \text{ и такая, что} \\ \forall x \in \Omega \text{ функция } \pi_0(x,t) := \rho(x,t)\omega(t) + \textstyle\int_0^t d(x,\xi)\omega(\xi)\, d\xi \\ \text{является невозрастающей по переменной } t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{29}$$

Для случая $d\mu(t) = \omega(t)dt$ доказаны такие теоремы.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия (A.2), (B.2), (C.2) и справедливы неравенства*

$$g(x,t) \geqslant 0 \ \text{в } Q, \quad u_0(x) \geqslant 0 \ \text{в } \Omega, \quad \beta(x,t) \geqslant 0 \ \text{на } S, \quad \chi(x) > 0 \ \text{в } \Omega.$$

Тогда решение обратной задачи (25)–(27) единственно в классе $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $c \in E_-$ *при* $p = n+1$.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9 и дополнительно справедливы неравенства*

$$\chi(x) \geqslant \delta > 0, \qquad L_0[l(u^0) - \chi](x) \leqslant 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Тогда существует и притом единственная пара $\{u; c\}$ *– решение обратной задачи (25)–(27), причём это решение обладает свойствами*

$$u_t \in C([0,T]; L_p(\Omega)) \cap W_p^{2,1}(Q_\varepsilon), \quad u \in C([0,T]; W_p^2(\Omega)), \tag{30}$$

$Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$, *а* $c(x) \geqslant -v_0(x)/\chi(x)$, *где* $v_0(x) \equiv |L_0\chi| + l(g) + \rho(x,0)\omega(0)u_0(x)$.

Случаю общего нелокального наблюдения, т. е. когда про $\mu(t)$ известно лишь, что $\mu \in BV[0,T]$ и удовлетворяет условиям (5) посвящены следующие две теоремы.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия (A.2), (B.2), (C.2), μ удовлетворяет условиям (5) и справедливы неравенства*

$$\begin{array}{llll} g(x,t) \geqslant 0, & g_t(x,t) \geqslant 0, & d(x,t) \leqslant 0, & d_t(x,t) \geqslant 0, \ \text{в } Q; \\ u_0(x) \geqslant 0, & \chi(x) > 0 \ \text{в } \Omega; & \beta(x,t) \geqslant 0, & \beta_t(x,t) \geqslant 0 \ \text{на } S. \end{array}$$

Если для некоторого $v_1 \in E_-$ выполнено неравенство

$$L_0 u_0 + (d(x,0) + v_1(x))u_0(x) + g(x,0) \geqslant 0 \quad x \in \Omega,$$

а обратная задача (25)–(27) имеет решение $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $c \in E_-$, удовлетворяющее неравенству $c \geqslant v_1$, то это решение единственно в классе $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $c \in E_-$ при $p = n+1$.

Теорема 12. *Пусть выполнены условия (A.2), (B.2), (C.2), μ удовлетворяет условиям (5) и справедливы неравенства*

$$\begin{array}{llll} g(x,t) \geqslant 0, & g_t(x,t) \geqslant 0, & d(x,t) \leqslant 0, & d_t(x,t) \geqslant 0, \ \text{в } Q; \\ u_0(x) \geqslant 0, & \chi(x) \geqslant \delta > 0 \ \text{в } \Omega; & \beta(x,t) \geqslant 0, & \beta_t(x,t) \geqslant 0 \ \text{на } S; \\ \multicolumn{4}{l}{L_0 u_0 + [d(x,0) - v_0(x)\chi^{-1}(x)]u_0(x) + g(x,0) \geqslant 0,} \\ \multicolumn{4}{l}{L_0[l(u^0) - \chi](x) \leqslant 0 \quad \text{в } \Omega,} \end{array}$$

где $v_0(x) \equiv |L_0\chi| + l(g)$. Тогда существует и притом единственная пара $\{u; c\}$ – решение обратной задачи (25)–(27), причём $u(x,t)$ обладает дифференциальными свойствами (30), а функция $c(x)$ удовлетворяет неравенству $c(x) \geqslant -v_0(x)/\chi(x)$ в Ω.

Условия этих теорем не содержат ограничений на нормы заданных функций, а имеют вид достаточно легко проверяемых, односторонних неравенств типа положительности и монотонности. В теоремах 10, 12 для искомого коэффициента $c(x)$ выписывается оценка снизу, а для функции $u(x,t)$ устанавливаются свойства дополнительной гладкости.

При выполнении условий теорем 10 или 12 предложен итерационный процесс нахождения решения $c(x)$, обоснована его сходимость (см. следствие 15.1 на стр. 134), что может быть полезно с точки зрения приложений. В конце параграфа 15 приведён ряд примеров показывающих, что класс данных задачи для которого выполнены условия доказанных теорем достаточно широк. Кроме того, приведён пример обратной коэффициентной задачи, имеющей неединственное решение (см. примеры 15.1–15.3 на стр. 138–139 диссертации). Все эти примеры являются новыми, ранее не встречались даже в случае финального наблюдения.

Параграф 16 посвящён задаче восстановления векторного коэффициента $\vec{b}(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$, входящего в слагаемое $(\vec{b}(x), \nabla u)$ линейного параболического уравнения, где $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0,T]$ и параболической границей $\Gamma := S \cup \{(x,0) \mid x \in \overline{\Omega}\}$ рассматривается задача нахождения пары функций $\{u(x,t); \vec{b}(x)\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\rho(x,t)u_t - L_1 u(x,t) - (\vec{b}(x), \nabla u) - d(x,t)u = g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{31}$$

$$u(x,t) = \Phi(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma, \tag{32}$$

$$\int_0^T u(x,t)\boldsymbol{\omega}(t)\,dt = \boldsymbol{\chi}(x), \quad x \in \Omega. \tag{33}$$

Здесь ρ, d, g, Φ, $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t))^T$, $\boldsymbol{\chi}(x) = (\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x))^T$ заданные функции, L_1 – равномерно эллиптический оператор вида:

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j \quad \text{с коэффициентами } a_{ij}(x) = a_{ji}(x),$$

а $\vec{b}(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$ искомый векторный коэффициент. Условие интегрального (векторного) переопределения (33) следует понимать как систему равенств:

$$\int_0^T u(x,t)\omega_i(t)\,dt = \chi_i(x) \quad \text{в } \Omega \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем считать, что известные функции в соотношениях (31)–(33) удовлетворяют условиям:

$$(A.3) \qquad \begin{aligned} &a_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega});\ \rho \in C(\overline{Q}),\ \rho_t \in L_\infty(Q)\,;\ d,\ g \in L_\infty(Q)\,; \\ &a_0|\xi|^2 \leqslant \textstyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant a_1|\xi|^2, \quad 0 < \rho_0 \leqslant \rho(x,t) \leqslant \rho_1\,; \\ &|\rho_t(x,t)| \leqslant K_\rho,\ |d(x,t)| \leqslant K_d,\ |g(x,t)| \leqslant K_g,\ (x,t) \in Q\,, \end{aligned}$$

где a_0, a_1, ρ_0, ρ_1 — это $const > 0$, а постоянные K_ρ, K_d, K_g — неотрицательны.

Относительно функции граничных данных $\Phi(x,t)$, как и выше, будем предполагать, что она задана во всем цилиндре $\overline{Q}$ и принадлежит $W_p^{2,1}(Q)$ при некотором, фиксированном далее $p \geqslant n+1$. Тогда по теореме вложения пространство $W_p^{2,1}(Q) \subset C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$. Итак, считаем, что

$$
(B.3) \qquad
\begin{aligned}
&\Phi(x,t) \in W_p^{2,1}(Q)\,,\ p \geqslant n+1\,, \quad |\Phi(x,t)| \leqslant K_\Phi,\ (x,t) \in \Gamma;\\
&\boldsymbol{\omega}(t) \in \boldsymbol{W}_1^1(0,T), \quad \|\boldsymbol{\omega}\|_{1,(0,T)}^{(1)} = K_{\boldsymbol{\omega}}\,, \quad \boldsymbol{\chi}(x) \in \boldsymbol{W}_\infty^2(\Omega)\,,\\
&\|\boldsymbol{\chi}\|_{\infty,\Omega}^{(2)} = K_{\boldsymbol{\chi}}\,; \quad l(\Phi)(x) = \boldsymbol{\chi}(x), \quad x \in \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим матрицу $H(x) = (h_{ij}(x))$ с элементами $h_{ij}(x) = \partial\chi_i(x)/\partial x_j$, т.е. матрицу i-ой строчкой которой является вектор $\nabla\chi_i(x)$. В силу условия $(B.3)$ все элементы матрицы $H(x)$ ограничены. В пространстве столбцов $\boldsymbol{E} := \big(L_\infty(\Omega)\big)^n$ введём оператор $\mathcal{H} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ по правилу $\mathcal{H}\boldsymbol{b} := H(x)\boldsymbol{b}(x)$, который определён на всем $\boldsymbol{E}$, линеен и ограничен, т.е. $\mathcal{H} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{E})$. Его норма вычисляется через элементы матрицы $H(x)$. Наложим ещё условие на $\boldsymbol{\chi}(x)$:

$$
(C.3) \qquad
\begin{aligned}
&\text{Предположим, что существует } \mathcal{H}^{-1} \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{E}),\ \text{т.е.}\\
&\text{для каждого}\, x \in \overline{\Omega}\ \text{ существует матрица }\ H^{-1}(x)\\
&\text{с ограниченными элементами; при этом }\ \|\mathcal{H}^{-1}\| = K_H^* < \infty.
\end{aligned}
$$

При выполнении этих условий решение задачи ищется в классе функций $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $\vec{b} \in \big(L_\infty(\Omega)\big)^n$ с показателем $p \geqslant n+1$.

Основные результаты § 16 содержатся в теоремах 29–31 (см. стр. 144–145 диссертации) и дают достаточные условия существования и единственности решения. Приведём один из доказанных результатов.

Теорема 13. *Пусть выполнены условия (A.3), (B.3), (C.3). Тогда обратная задача (31)–(33) имеет решение* $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $\vec{b} \in \big(L_\infty(\Omega)\big)^n$.

Часть условий отмеченных теорем не относится к разряду легко проверяемых, поэтому ключевую роль играет построение примеров обратных задач, для которых можно гарантировать выполнение условий этих теорем. Этому вопросу посвящён пункт 16.5 (см. стр. 149–153), где показано, что при $n = 2$ для некоторого класса задач в круге условия теорем выполнены при достаточно малом диаметре этого круга.

Результаты параграфа 16 опубликованы в работе [17]. Автору неизвестны другие работы с результатами по коэффициентным обратным задачам в близкой постановке в многомерном случае.

Параграфы 17 и 18 посвящены задаче восстановления коэффициента перед u_t. В § 17 рассматривается модельная обратная задача для уравнения теплопроводности, состоящая в нахождении пары функций $\{u(x,t); r(x)\}$ из условий:

$$(1 + r(x))u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{34}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad u(x,t) = \beta(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{35}$$

$$\int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{36}$$

Здесь функции g, u_0, β, μ, χ заданы, Δ — оператор Лапласа. При выполнении соответствующих условий гладкости и согласования, решение этой задачи ищется в классе функций $u \in W_p^{2,1}(Q)$ $(p \geqslant n+1)$, $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geqslant 0$ в Ω. Такое модельное уравнение позволяет проанализировать схему исследования и получить наиболее простые условия разрешимости задачи в этом, важном для приложений, частном случае.

В диссертации отдельно рассмотрен случай интегрального наблюдения для гладкой весовой функции $\omega(t)$, который ранее не изучался. Для него удалось установить теорему об однозначной разрешимости обратной задачи при более слабых ограничениях на заданные функции. Будем считать, что выполнены следующие условия гладкости и согласования

$$(A.4) \quad \begin{aligned} & g,\, g_t \in L_\infty(Q);\ \Delta u_0, \Delta\chi \in L_\infty(\Omega);\ \exists\, \Phi(x,t):\ \Phi,\, \Phi_t \in W_\infty^{2,1}(Q)\,, \\ & \Phi(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \Omega, \quad \Phi(x,t) = \beta(x,t) \ \text{ на } S; \\ & \omega \in C^1[0,T], \quad l(1) \equiv \textstyle\int_0^T \omega(t) dt = 1. \end{aligned}$$

$$(B.4) \qquad u_0(x) = \beta(x,0)\,, \qquad l(\beta)(x) = \chi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Важную роль в разрешимости играют следующие константы

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = \min_S\{\beta_t(x,t)\}, \quad \varkappa_0 = \operatorname*{ess\,inf}_\Omega\{\Delta u_0(x) + g(x,0)\}, \\
&\varkappa_1 = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega\{\Delta\chi(x) + l(g)(x)\},
\end{aligned}
\tag{37}
$$

а также неравенства

$$
\begin{aligned}
&g \geqslant 0,\ g_t \geqslant 0 \ \text{ в } Q; \qquad u_0(x) \geqslant 0 \ \text{ в } \Omega; \\
&\beta \geqslant 0,\ \beta_t \geqslant 0 \ \text{ на } S; \quad \omega(t) \geqslant 0,\ \omega'(t) \leqslant 0 \ \text{ на } [0,T];
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\beta_0 > 0, \qquad \varkappa_0 > 0, \qquad \varkappa_1 \leqslant \varkappa_0. \tag{39}
$$

Обозначим $u^0(x,t)$ решение прямой задачи (34), (35) с $r(x) \equiv 0$. Для задачи с интегральным наблюдением доказана

Теорема 14. *Пусть выполнены условия (A.4), (B.4), справедливы неравенства (38), (39) и*

$$
\Delta[l(u^0) - \chi](x) \leqslant 0 \ \text{ в } \Omega. \tag{40}
$$

Тогда существует и притом единственная пара $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geqslant 0$ *в* Ω *– решение обратной задачи (34)–(36), причём* $u(x,t)$ *обладает следующими свойствами дополнительной гладкости*

$$
u_t \in C([0,T]; L_p(\Omega)),\ u \in C([0,T]; W_p^2(\Omega)) \ \text{ при } p \geqslant n+1\,, \tag{41}
$$

а функция $r(x)$ *удовлетворяет оценке*

$$
r(x) \leqslant M_1 = \max\{0, \varkappa_0/\beta_0 - 1\}.
$$

Обратная задача восстановления коэффициента $r(x)$ с общим наблюдением вида (36), в котором функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,T]$, ранее не исследовалась, все результаты здесь являются новыми. Для обратной задачи (34)–(36) с функцией $\mu \in BV[0,T]$ будем предполагать

$$
(A.5) \qquad
\begin{aligned}
&g,\ g_t \in W_\infty^{2,1}(Q);\ \Delta u_0, \Delta\chi \in L_\infty(\Omega);\ \exists\, \Phi(x,t): \\
&\Phi,\ \Phi_t,\ \Phi_{tt} \in W_\infty^{2,1}(Q), \ \text{ причём выполнены условия:} \\
&\Phi(x,0) = u_0(x) \ \text{ в } \Omega, \quad \Phi = \beta \ \text{ на } S; \\
&\mu \in BV[0,T], \quad \mu(0) = \mu(0+), \quad \mu(t) \not\equiv \text{const}.
\end{aligned}
$$

$$
(B.5)\quad \begin{aligned} & u_0(x) = \beta(x,0)\,, \qquad l(\beta)(x) = \chi(x)\,, \qquad \beta_t(x,0) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ & g(x,0) + \Delta u_0(x) \equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}
$$

Важную роль в разрешимости задачи играют условия (5) на функцию $\mu(t)$, а также неравенства

$$
\begin{aligned} & g \geqslant 0,\ g_t \geqslant 0,\ g_{tt} \geqslant 0 \text{ в } Q;\ u_0(x) \geqslant 0 \ \text{ в } \Omega; \\ & \beta \geqslant 0,\ \beta_t \geqslant 0,\ \beta_{tt} \geqslant 0 \ \text{ на } S. \end{aligned} \tag{42}
$$

Введём следующие константы

$$
\begin{aligned} & \beta_1 = \min_S \{\beta_{tt}(x,t)\}, \quad \gamma_0 = \min_{\overline{\Omega}} \{g_t(x,0)\}, \\ & \varkappa_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} \{\Delta\chi(x) + l(g)(x)\}, \quad \delta_0 = l(t) = \int_0^T t\, d\mu(t) \end{aligned} \tag{43}
$$

и предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$
\beta_1 > 0, \qquad \gamma_0 > 0, \qquad \varkappa_1 \leqslant \gamma_0\, \delta_0. \tag{44}
$$

При этих предположениях для обратной задачи (34)–(36) доказана

Теорема 15. *Пусть выполнены условия (A.5), (B.5), (5), справедливы неравенства (42), (44) и (40).*

Тогда существует и притом единственная пара $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geqslant 0$ в Ω – решение обратной задачи (34)–(36), причём $u(x,t)$ обладает свойствами дополнительной гладкости (41), а функция $r(x)$ удовлетворяет оценке

$$
r(x) \leqslant M_2 = \max\{0, \gamma_0/\beta_1 - 1\}.
$$

Даже в случае интегрального и финального наблюдений для модельной задачи (34)–(36), теоремы 14 и 15 (см. также теоремы 33, 34 на стр. 157 и 158 диссертации) дают новые, по сравнению с работами [2], [3], V. Isakov[3], условия однозначной разрешимости обратной задачи. В частности, снято требование нулевых начальных данных, присутствующее в этих работах, найдена явная оценка искомого коэффициента. В заключительном пункте 17.6 приведён широкий класс примеров обратных задач, для которых выполнены условия доказанных теорем, а кроме того показано, что неравенство (40) из теорем 14 и 15 не может быть заменено на противоположное. Результаты § 17 опубликованы в работе [19].

Параграф 18 посвящён задаче в более общей постановке. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0, T]$ рассматривается задача о нахождении пары функций $\{u(x,t); r(x)\}$ из следующих условий:

$$(\rho^0(x,t) + r(x))u_t - L_0 u - d(x,t)u = g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{45}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad Bu = \beta(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{46}$$

$$\int_0^T u(x,t)\, d\mu(t) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \tag{47}$$

Функции ρ^0, g, u_0, β, μ, χ заданы, а равномерно эллиптический оператор L_0 имеет вид (28). Коэффициенты оператора L_0 известные, достаточно гладкие функции. При выполнении соответствующих условий гладкости и согласования, решение ищется в классе функций $u \in W_p^{2,1}(Q)$ (с $p > n+2$) и $r \in L_\infty(\Omega)$, $r(x) \geq 0$ в Ω.

Задача определения коэффициента $r(x)$ перед u_t в «нестационарном» параболическом уравнении (45) ранее не изучалась даже для частных случаев финального и интегрального наблюдений. В связи с этим все дальнейшие ссылки относятся к «стационарным» параболическим уравнениям. Задача с финальным наблюдением в пространствах Гёльдера рассматривалась в работе V. Isakov[3], где требуемая гладкость решения исключала возможность разрывных коэффициентов. В работах [2], [3] автором подобная коэффициентная обратная задача изучалась в пространствах С. Л. Соболева, причём сразу для финального и интегрального наблюдения. В параграфе 18 результаты работ [2], [3] усиливаются и развиваются для случая «нестационарного» уравнения (45), общих краевых условий и более общего переопределения (47), предложен и обоснован итерационный метод нахождения коэффициента $r(x)$ в классе ограниченных функций. Отдельно рассмотрен случай интегрального наблюдения с гладкой весовой функцией $\omega(t)$, для которого приведём здесь основной результат.

Для случая $d\mu(t) = \omega(t)dt$ в переопределении (47), предполагаются выполненными следующие условия гладкости и согласования

$$(A.6)\quad \begin{array}{l} \rho^0 \in C^{0,1}(\overline{Q});\ g,\ g_t,\ d,\ d_t \in L_\infty(Q);\ L_0 u_0, L_0\chi \in L_\infty(\Omega); \\ \exists\, \Phi(x,t):\ \Phi,\ \Phi_t \in W^{2,1}_\infty(Q)\ \text{ для которой выполнены условия:} \\ \Phi(x,0) = u_0(x)\ \text{ в } \Omega, \quad B\Phi(x,t) = \beta(x,t)\ \text{ на } S; \\ \omega \in W^1_1(0,T), \quad l(1) \equiv \int_0^T \omega(t)dt = 1, \quad \rho^0(x,t) \geqslant \rho_0 > 0 \text{ в } \overline{Q}. \end{array}$$

$$(B.6)\qquad Bu_0(x) = \beta(x,0)\,, \qquad l(\beta)(x) = B\chi(x), \quad x \in \partial\Omega\,,$$

Введём следующие константы

$$\begin{aligned} &\varkappa_0 = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega}\{L_0 u_0(x) + d(x,0)u_0(x) + g(x,0)\}, \\ &\varkappa_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\{L_0\chi(x) + l(g)(x)\}, \\ &\beta_1 = \min_{S}\{\beta_t(x,t)\}, \quad \rho_0 = \min_{\overline{Q}}\{\rho^0(x,t)\}, \\ &\rho_1 = \max_{\overline{\Omega}}\{\rho^0(x,0)\}, \quad \sigma_1 = \max_{\partial\Omega}\{\sigma(x)\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Важную роль в разрешимости обратной задачи играют неравенства

$$\begin{aligned} &g \geqslant 0,\ g_t \geqslant 0\ \text{ в } Q;\ u_0(x) \geqslant 0\ \text{ в } \Omega;\ \beta \geqslant 0,\ \beta_t \geqslant 0\ \text{ на } S; \\ &\omega(t) \geqslant 0,\ \omega'(t) \leqslant 0\ \text{ на } [0,T];\ d \leqslant 0, \\ &d_t \geqslant 0,\ (\rho^0\,\omega)'_t + d\,\omega \leqslant 0 \text{ в } Q; \end{aligned} \tag{49}$$

$$\beta_1 > 0, \qquad \varkappa_0 > 0, \qquad \rho_1\varkappa_1 \leqslant \rho_0\varkappa_0; \tag{50}$$

$$\text{либо}\quad c_0(x) + d(x,t) - \rho^0_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad g_t(x,t) \geqslant g_1 > 0 \text{ в } \overline{Q}. \tag{51}$$

Обозначим $u^0(x,t)$ решение прямой задачи (45), (46) с $r(x) \equiv 0$. Для задачи с интегральным наблюдением доказана

Теорема 16. *Пусть выполнены условия гладкости и согласования (A.6), (B.6), справедливы неравенства (49)–(51) и*

$$L_0[l(u^0) - \chi](x) \leqslant 0 \text{ в } \Omega. \tag{52}$$

Тогда существует и притом единственная пара $\{u; r\}$ – решение обратной задачи (45)–(47), причём $u(x,t)$ обладает следующими свойствами дополнительной гладкости

$$u_t \in C([0,T]; L_p(\Omega)) \cap L_\infty(Q),\ u \in C([0,T]; W^2_p(\Omega)) \ \text{ при } p > n+2. \tag{53}$$

Функция $r(x)$ удовлетворяет оценке $r(x) \leqslant M_1 = \max\{0, \varkappa_0/\beta_1 - \rho_1, m_1\}$, в случае $Bu \equiv u$, или оценке $r(x) \leqslant M_2 = \max\{0, \sigma_1\varkappa_0/\beta_1 - \rho_1, m_1\}$, в случае $Bu \equiv \partial u/\partial N + \sigma(x)u$. Здесь $m_1 = 0$, если выполнено первое из неравенств (51), а если выполнено только второе из (51), то

$$m_1 = \frac{\varkappa_0}{g_1} \operatorname*{ess\,sup}_Q \{\rho_t^0 - c_0 - d\} - \rho_1 \equiv \frac{\varkappa_0}{g_1} K_1 - \rho_1.$$

Обратная задача восстановления коэффициента $r(x)$ с переопределением (47), в котором функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$, ранее не исследовалась. Для неё доказана теорема об однозначной разрешимости (см. теорему 37 на стр. 179 диссертации). Даже в случае финального и интегрального наблюдений и «стационарного» параболического уравнения, теоремы 36 и 37 на стр. 178, 179 дают новые, по сравнению с работами [2], [3], V. Isakov[3], условия однозначной разрешимости обратной задачи. В этой задаче рассмотрены общие краевые условия, снято требование нулевых начальных данных, найдена явная оценка искомого коэффициента.

В главе 4 (§§ 19–22) исследуются обратные задачи восстановления граничного условия для уравнения теплопроводности. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{1+\alpha}$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T]$, где $T > 0$, с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times (0, T]$ рассмотрим следующие обратные задачи, сохранив их нумерацию из главы 4.

Задача 1. Найти пару функций $\big\{u(x,t); f(x)\big\}$ из условий

$$u_t - \Delta u = g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{54}$$

$$u(x,0) = a(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{55}$$

$$\partial u/\partial n + \sigma(x)u = h(x,t)f(x) + b(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{56}$$

$$l(u) = \chi(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{57}$$

если функции $g(x,t)$, $a(x)$, $\sigma(x)$, $h(x,t)$, $b(x,t)$, $\chi(x)$ заданы, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_m)$. В главе 4 выражение $l(u)$ имеет один из следующих видов:

$$\text{либо} \quad l(u) = u(x, t_1), \quad 0 < t_1 \leqslant T, \quad t_1 \text{ — фиксировано,}$$

либо $\quad l(u) = \displaystyle\int_0^T u(x,t)\omega(t)\,dt, \quad$ где функция $\quad \omega \in L_1(0,T)$ — задана.

Под решением обратной задачи 1 понимается пара функций $u(x,t)$ и $f(x)$, если $u \in C^{2,1}(Q)$, $f \in C(\partial\Omega)$ и эти функции удовлетворяют равенствам (54)–(57) в классическом смысле.

Задача 2. Найти пару функций $\big\{u(x,t);\sigma(x)\big\}$ из условий (54), (55), (57) и условия

$$\partial u/\partial n + \sigma(x)u = b(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{58}$$

с заданной функцией $b(x,t)$.

Пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$ будем называть решением обратной задачи 2, если $u \in C^{2,1}(Q)$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geqslant 0$ на $\partial\Omega$ и удовлетворяют равенствам (54), (55), (57), (58) в классическом смысле.

Этим двум обратным задачам посвящены параграфы 19 и 20. Доказаны теоремы 39 и 40 (см. стр. 196) о достаточных условиях единственности решения сформулированных обратных задач. Дадим формулировки основных результатов. Будем предполагать, что выполнены следующие условия гладкости

$$g \in C^{\alpha,0}(\overline{Q}), \quad a \in C^1(\overline{\Omega}); \quad h, b \in C(\overline{S}), \tag{59}$$

где $C^{\alpha,0}(\overline{Q})$ обозначено пространство функций $g(x,t)$ непрерывных по Гёльдеру (с показателем α) по x, равномерно в $\overline{Q}$.

Теорема 17. *Пусть выполнены условия гладкости (59), $\sigma \in C(\partial\Omega)$ и справедливы неравенства*

$$\sigma(x) \geqslant 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \omega(t) \geqslant 0 \text{ на } [0,T], \quad l(h) > 0 \quad \text{п.в. на } \partial\Omega,$$

а функция $h(x,t) \geqslant 0$ на S и монотонно не убывает по переменной $t \in [0,T]$. Тогда решение обратной задачи 1 единственно.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия гладкости (59), $a(x) = 0$ в Ω, справедливы неравенства*

$$g(x,t) \geqslant 0 \text{ в } Q, \quad b(x,t) \geqslant 0 \text{ на } S, \quad \chi(x) > 0 \quad \text{п.в. на } \partial\Omega,$$

а функции $g(x,t)$ и $b(x,t)$, кроме того, монотонно не убывают по переменной $t \in [0,T]$. Тогда решение обратной задачи 2 единственно.

Параграфы 21 и 22 посвящены двум другим задачам восстановления граничного условия третьего рода. Здесь искомая функция зависит от переменной t. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^m$ при $m \geqslant 2$, с границей $\partial\Omega \in C^{1+\alpha}$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T]$, где $T > 0$, с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times (0,T]$ рассмотрим следующие задачи.

Задача 3. Найти пару функций $\{u(x,t); f(t)\}$ из условий

$$u_t - \Delta u = g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{60}$$

$$u(x,0) = a(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{61}$$

$$\partial u/\partial n + \sigma u = h(x,t)f(t) + b(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{62}$$

$$\psi(u) = \widetilde{\chi}(t), \quad t \in [0,T], \tag{63}$$

если функции $g(x,t)$, $a(x)$, $\sigma(x,t)$, $h(x,t)$, $b(x,t)$, $\widetilde{\chi}(t)$ заданы, n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Выражение $\psi(u)$ имеет один из следующих видов:

$$\text{либо} \quad \psi(u) = u(x_0,t), \quad x_0 \in \partial\Omega, \quad x_0 \text{ фиксированная точка},$$

$$\text{либо} \quad \psi(u) = \int_{\partial\Omega} u(\xi,t)\nu(\xi)\,dS_\xi, \quad \text{где функция} \quad \nu \in L_1(\partial\Omega) \quad \text{задана.}$$

Под решением обратной задачи 3 понимается пара функций $u(x,t)$ и $f(t)$, если $u \in C^{2,1}(Q)$, $f \in C([0,T])$ и эти функции удовлетворяют равенствам (60)–(63) в классическом смысле.

Задача 4. Найти пару функций $\{u(x,t); \sigma(t)\}$ из условий (60), (61), (63) и условия

$$\partial u/\partial n + \sigma(t)u = b(x,t), \quad (x,t) \in S \tag{64}$$

с известной функцией $b(x,t)$.

Под решением обратной задачи 4 понимается пара функций $u(x,t)$ и $\sigma(t)$, если $u \in C^{2,1}(Q)$, $\sigma \in C([0,T])$ и эти функции удовлетворяют равенствам (60), (61), (63), (64) в классическом смысле.

В параграфах 21, 22 для линейной задачи 3 установлена глобальная теорема 43 (см. стр. 209) о существовании и единственности решения, получена оценка устойчивости. Здесь же для коэффициентной обратной задачи 4 доказана теорема 44 о единственности её решения. Дадим формулировки этих результатов в несколько упрощённом виде.

Решение прямой задачи (60)–(62) с $f(t) \equiv 0$ обозначим $u^0(x,t)$, введём функцию $\chi(t) = \widetilde{\chi}(t) - \psi\big(u^0\big)$ и условия

$$\chi \in C^{1/2}[0,T], \quad \chi(0) = 0 \quad \text{и} \quad F(t) \equiv \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\chi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \in C[0,T]. \quad (65)$$

Норму в соответствующем пространстве $C(\overline{G})$ будем обозначать $\|\cdot\|_G$, где $\overline{G}$ некоторый компакт.

Теорема 19. *Пусть выполнены условия гладкости (59), (65),* $h \in C^{\alpha,0}(\overline{S})$, $\sigma \in C(\overline{S})$, *условия согласования*

$$\psi(u^0)(0) = \widetilde{\chi}(0) \quad \textit{и неравенство} \quad |\psi(h)| > 0 \quad \textit{на} \quad [0,T].$$

Тогда существует и притом единственное решение обратной задачи 3 и справедлива оценка устойчивости:

$$\|f\|_{[0,T]} + \|u - u^0\|_Q \leqslant C\,\|F\|_{[0,T]}.$$

Теорема 20. *Пусть выполнены условия (59) и справедливо неравенство* $\widetilde{\chi}(t) > 0$ *на* $[0,T]$. *Тогда решение обратной задачи 4 единственно.*

Результаты параграфов 19–22 опубликованы в работах [9], [10]. О других работах, содержащих результаты по обратным задачам (с граничным наблюдением) о восстановлении функций переменной x или t, входящих в граничное условие третьего рода автору неизвестно.

Интерес к обратным задачам и близким задачам управления огромен, им посвящены работы следующих учёных: А. Н. Тихонова, А. А. Самарского, В. А. Ильина, М. М. Лаврентьева, Е. И. Моисеева, П. С. Новикова, Ю. С. Осипова, В. А. Садовничего, В. К. Иванова, В. Г. Романова, А. И. Прилепко, В. И. Агошкова, А. М. Алифанова, А. Х. Амирова, Д. С. Аниконова, Ю. Е. Аниконова, А. В. Баева, А. Б. Бакушинского, Н. Я. Безнощенко, М. И. Белишева, Ю. Я. Белова, Ю. М. Березанского, А. Л. Бухгейма, П. Н. Вабищевича, В. Г. Васильева, Ф. П. Васильева, И. А. Васина, М. П. Вишневского, Н. Л. Гольдман, А. В. Гончарского, А. М. Денисова, В. И. Дмитриева, Е. В. Захарова, Н. И. Иванчова, А. С. Ильинского, С. И. Кабанихина, В. Л. Камынина, М. В. Клибанова, А. И. Кожанова, А. Б. Костина, Н. В. Крылова, М. М. Лаврентьева(мл.), А. С. Леонова, Ж.-Л. Лионса, В. И. Максимова, И. В. Мельниковой, В. А. Морозова, Л. П. Нижника, Д. Г. Орловского, С. И. Пискарёва, Б. И. Пташника, С. Г. Пяткова, В. Г. Романова, К. Б. Сабитова, Е. Г. Саватеева, А. Г. Свешникова, А. Л. Скубачевского, В. В. Соловьёва, И. В. Тихонова, А. В. Тихонравова, Д. С. Ткаченко, В. Е. Фёдорова, А. В. Фурсикова, А. Хайдарова, А. Ю. Чеботарева, В. Г. Чередниченко, Б. В. Шабата, С. П. Шишатского, В. П. Шутяева, А. Ю. Щеглова, Ю. С. Эйдельмана, А. Г. Яголы, В. Г. Яхно, A. Ashyralyev, A. V. Balakrishnan, I. Bushuev, J. R. Cannon, M. Choulli, P. Duchateau, B. F. Jones, A. Friedman, D. Guidetti, O. Imanuvilov, V. Isakov, A. Lorenzi, A. G. Ramm, W. Rundell, M. Yamamoto. Достаточно подробные обзоры литературы по обратным задачам имеются в книгах, изданных за последние 15 лет[18,19,3,20,21,22,23,24].

Автор благодарен А. И. Прилепко за всестороннюю поддержку, а всем участникам семинара «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» мех-мата МГУ за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

[18] Denisov A. M. Elements of the theory of inverse problems. – VSP, 1999. – Т. 14.

[19] Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York: Marcel Dekker, 2000.

[20] Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

[21] Choulli M. Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 2009.

[22] Леонов А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. — М.: Либроком, 2010.

[23] Beilina L., Klibanov M. V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. — New York: Springer, 2012.

[24] Ягола А. Г. Обратные задачи и методы их решения : приложение к геофизике. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. — 1992. – Т. 183, № 4. – С. 49 – 68.

2. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I // Сиб. матем. журн. — 1992. – Т. 33, № 3. – С. 146 – 155.

3. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении II // Сиб. матем. журн. — 1993. – Т. 34, № 5. – С. 147 – 162.

4. Прилепко А. И., Костин А. Б. Об управлении процессом теплопроводности 2 // Сб. тр. ВНИИСИ «Управление нелинейными системами». — 1992. – Т. 5, С. 97–108.

5. Прилепко А. И., Костин А. Б. Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений // Матем. заметки. — 1993. – Т. 53, № 1. – С. 89 – 94.

6. Prilepko A. I., Kostin A. B. Control of heat conduction process // Computational Mathematics and Modeling. — 1994. – V. 5, №. 1. – P. 91 – 97.

7. Костин А. Б. Разрешимость одной проблемы моментов и её связь с параболической обратной задачей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн. — 1995. – № 1. – С. 28 – 33.

8. Костин А. Б. Об устойчивости обратных коэффициентных задач для параболических уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1995. – № 6. – С. 62 – 64.

9. Костин А. Б., Прилепко А. И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения I // Дифференц. уравнения. — 1996. – Т. 32, № 1. – С. 113 – 122.

10. Костин А. Б., Прилепко А. И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения II // Дифференц. уравнения. — 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1519 – 1528.

11. Prilepko A. I., Kostin A. B. Boundary control of heat conduction // Computational Mathematics and Modeling. — 1996. – V. 7, № 4. – P. 427 – 430.

12. Костин А. Б. Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Дифференц. уравнения. — 2008. – Т. 44, № 2. – С. 246 – 256.

13. Камынин В. Л., Костин А. Б. Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. — 2010. – Т. 46, № 3. – С. 372 – 383.

14. Костин А. Б. Критерий корректности обратной задачи для параболического уравнения с нелокальным условием наблюдения // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2012. – Т. 1, № 2. – С. 200 – 204.

15. Костин А. Б. О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи // Докл. Акад. Наук. — 2013. – Т. 453, № 2. – С. 138 – 141.

16. Костин А. Б. Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Матем. сборник. — 2013. – Т. 204, № 10. – С. 3 – 46.

17. Камынин В. Л., Костин А. Б. Обратная задача определения n коэффициентов при младших производных в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. — 2014. – Т. 50, № 4. – С. 480 – 491.

18. Костин А. Б. Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений // Журнал вычислит. матем. и матем. физ. — 2014. – Т. 54, № 5. – С. 137 – 151.

19. Костин А. Б. Восстановление коэффициента перед u_t в уравнении теплопроводности по условию нелокального наблюдения по времени // Журнал вычислит. матем. и матем. физ. — 2015. – Т. 55, № 1. – С. 89 – 104.

20. Костин А. Б. Обратная задача определения коэффициента при u в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Дифференц. уравнения. — 2015. – Т. 51, № 5. – С. 596 – 610.