На правах рукописи

Козырев Анатолий Александрович

Одномерные и двумерные редукции уравнений пограничного слоя

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Аксенов Александр Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук,
профессор Зайцев Валентин Федорович,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена»

доктор физико–математических наук,
профессор, ведущий научный сотрудник
Ильичев Андрей Теймуразович,
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Ведущая организация: ФГБУН Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 23 марта 2016 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, 31.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке НИЯУ «МИФИ», а также по ссылке www.ods.mephi.ru/dissertations.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Леонов А.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование свойств и методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений необходимы для разработки и анализа различных математических моделей физических явлений. Существует несколько основных методов построения редукций и поиска точных решений нелинейных уравнений в частных производных: методы группового анализа дифференциальных уравнений (Овсянников (1978)), метод неклассических симметрий (Bluman, Cole (1969)), прямой метод Кларксона–Крускала (Clarkson, Kruskal (1989)), методы функционального (Полянин, Зайцев (2005, 2012)) и обобщенного разделения переменных (Galaktionov, Svirshchevskii (2006)), Пенлеве-анализ (Кудряшов (2004, 2010); Конт, Мюзетт (2011)), метод дифференциальных связей (Сидоров, Шапеев, Яненко (1984)) и др. В частности, хорошо известны так называемые обобщенные автомодельные решения

$$u = f(x)\varphi(\zeta)\,, \qquad \zeta = g(x)y\,.$$

Также широко встречаются решения типа бегущих волн

$$u = \varphi(\zeta) + f(x)\,, \qquad \zeta = y + g(x)\,.$$

Нахождение таких и более сложных решений сводится к решению уравнений с меньшим числом независимых переменных. Конструктивный поиск подобного рода решений позволяют сделать методы группового анализа дифференциальных уравнений.

При всей своей содержательности, методы группового анализа имеют ограниченную область применимости. Они не всегда позволяют найти более общие классы редукций – такие специальные виды решений, которые находятся из уравнений с меньшим числом независимых переменных.

Методы построения редукцией нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения имеют принципиальное значение для поиска точных решений и формулировки тестовых задач, необходимых для верификации и оценки точности численных и асимптотических методов математической физики.

Представляют интерес методы, позволяющие находить широкие классы редукций исследуемого уравнения. В работе Clarkson, Kruskal (1989) был предложен прямой метод поиска редукций, не использующий групповой анализ. В ней было дано применение прямого метода к уравнениям Буссинеска, Бюргерса и

Кортевега–де Фриза. Для уравнения Буссинеска было показано существование редукций, которые нельзя получить с помощью группового анализа. Применение прямого метода к уравнению плоского нестационарного пограничного слоя было реализовано в работе Clarkson, Ludlow, Bassom (2000).

В настоящей работе предложен метод построения редукций уравнений в частных производных (УрЧП) с двумя независимыми переменными к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Также метод был развит для построения редукций УрЧП с тремя независимыми переменными к УрЧП с двумя независимыми переменными и к ОДУ. Изложенный метод является дальнейшим развитием прямого метода Кларксона–Крускала. Он является более простым в применении, не использует технику группового анализа и основан на переходе к инвариантных переменным.

Актуальными являются следующие задачи:

• нахождение редукций уравнения стационарного плоского пограничного слоя к ОДУ (одномерные редукции);

• нахождение редукций уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя к УрЧП с двумя независимыми переменными (двумерные редукции) и к ОДУ (одномерные редукции);

• групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя;

• вопрос о существовании нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера.

Цель работы. Основной целью данной работы является разработка и развитие метода построения редукций, являющегося дальнейшим развитием прямого метода Кларксона–Крускала, демонстрация возможностей метода на примере уравнений плоского стационарного и осесимметричного нестационарного пограничных слоев и сравнение результатов с результатами, полученными с помощью методов группового анализа. Для достижения цели работы были поставлены следующие задачи:

• На основе идеи инвариантности обобщить прямой метод Кларксона–Крускала для уравнения с двумя независимыми переменными.

• Обобщить предложенный метод на случай уравнения с тремя независимыми переменными для получения двумерных и одномерных редукций.

• Найти редукции уравнения плоского стационарного пограничного слоя.

• Найти редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя.

• Исследовать вопрос о существовании нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера, связывающего уравнения нестационарного плоского и осесимметричного пограничных слоев.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложен метод нахождения редукций УрЧП, являющийся развитием прямого метода Кларксона–Крускала, который не использует групповой анализ. Этот метод более прост в использовании, и позволяет эффективно искать редукции к УрЧП с меньшим числом независимых переменных и к ОДУ.
2. Проведена групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. На основе результатов групповой классификации сделан вывод об отсутствии нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера.
3. Для уравнения стационарного плоского пограничного слоя найдены все редукции к ОДУ (одномерные редукции).
4. Для уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя найдены все редукции к УрЧП с двумя независимыми переменными (двумерные редукции) и к ОДУ (одномерные редукции).
5. Показано, что исследуемые уравнения имеют редукции, не получаемые с помощью группового анализа.
6. Для уравнений стационарного плоского и осесимметричного пограничных слоев показана единственность, с точностью до преобразований эквивалентности, преобразования Степанова–Манглера.

Научная новизна.

• Разработан метод построения редукций УрЧП, который является развитием прямого метода Кларксона–Крускала. В основе метода лежит идея введения инвариантных переменных. Он более прост в применении и не использует технику группового анализа.

• Впервые проведена полная групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя по двум произвольным элементам – по градиенту давления и форме обтекаемой поверхности. Показано, что ядро операторов симметрии может быть расширено не более чем четырехмерной подалгеброй. Также показано, что ядро операторов симметрии уравнения плоского стационарного пограничного слоя может быть расширено пятимерной подалгеброй. На основе полученных результатов сделан вывод о несуществовании нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера.

• С помощью описанного в работе метода построения редукций решены задачи о нахождении редукций уравнений стационарного плоского и нестационарного осесимметричного пограничных слоев.

• Впервые с групповой точки зрения изучен вопрос о единственности преобразования Степанова–Манглера, связывающего уравнения стационарных плоского и осесимметричного пограничных слоев. Построение такого преобразования как изоморфизма между допускаемыми указанными уравнениями алгебрами Ли операторов симметрии позволяет сказать, что такое преобразование единственно с точностью до преобразований эквивалентности.

Научная и практическая значимость работы. Метод, описанный в работе, может быть применен к другим нелинейным уравнениям математической физики с целью получения новых точных решений и анализа соответствующих математических моделей. Результаты групповой классификации уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя могут быть применены для решения задач гидродинамики. Найденные редукции рассматриваемых уравнений могут быть использованы для получения новых точных решений и для верификации численных и асимптотических методов.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечена

• Использованием общепринятых математических моделей.

• Использованием строгих аналитических методов исследования.

• Сравнением полученных результатов с известными ранее частными результатами.

Апробация работы. Основные результаты работы представлены автором на 5 международных конференциях: 15–я, 16–я и 17–я Международная конференция «MOGRAN» (Кемер, Турция, 1–6 октября 2012, Уфа, Россия, 28 октября–2 ноября 2013, Кадис, Испания, 8–12 сентября 2014); Международная конференция «Geometrical Structures in Integrable Systems» (Москва, Россия, 30 октября–2 ноября 2012); Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» – VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева. (Новосибирск, Россия, 7–11 сентября 2015); и на 7 российских конференциях: VI Всероссийская конференция, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» (Абрау-Дюрсо, 10–16 сентября 2012), Научная сессия НИЯУ МИФИ–2013 и Научная сессия НИЯУ МИФИ–2015; Конференция «Методы математической физики и математическое моделирование физических процессов» (Москва, Россия, 2013 и 2015); Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция «Механика», подсекция «Газовая и волновая динамика» (Москва, Россия, 2014); Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, Россия, 2014); XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, Россия, 20–24 августа 2015); Научный семинар кафедры прикладной математики НИЯУ МИФИ «Проблемы современной математики» под руководством Н.А. Кудряшова.

Личный вклад. Автором работы разработан новый метод построения редукций УрЧП к УрЧП с меньшим числом независимых переменных и к ОДУ. Применение описанного метода к уравнениям плоского стационарного и осесимметричного нестационарного пограничных слоев с соответствующим анализом всех полученных систем уравнений проведено лично автором. Полная групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя выполнена лично автором. Научному руководителю принадлежат постановки задач и обсуждение результатов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 18 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 14 – в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Список литературы содержит 94 наименования. Полный объем диссертации составляет 148 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассматривается с групповой точки зрения известное в гидродинамике преобразование Степанова–Манглера, связывающее уравнения плоского и осесимметричного стационарных пограничных слоев. Вопрос о единственности такого преобразования, а также вопрос о существовании нестационарного аналога такого преобразования, разрешается с помощью групповой классификации исследуемых уравнений.

В разделе 1.1 рассматривается уравнение плоского стационарного пограничного слоя

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} - u_{yyy} - p(x) = 0\,, \tag{1}$$

описывающее стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое. Здесь $u = u(x,y)$ – функция тока, $p(x)$ – заданный градиент давления. Раздел 1.1. посвящен групповой классификации уравнения (1) по произвольному элементу $p(x)$. Доказана следующая

Теорема 1. *Уравнение* (1) *при произвольной функции* $p(x)$ *допускает бесконечномерное ядро операторов симметрии с базисом*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_\infty = b(x)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

где функция $b(x)$ *произвольна. Расширение ядра возможно только при следующих* $p(x)$: $p(x) = \mathrm{const}$; $p(x) = \alpha(x+\beta)^\gamma$; $p(x) = \alpha\exp(\beta x)$. *Наибольшее расширение ядра операторов симметрии реализуется при* $p(x) = 0$ *с расширением ядра трехмерной подалгеброй Ли.*

В разделе 1.2 рассматривается групповая классификация уравнения осесимметричного стационарного пограничного слоя

$$u_y u_{xy} - \left(u_x + \frac{r'(x)}{r(x)}u\right)u_{yy} - u_{yyy} - p(x) = 0\,, \tag{2}$$

описывающего стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном пограничном слое на поверхности обтекаемого тела, форма которого задана функцией $r(x)$. Доказана

Теорема 2. *Уравнение* (2) *при произвольных функциях* $p(x)$, $r(x)$ *допускает бесконечномерное ядро операторов симметрии с базисом*

$$X_1 = \frac{1}{r(x)}\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_\infty = b(x)\frac{\partial}{\partial y}\,,$$

где функция $b(x)$ *произвольна. Расширение ядра возможно только при следующих* $p(x)$: $p(x) = 0$; $p(x) = \alpha r^2(x)$; $p(x) = \alpha r^2(x)\left(\int_0^x r^2(s)ds + \beta\right)^\gamma$; $p(x) = \alpha r^2(x)\exp\left(\beta\int_0^x r^2(s)ds\right)$. *Наиболее широкое расширение ядра операторов симметрии реализуется при* $p(x) = 0$ *с расширением ядра трехмерной подалгеброй Ли.*

В разделе 1.3 для случая $p(x) = 0$ проведено построение преобразования, связывающего уравнения (2) и (1), как построение изоморфизма между допускаемыми этими уравнениями алгебрами Ли операторов симметрии. В этом случае алгебры Ли допускаемых уравнениями (2) и (1) операторов симметрии представимы в виде $L = L_4 \oplus L_\infty$, где L_4 является четырехмерной подалгеброй Ли, а L_∞ – бесконечномерным идеалом. Для нахождения преобразования

$$x \to \bar{x}(x,y,u)\,, \qquad y \to \bar{y}(x,y,u)\,, \qquad u \to \bar{u}(x,y,u)$$

проведено построение изоморфизма между четырехмерными подалгебрами L_4 и $\bar{L}_4$, базисы которых имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\int_0^x r^2(s)ds}{r^2(x)}\frac{\partial}{\partial x} + y\left(1 - \frac{r'(x)\int_0^x r^2(s)ds}{r^3(x)}\right)\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{r'(x)\int_0^x r^2(s)ds}{r^3(x)}\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&X_2 = \frac{1}{r^2(x)}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{r'(x)}{r^3(x)}y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{r'(x)}{r^3(x)}u\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad X_3 = y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u}\,,\\
&X_4 = \frac{1}{r(x)}\frac{\partial}{\partial u}\,, \qquad L_4 =< X_1\,, X_2\,, X_3\,, X_4 >\,, \qquad (3)\\
&\bar{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\,, \qquad \bar{X}_2 = \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\,, \qquad \bar{X}_3 = \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\,,\\
&\bar{X}_4 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\,, \qquad \bar{L}_4 =< \bar{X}_1\,, \bar{X}_2\,, \bar{X}_3\,, \bar{X}_4 >\ . \qquad (4)
\end{aligned}$$

Показано, что существует всего два изоморфизма, связывающих алгебры Ли (3) и (4). Первый из них реализуется преобразованием

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = c_1 u r(x) + c_2\,, \qquad c_1 = \mathrm{const} \neq 0\,,\\
&\bar{y} = f(\bar{x}) + \frac{c_3}{r(x)y}, \quad c_3 = \mathrm{const} \neq 0\,,\\
&\bar{u} = c_4\int_0^x r^2(s)ds + c_5\,, \qquad c_4 = \mathrm{const} \neq 0\,,
\end{aligned}$$

которое, не связывает уравнения (2) и (1). Второй изоморфизм реализуется преобразованием

$$\begin{aligned}
&\bar{x} = c_1\int_0^x r^2(s)ds + c_2\,, \qquad c_1 = \mathrm{const} \neq 0\,,\\
&\bar{u} = c_3 u r(x) + c_4\,, \qquad c_4 = \mathrm{const} \neq 0\,,\\
&\bar{y} = c_5 y r(x) + f(\bar{x})\,, \qquad c_5 = \mathrm{const}\,,
\end{aligned}$$

которое является преобразованием Степанова–Манглера, с точностью до преобразований эквивалентности уравнения (1), при $c_5 = c_1/c_3$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Преобразование Степанова–Манглера является единственным, с точностью преобразований эквивалентности, преобразованием, переводящим уравнение* (2) *в уравнение* (1) *при всех* $r(x)$.

Аналогичным образом разрешается вопрос о существовании нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера, то есть взаимно однозначного преобразования, связывающего при всех $r(x)$ уравнение нестационарного плоского пограничного слоя

$$u_{ty} + u_y u_{xy} - u_x u_{yy} - u_{yyy} - p(x,t) = 0 \tag{5}$$

и уравнение нестационарного осесимметричного пограничного слоя

$$u_{ty} + u_y u_{xy} - \left(u_x + \frac{r'(x)}{r(x)}u\right) u_{yy} - u_{yyy} - p(x,t) = 0\,. \tag{6}$$

Для удобства анализа уравнения (6) был осуществлен переход к переменным Степанова–Манглера, в которых уравнение (6) можно записать в виде

$$r(x) u_{ty} + u_y u_{xy} - u_x u_{yy} - u_{yyy} - p(x,t) = 0\,. \tag{7}$$

Далее уранение (7) принимается в качестве исходного. Предполагается, что в уравнении (7) $r'(x) \neq 0$.

В разделе 1.4 проведена групповая классификация уравнения (7) по двум произвольным элементам – функциям $r(x)$ и $p(x,t)$. Доказана следующая

Теорема 4. *При произвольных функциях* $r(x)$, $p(x,t)$ *уравнение* (7) *допускает бесконечномерное ядро операторов симметрии вида*

$$X = a(x,t)\frac{\partial}{\partial y} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

где функции $a(x,t)$, $b(x,t)$ *удовлетворяют соотношению* $r(x)a_t(x,t) + b_x(x,t) = 0$. *Наибольшее расширение ядра допускается при* $r(x)$, $p(x,t)$ *вида*

$$r(x) = \alpha(x+\beta)^{-4/3}\,, \qquad p(x,t) = q(t)(x+\beta)^{-5/3}\,,$$

где $\alpha \neq 0$, *а функция* $q(t)$ *произвольна. При этом ядро операторов симметрии расширяется четырехмерной подалгеброй Ли.*

В разделе 1.5 рассмотрено уравнение (5). Доказано следующее

Предложение 1. *Ядро операторов симметрии уравнения* (5) *может быть расширено пятимерной подалгеброй.*

Откуда следует, что нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера не существует.

В разделе 1.6 перечислены основные результаты главы 1.

Во **второй главе** описан развитый в работе метод поиска редукций УрЧП, основанный на введении инвариантных переменных. Под редукцией УрЧП понимается следующее. Пусть дано УрЧП на неизвестную функцию $u = u(x,t)$. Тогда редукцией будем называть решение вида $u = U(x,t,w(z))$, $z = z(x,t)$, после подстановки которого в исходное уравнение получается ОДУ на функцию $w(z)$.

В разделе 2.1. второй главы описан оригинальный метод Кларксона–Крускала в том виде, в котором он был представлен в работе Clarkson, Kruskal (1989) на примере поиска редукций уравнения Буссинеска

$$u_{tt} + \frac{\left(u^2\right)_{xx}}{2} + u_{xxxx} = 0\,. \tag{8}$$

В работе было показано, что без ограничения общности редукции уравнения (8) можно искать в виде

$$u = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z(x,t))\,. \tag{9}$$

Функции $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, $z(x,t)$ подлежат определению. Из условия, что при подстановке (9) в (8) должно получиться ОДУ, можно получить следующую систему уравнений для определения $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, $z(x,t)$

$$\begin{gathered}
\frac{4\beta_x z_x + 6\beta z_{xx}}{\beta z_x^2} = \Gamma_1(z)\,, \qquad \frac{\beta_{xxxx} + 2\alpha_x\beta_x + \alpha\beta_{xx} + \alpha_{xx}\beta + \beta_{tt}}{\beta z_x^4} = \Gamma_2(z)\,, \\
\frac{\beta\left(3z_{xx}^2 + 4z_x z_{xxx}\right) + 12\beta_x z_x z_{xx} + 6\beta_{xx} z_x^2 + \alpha\beta z_x^2 + \beta z_t^2}{\beta z_x^4} = \Gamma_3(z)\,, \\
\frac{\beta z_{xxxx} + 4\beta_x z_{xxx} + 6\beta_{xx} z_{xx} + 4\beta_{xxx} z_x + 2\alpha_x\beta z_x + 2\alpha\beta_x z_x}{\beta z_x^4} + \\
+ \frac{\alpha\beta z_{xx} + 2\beta_t z_t + \beta z_{tt}}{\beta z_x^4} = \Gamma_4(z)\,, \qquad \frac{4\beta_x z_x + \beta z_{xx}}{z_x^4} = \Gamma_5(z)\,, \\
\frac{\alpha_{tt} + \alpha\alpha_{xx} + \alpha_x^2 + \alpha_{xxxx}}{\beta z_x^4} = \Gamma_6(z)\,. \qquad \frac{\beta_x^2 + \beta\beta_{xx}}{\beta z_x^4} = \Gamma_7(z)\,, \qquad \beta z_x^2 = \Gamma_8(z)\,.
\end{gathered} \tag{10}$$

В системе (10) содержатся неопределенные функции $\Gamma_1(z)$, ..., $\Gamma_8(z)$. Для ее решения используется тот факт, что функции $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, $z(x,t)$ определены неоднозначно, а именно с точностью до следующих преобразований

$$\alpha(x,t) \to \alpha(x,t) + \beta(x,t)\Gamma(z)\,, \quad \beta(x,t) \to \beta(x,t)\Gamma(z)\,, \quad z(x,t) \to \Gamma(z)\,. \quad (11)$$

В разделе 2.2 изложен метод поиска редукций УрЧП, в основе которого лежит идея инвариантности. Он является дальнейшим развитием метода Кларксона–Крускала. Вводятся вспомогательные функции $\mu_1(x,t)$, $\mu_2(x,t)$, $\mu_3(x,t)$ по следующим формулам

$$\begin{aligned} &z_t(x,t) = \mu_1(x,t)\, z_x(x,t)\,, \\ &\beta_t(x,t) = \mu_1(x,t)\beta_x(x,t) + \mu_2(x,t)\beta(x,t)\,, \\ &\alpha_t(x,t) = \mu_1(x,t)\alpha_x(x,t) + \mu_2(x,t)\alpha(x,t) - \mu_3(x,t)\,. \end{aligned} \quad (12)$$

Предложение 2. *Вспомогательные функции $\mu_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, введенные по формулам* (12)*, являются инвариантами преобразований* (11)*.*

Каждое из уравнений системы (10) можно заменить на равносильное ему равенство нулю якобиана (по x, t) левой части этого уравнения и функции $z(x,t)$. В результате можно получить $\mathcal{A}$–систему, не содержащую неопределенных функций $\Gamma_i(z)$.

Предложение 3. *$\mathcal{A}$–система инвариантна относительно преобразований* (11)*. $\mathcal{A}$–систему можно переписать в терминах инвариантов $\mu_1(x,t)$, $\mu_2(x,t)$, $\mu_3(x,t)$.*

Переход от системы (10) к $\mathcal{A}$–системе и последующий переход к инвариантам (12) дает следующую систему уравнений, не содержащую неопределенных функций $\Gamma_1(z)\,, \ldots\,, \Gamma_8(z)$

$$\begin{aligned} &2\mu_{2x} + 3\mu_{1xx} = 0\,, \qquad \mu_3 = 6\mu_{2xx} + 4\mu_{1xxx} + 2\mu_1\mu_{1t} - 4\mu_1^2\mu_{1x}\,, \\ &\mu_2 = 2\mu_{1x}\,, \qquad \mu_{1xx} + 4\mu_{2x} = 0\,, \qquad \mu_{2xx} = 0\,, \\ &8\mu_1\mu_2\mu_{1x} - 4\mu_{2xxx} + 2\mu_{3x} - 2\mu_1\mu_{2t} + 2\mu_{1t}\mu_{1x} + 4\mu_1\mu_{1x}^2 - \\ &\qquad\qquad - 2\mu_{1t}\mu_2 - \mu_{1xxxx} - \mu_{2tt} = 0\,, \\ &4\mu_1\mu_{1x}\mu_{2x} + \mu_{3xxx} - \mu_{2tt} + 4\mu_{1x}\mu_{2t} - 2\mu_2\mu_{2t} + 4\mu_{1x}\mu_2^2 - \\ &\qquad\qquad - 2\mu_{1t}\mu_{2x} - \mu_{2xxxx} = 0\,, \\ &\mu_{3xxxx} + \mu_{3tt} - 4\mu_1\mu_{1x}\mu_{3x} - 4\mu_{1x}\mu_2\mu_3 + 2\mu_{2t}\mu_3 - 4\mu_{1x}\mu_{3t} + 2\mu_{1t}\mu_{3x} = 0\,. \end{aligned}$$

Решение полученной системы равносильно решению системы уравнений (10).

В разделах 2.3 и 2.4 показано применение предложенного метода к уравнениям Бюргерса и Кортевега–де Фриза соответственно.

В разделе 2.5 перечислены основные результаты главы 2.

Третья глава посвящена применению метода, описанного в главе 2, к поиску редукций уравнения плоского стационарного пограничного слоя и сравнению полученных редукций с редукциями, получаемыми с помощью техники поиска инвариантных решений.

В разделе 3.1 рассматривается уравнение плоского пограничного слоя (1). Показано, что редукции уравнения (1) можно искать в виде (9). После перехода от $\alpha(x,y)$, $\beta(x,t)$, $z(x,t)$ к инвариантам преобразований (11) $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$, введенных по формулам

$$\begin{aligned} &z_x - \mu_1(x,y)z_y = 0\,, \qquad \beta_x - \mu_1(x,y)\beta_y - \mu_2(x,y)\beta = 0\,, \\ &\alpha_x - \mu_1(x,y)\alpha_y - \mu_2(x,y)\alpha - \mu_3(x,y) = 0\,, \end{aligned} \tag{13}$$

можно получить следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} &\mu_{1y}\mu_2 + \mu_{1xy} - \mu_{1y}^2 - \mu_1\mu_{1yy} = 0\,, \\ &\mu_{2x} + \mu_2^2 - \mu_2\mu_{1y} - \mu_1\mu_{2y} = 0\,, \\ &3\mu_{1yy} + 3\mu_{2y} + \mu_{3x} - \mu_1\mu_{3y} + \mu_2\mu_3 - \mu_{1y}\mu_3 = 0\,, \\ &\mu_{2y}(2\mu_{1y} - \mu_2) = 0\,, \qquad \mu_2\mu_{2yy} - \mu_{2y}^2 = 0\,, \\ &\mu_2\mu_{3y} - 2\mu_{2y}\mu_3 + 2\mu_{1y}\mu_{3y} - 4\mu_{1yyy} - 6\mu_{2yy} = 0\,, \\ &2\mu_{2y}\mu_{3y} - \mu_{2yy}\mu_3 - \mu_2\mu_{3yy} - \mu_{2yyy} = 0\,, \\ &3p(x)\mu_{1y} + p(x)\mu_2 - p'(x) - \mu_{3yyy} + \mu_{3y}^2 - \mu_3\mu_{3yy} = 0\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что представляют интерес только редукции к ОДУ третьего порядка, что реализуется при условии $z_y(x,y) \neq 0$. Поэтому инварианты $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$ взяты в виде (13).

В разделе 3.2 проведено исследование системы (14) и получены все возможные редукции уравнения (1) к ОДУ третьего порядка при всех возможных $p(x)$.

Проведенное в разделе 3.3 сравнение с редукциями, получаемыми с помощью симметрий, позволяет сформулировать результат в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Уравнение* (1) *имеет отличные от симметрийных редукции к ОДУ третьего порядка только при следующих* $p(x)$*:*
1. $p(x) = -\alpha^2(x+\beta)^{-5/3} + \gamma(x+\beta)^{-1/3}$*. Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'^2(z) - 2w''(z)w(z) - 3w'''(z) - 3\gamma = 0\,.$$

2. $p(x) = \alpha(x+\beta)$*. Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$h'(z)w'(z) - h(z)w''(z) - w'''(z) = 0\,,$$

где функция $h(z)$ является решением уравнения

$$\alpha - h'''(z) + h'(z)^2 - h(z)h''(z) = 0\,.$$

В разделе 3.4 перечислены основные результаты главы 3.

В **четвертой главе** описано применение метода поиска редукций, предложенного в главе 2, к уравнению нестационарного осесимметричного пограничного слоя в форме (7).

Разделы 4.1–4.3. посвящены поиску редукций уравнения (7) к УрЧП с двумя независимыми переменными.

В разделе 4.1 показано, что такие редукции также можно искать в линейном по новой неизвестной функции виде

$$u = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)w(s(x, y, t), q(x, y, t))\,, \tag{15}$$

причем справедливо

Предложение 4. *В (15) функцию $\beta(x, y, t)$ и одну из двух новых независимых переменных $s(x, y, t)$, $q(x, y, t)$ можно, не ограничивая общности, положить не зависящими от y.*

Отсюда можно получить систему уравнений на $\alpha(x, y, t)$, $\beta(x, t)$, $s(x, t)$ и $q(x, y, t)$, содержащую неопределенные функции $\Gamma_i(s, q)$, которую можно переписать в терминах инвариантов $\mu_1(x, t)$, $\mu_2(x, y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, y, t)$, введенных по следующим формулам

$$\begin{aligned}
&s_x - \mu_1 s_t = 0\,, \qquad q_x - \mu_2 q_y - \mu_1 q_t = 0\,,\\
&\beta_x - \mu_1\beta_t - \mu_3\beta = 0\,, \qquad \alpha_x - \mu_2\alpha_y - \mu_1\alpha_t - \mu_3\alpha - \mu_4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Переход к новым переменным $\mu_1(x, t)$, $\mu_2(x, y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, y, t)$ приводит к следующей переопределенной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\mu_{1x} - \mu_1\mu_{2y} + \mu_1\mu_3 = 0\,, \qquad \mu_1\mu_{2yy} = 0\,, \qquad \mu_3\mu_{2yy} = 0\,,\\
&\mu_3\mu_{4yy} = 0\,, \qquad \mu_1\mu_{4yy} = 0\,, \qquad \mu_{2xy} - \mu_2\mu_{2yy} + \mu_{3x} - \mu_{2y}^2 + \mu_3^2 = 0\,,\\
&2r(x)\mu_{2y} - \mu_1\mu_{4y} - r(x)\mu_{1t} - r'(x) = 0\,, \qquad \mu_{3x} - \mu_3\mu_{2y} + \mu_3^2 = 0\,,\\
&3\mu_{2yy} + \mu_{4x} - \mu_4\mu_{2y} - \mu_2\mu_{4y} - r(x)\mu_{2t} + \mu_3\mu_4 = 0\,,\\
&\mu_{2yyy} - \mu_{4xy} + \mu_4\mu_{2yy} + \mu_2\mu_{4yy} - r(x)\mu_{2yt} - 2\mu_3\mu_{4y} - r(x)\mu_{3t} = 0\,,\\
&\mu_{4yyy} + \mu_4\mu_{4yy} - r(x)\mu_{4yt} - \mu_{4y}^2 - 3p(x, t)\mu_{2y} + p_x(x, t) -\\
&\qquad\qquad - \mu_1 p_t(x, t) - p(x, t)\mu_3 = 0\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

В разделе 4.2 проводится анализ переопределенной системы уравнений (16) при всех возможных функциях $r(x)$, $p(x,t)$.

В разделе 4.3 проведено сравнение полученных редукций с редукциями, получаемыми с помощью симметрий. Приведен список всех $r(x)$, $p(x,t)$, при которых возможны редукции, отличные от симметрийных. Доказана следующая

Теорема 6. *Уравнение* (16) *имеет отличные от симметрийных редукции к УрЧП третьего порядка с двумя независимыми переменными только при следующих* $r(x)$, $p(x,t)$:
1. $r(x) = \alpha\bar{x}^{-2/3}$, $p(x,t) = F(t)\bar{x}^{-1/3} - 3/2\alpha c'(t)\bar{x}^{-1} - 3/4c^2(t)\bar{x}^{5/3}$.
Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$3\alpha w_{sq} + w_q^2 - 2w_{qq}w - 3w_{qqq} - 3F(s) = 0\,.$$

2. $r(x) = \alpha\exp(\beta x) + \gamma$*,* $\gamma \neq 0$, $p(x,t) = F\left(\bar{t}\exp(-\beta x)\right) - \gamma/\beta r(x)\bar{t}^{-2}$.
Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\alpha w_{sq} - \beta s(w_{sq}w_q - w_{qq}w_s) - w_{qqq} - F(s) = 0\,.$$

3. $r(x) = \alpha\bar{x}^{-4/3} + \delta\bar{x}^{\gamma}$*,* $\gamma \neq -4/3$*,* $\gamma \neq -2/3$,

$$p(x,t) = \frac{F\left(\bar{t}\bar{x}^{-\gamma-2/3}\right)}{\bar{x}^{1/3}} - \frac{3\alpha\left(\delta(3\gamma+2)\bar{x}^{\gamma+4/3} + 3\alpha(\gamma+1)\right)}{(3\gamma+2)^2\bar{t}^2\bar{x}^{5/3}}\,.$$

Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$w_q^2 + 3\delta w_{sq} - 2ww_{qq} - 3w_{qqq} - (3\gamma+2)s(w_q w_{sq} - w_{qq}w_s) - 3F(s) = 0\,.$$

4. $r(x) = \alpha\bar{x}^{-4/3} + \delta\bar{x}^{-2/3}$, $p(x,t) = F\left(\exp(3t/2)\bar{x}^{\varepsilon}\right)\bar{x}^{-1/3} - 3\alpha^2/(4\varepsilon^2)\bar{x}^{-5/3}$.
Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{w_q^2}{3} + \frac{3\delta}{2}sw_{sq} - \frac{2w_{qq}w}{3} + \varepsilon s(w_q w_{sq} - w_s w_{qq}) - w_{qqq} - F(s) = 0\,.$$

5. $r(x) = (\alpha + \delta\ln\bar{x})\,\bar{x}^{-4/3}$,

$$p(x,t) = F\left(\bar{t}\bar{x}^{2/3}\right)\bar{x}^{-1/3} + 3/4\delta\ln\bar{x}\left(2\alpha + 3\delta + \delta\ln\bar{x}\right)\bar{x}^{-5/3}\bar{t}^{-2}\,.$$

Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\alpha w_{sq}s + \frac{3\delta}{2}\left(qw_{qq} - w_q\right) - \frac{2s}{3}w_{qq}w + \frac{2s^2}{3}\left(w_q w_{sq} - w_{qq}w_s\right) + \frac{sw_q^2}{3} - \\ - sw_{qqq} - F(s)s = 0\,.$$

6. $r(x) = \alpha\bar{x}$,

$$p(x,t) = F\left(\frac{\bar{x}+\gamma\bar{t}^{-4/5}}{\bar{t}^{-3/5}}\right)\bar{t}^{-1/5} + \gamma\alpha^2/5\left(8\gamma\bar{x}\bar{t}^{-4/5} - 9/5\bar{x}^2 - 3/5\gamma^2\bar{t}^{-8/5}\right)\bar{t}^{-14/5}.$$

Соответствующее УрЧП с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\frac{\alpha s}{5}(w_q - w_{qq}q) + w_q w_{sq} - w_{qq}w_s - \frac{3\alpha s^2 w_{sq}}{5} - w_{qqq} - F(s) = 0\,.$$

Везде в выражениях выше положено $\bar{x} = x + \beta$, $\bar{t} = t + \varepsilon$.

В разделе 4.4 приведены основные уравнения для получения редукций уравнения (7) к ОДУ. Показано, что такие редукции можно искать в виде

$$u = \alpha(x,y,t) + \beta(x,y,t)w(z(x,y,t))\,.$$

Можно получить систему уравнений на $\alpha(x,y,t)$, $\beta(x,y,t)$, $z(x,y,t)$, содержащую неопределенные функции $\Gamma_i(z)$. Эту систему можно переписать в терминах инвариантов $\mu_1(x,y,t)$, $i = 1,\ldots,6$, введенных по формулам

$$\begin{aligned}
&z_x(x,y,t) - \mu_1(x,y,t)z_y(x,y,t) = 0\,, \quad z_t(x,y,t) - \mu_1(x,y,t)z_y(x,y,t) = 0\,,\\
&\beta_x(x,y,t) - \mu_1(x,y,t)\beta_y(x,y,t) - \mu_3(x,y,t)\beta(x,y,t) = 0\,,\\
&\beta_t(x,y,t) - \mu_2(x,y,t)\beta_y(x,y,t) - \mu_4(x,y,t)\beta(x,y,t) = 0\,,\\
&\alpha_x(x,y,t) - \mu_1(x,y,t)\alpha_y(x,y,t) - \mu_3(x,y,t)\alpha(x,y,t) - \mu_5(x,y,t) = 0\,,\\
&\alpha_t(x,y,t) - \mu_2(x,y,t)\alpha_y(x,y,t) - \mu_4(x,y,t)\alpha(x,y,t) - \mu_6(x,y,t) = 0\,.
\end{aligned}$$

Получающаяся при этом система уравнений на $\mu_1(x,y,t)$, $i = 1,\ldots,6$, является переопределенной и состоит из девятнадцати уравнений.

В разделе 4.5 проведен анализ этой системы при различных $r(x)$, $p(x,t)$.

В разделе 4.6 приведены все редукции уравнения (7) к ОДУ, которые нельзя получить с помощью техники поиска инвариантных решений.

Доказана следующая

Теорема 7. *Уравнение (7) имеет редукции к ОДУ третьего порядка, которые нельзя получить с помощью симметрий, при следующих* $r(x)$, $p(x,t)$:

1. $r(x) = \alpha\exp(\beta x) + \gamma$, $p(x,t) = \bar{t}^{-2}\left[\delta\exp(2\beta x) - \gamma/\beta\left(\alpha\exp(\beta x) + \gamma\right)\right]$.

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) - \beta w'^2(z) + \alpha w'(z) + w''(z)(\alpha z + \beta w(z))/2 + \delta = 0\,.$$

2. $r(x) = \alpha\bar{x}^{-4/3} + \delta\bar{x}^{\gamma}$,

$$p(x,t) = \bar{t}^{-2}\left[\kappa\bar{x}^{2\gamma+1} - 3\alpha/(3\gamma+2)^2\left(3\alpha(\gamma+1) + \delta(3\gamma+2)\bar{x}^{\gamma+4/3}\right)\bar{x}^{-5/3}\right].$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + w''(z)w(z)(\gamma+2)/2 + \delta w''(z)z/2 - w'^2(z)(\gamma+1) + \delta w'(z) + \kappa = 0\,.$$

3. $r(x) = (\alpha + \delta\ln\bar{x})\,\bar{x}^{-4/3}$,

$$p(x,t) = \bar{x}^{-5/3}\bar{t}^{-2}\left[\kappa + 3/4\delta\ln\bar{x}\,(\delta\ln\bar{x} + 3\delta + 2\alpha)\right].$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + (w''(z)w(z) + w'^2(z))/3 + (\alpha + 3\delta/2)\,w'(z) - (\alpha - 3\delta)\,w''(z)/2 + \kappa = 0\,.$$

4. $r(x) = \alpha\bar{x}^{-4/3} + \gamma$,

$$p(x,t) = \bar{t}^{-2}\left[3/4\left(\gamma\bar{x}^{4/3} + \alpha\right)\left(\gamma\bar{x}^{4/3} - 3\alpha\right)\bar{x}^{-5/3} + \kappa\left(\bar{x} + \delta\bar{t}^{3/2}\right)\right].$$

В этом случае существуют два различных ОДУ

$$w'''(z) - w'^2(z) + \gamma z w''(z)/2 + w''(z)w(z) + \gamma w'(z) + 3\gamma^2/4 + \kappa = 0\,,$$

и

$$w'''(z) + K(z)w''(z) - w'(z)K'(z) + \kappa\delta = 0\,,$$

где $K(z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$K'''(z) + K(z)K''(z) + 2\gamma K'(z) - K'^2(z) + \kappa = 0\,.$$

5. При $r(x) = \alpha\bar{x}$ *редукции к ОДУ существуют при следующих функциях* $p(x,t)$*:*

5.1. $p(x,t) = \alpha^2(\gamma\bar{x} + \delta\bar{t})$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'''(z) - \alpha c w'(z) - w'^2(z) + w''(z)w(z) + \alpha^2\delta/c = 0\,,$$

где c *– корень уравнения* $c^3 - \gamma c + \delta = 0$.

5.2. $p(x,t) = \bar{t}^{-22/5}\left[\kappa\left(\bar{x}\bar{t}^{4/5} + \gamma\right)^3 - \alpha^2\gamma\left(9\bar{x}^2\bar{t}^{8/5} - 40\gamma\bar{x}\bar{t}^{4/5} + 3\gamma^2\right)/25\right]$.

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) - 2w'^2(z) + 3w''(z)w(z)/2 + \alpha w'(z) + \alpha w''(z)/2 + \kappa = 0\,.$$

5.3. $p(x,t) = \gamma\bar{x} + \delta\bar{t}$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'''(z) + k(z)w''(z) + k'(z)w'(z) = 0\,,$$

где функции $k(z)$, $m(z)$ *являются решениями системы уравнений*

$$k'''(z) - k'^2(z) + k(z)k''(z) - \alpha m'(z) + \gamma = 0\,,$$
$$m'''(z) + m''(z)k(z) - k'(z)m'(z) + \delta = 0\,.$$

6. При $r(x) = \alpha\bar{x}^{-4/3}$ *редукции к ОДУ существуют при следующих* $p(x,t)$*:*
6.1.

$$p(x,t) = \kappa\bar{x}^{\gamma-5/3}\exp(4h(t)) - \frac{12\alpha^2\big((3\gamma-4)h''(t) + 4h'^2(t)\big)}{\bar{x}^{5/3}(3\gamma-4)^2}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + (3\gamma+4)\,w''(z)w(z)/12 - \gamma w'^2(z)/2 - w'^2(z)/3 + \kappa = 0\,.$$

6.2.

$$p(x,t) = \frac{\kappa(\bar{x}+c(t))^\gamma}{c^{\gamma+1/3}(t)} + \frac{\alpha^2\big(3c''(t)c(t) - 4c'^2(t)\big)}{3c^2(t)\bar{x}^{5/3}}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + (\gamma+3)w''(z)w(z)/4 - (\gamma+1)w'^2(z)/2 + \kappa = 0\,.$$

6.3.

$$p(x,t) = \kappa q^{1/3}(t)\exp(4q(t)\bar{x}) + \frac{\alpha^2\big(2q'^2(t) - 3q(t)q''(t)\big)}{3q^2(t)\bar{x}^{5/3}}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + w''(z)w(z) - 2w'(z)^2 + \kappa = 0\,.$$

6.4.

$$p(x,t) = \delta\bar{x}\exp\left(-2\int q(t)dt\right) + \frac{3\alpha^2\big(2q'(t) - q^2(t)\big)}{4\bar{x}^{5/3}} + \gamma\exp\left(-\int q(t)/2dt\right).$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z) + K(z)w''(z) - K'(z)w'(z) + \gamma = 0\,,$$

где $K(z)$ *является решением уравнения*

$$K'''(z) - K'^2(z) + K(s)K''(z) + \delta = 0\,.$$

7. При произвольной $r(x)$ редукции к ОДУ есть при следующих $p(x,t)$:
7.1. $p(x,t)=\alpha\bar{x}^{\gamma}$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'''(z)+(\gamma+3)w''(z)w(z)/4-(\gamma+1)w'^2(z)/2+\alpha=0\,.$$

7.2. $p(x,t)=\alpha\exp(\beta x)$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'''(z)+\beta(w''(z)w(z)-2w'^2(z))/4+\alpha=0\,.$$

7.3. $p(x,t)=\gamma\bar{x}$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$w'(z)m'(z)-w'''(z)-m(z)w''(z)-\gamma\beta=0\,,$$

где $m(z)$ *является решением уравнения*

$$m'^2(z)-m(z)m''(z)-m'''(z)-\gamma=0\,.$$

7.4. $p(x,t)=m'(t)r(x)+\gamma^2\bar{x}+\gamma m(t)$. *Соответствующее ОДУ имеет вид*

$$\gamma(w'(z)-zw''(z))-w'''(z)-\gamma^2\beta=0\,.$$

7.5.

$$p(x,t)=\frac{1}{(x+s(t))^{1/3}}\left(s'^2(t)\left(\frac{2r(x)M(x,t)}{9}+\frac{2r(x)H(x,t)}{9(x+s(t))}-\frac{H^2(x,t)}{27(x+s(t))^{4/3}}\right)-\right.$$
$$-\frac{r(x)s''(t)H(x,t)}{3}+\gamma-\frac{3k^2(t)}{4(x+s(t))^{4/3}}-\frac{3r(x)k'(t)}{2}+k(t)s'(t)\frac{r(x)}{x+s(t)}-$$
$$\left.-\frac{k(t)s'(t)H(x,t)}{3(x+s(t))^{4/3}}\right)\,,$$

где функции $k(t)$ *и* $s(t)$ *произвольны, а функции* $M(x,t)$ *и* $H(x,t)$ *имеют вид*

$$M(x,t)=\int\frac{r(x)dx}{(x+s(t))^{5/3}}\,,\qquad H(x,t)=\int\frac{r(x)dx}{(x+s(t))^{2/3}}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w'''(z)+2w''(z)w(z)/3-w'^2(z)/3+\gamma=0\,.$$

Везде в выражениях выше положено $\bar{x}=x+\beta\,,\quad \bar{t}=t+\varepsilon$.

В разделе 4.7 приведены основные результаты главы 4.

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Предложен метод построения редукций, являющийся дальнейшим развитием прямого метода Кларксона–Крускала. Изложенный метод основан на идее введения инвариантных переменных и более прост в применении. Этот метод может быть использован для построения как одномерных, так и двумерных редукций.
2. Построены одномерные редукции уравнения стационарного плоского пограничного слоя. Показано, что существуют редукции, которые не являются симметрийными редукциями.
3. Построены одномерные и двумерные редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя. Также показано, что существуют редукции, которые не являются симметрийными редукциями.
4. Проведена групповая классификация уравнений стационарного плоского и осесимметричного пограничных слоев.
5. Проведена групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя.
6. На основе результатов групповой классификации показана единственность, с точностью до преобразований эквивалентности, классического преобразования Степанова–Манглера.
7. Используя результаты групповой классификации, показано несуществование нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Аксенов А.В., Козырев А.А. Редукции уравнения стационарного пограничного слоя // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 4.**

2. **Аксенов А.В., Козырев А.А. Редукции уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления // Доклады АН. 2013. Т. 449. № 5. С. 516–520.**

3. **Аксенов А.В., Козырев А.А. Построение редукций уравнения стационарного пограничного слоя // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2013. Том 2. № 2. С. 161–168.**

4. **Аксенов А.В., Козырев А.А. Одномерные и двумерные редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя //**

Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2013. Том 2. № 4. С. 415–421.

5. Аксенов А.В., Козырев А.А. Редукции уравнения стационарного плоского пограничного слоя // Моделирование и механика: сборник научных статей. Красноярск. Сибирский государственный аэрокосмический университет. 2012. С. 12–17.

6. Аксенов А.В., Козырев А.А. Редукции к ОДУ уравнения стационарного пограничного слоя // Тезисы докладов VI Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова "Актуальные проблемы прикладной математики и механики" (Абрау-Дюрсо. 10-16 сентября 2012). Екатеринбург: УрО РАН. 2012. С. 3–4.

7. Aksenov A.V., Kozyrev A.A. Reductions of stationary boundary layer equation // International Conference "MOGRAN–15". Abstracts. Kemer. Turkey. 1–6 October, 2012. Ufa: USATU. 2012. P. 17.

8. Aksenov A.V., Kozyrev A.A. Reductions of stationary boundary layer equation // International Workshop "Geometrical Structures in Integrable Systems". Abstracts. Moscow. 30 October–2 November 2012. Moscow M.V. Lomonosov State University. 2012. P. 1.

9. Аксенов А.В., Козырев А.А. Построение редукций уравнения пограничного слоя // Научная сессия НИЯУ МИФИ–2013. Конференция "Методы математической физики и математическое моделирование физических процессов". Аннотации докладов. Т. 3. Тематические конференции "НИЯУ МИФИ-2013" М.: НИЯУ МИФИ. 2013. С. 124.

10. Aksenov A.V., Kozyrev A.A. Construction of one-dimensional and two-dimensional similarity reductions of the axisymmetric unsteady boundary layer equation // International Conference "MOGRAN–16". Book of Abstracts. Ufa. Russia. October 28-November 2, 2013. Ufa: USATU, 2013. P. 29.

11. Аксенов А.В., Козырев А.А. Редукции уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // Волны напряжения в сплошных средах. К 100-летию со дня рождения профессора А.Я. Сагомоняна. Тезисы докладов подсекции "Газовая и волновая динамика" секции "Механика" научной конференции "Ломоносовские чтения". МГУ имени М.В. Ломоносова. 2014. С. 16–17.

12. Аксенов А.В., Козырев А.А. Построение редукций уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // Тезисы докладов Всероссийской

конференции "Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение", приуроченной к 95-летию академика Л.В. Овсянникова. 18-22 мая 2014 г. Новосибирск. ИГ им. М.А. Лаврнтьева СО РАН. Новосибирск. 2014. С. 11–12.
13. Aksenov A.V., Kozyrev A.A. Group classification of nonstationary axisymmetric boundary layer equation // International Conference "MOGRAN–17: new trends in investigation of mathematical models". Abstracts. Cadiz. Spain. 8-12 September, 2014. University of Cadiz, 2014. P. 2.
14. Аксенов А.В., Козырев А.А. Несуществование нестационарного аналога преобразования Степанова–Манглера // Научная сессия НИЯУ МИФИ–2015. VI Конференция "Методы математической физики и математическое моделирование физических процессов". Аннотации докладов. Т. 2. М.: НИЯУ МИФИ. 2015. С. 235.
15. Аксенов А.В., Козырев А.А. Классы точных решений уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: аннотации докладов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во АН Республики Татарстан. 2015. С. 13.
16. Аксенов А.В., Козырев А.А. Классы точных решений уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретиче-ской и прикладной механики: сборник трудов (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета. 2015. С. 96–97.
17. Аксенов А.В., Козырев А.А. Метод построения редукций уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике". VIII Международная конференция, посвященная 115-летию со дня рождения академика М.А. Лаврентьева. 7–11 сентября 2015 г., г. Новосибирск. Тезисы докладов. Новосибирск: ИГ им. М.А. Лаврентьева СО РАН. 2015. С. 19.
18. Козырев А.А. Групповая классификация уравнения нестационарного осесимметричного пограничного слоя // Научная сессия НИЯУ МИФИ–2014. Конференция "Теоретическая физика и математическое моделирование (прикладная математика)". Аннотации докладов. Т. 2. М.: НИЯУ МИФИ. 2014. С. 216.