На правах рукописи

Медведева Элина Валерьевна

Численное исследование волн скольжения в нелинейных средах с нелокальностью

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в *Национальном исследовательском университете «МИЭТ»*.

Научный руководитель: *Алфимов Георгий Леонидович,*
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: *Попов Виктор Юрьевич,*
доктор физико-математических наук,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
кафедра математики Физического факультета, профессор

Урюпин Сергей Александрович,
доктор физико-математических наук,
ФИАН им. П.Н. Лебедева,
заведующий сектором теории плазменных явлений

Ведущая организация: *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики*

Защита состоится «11» ноября 2015 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета *Д 212.130.09* при *Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ»*, расположенном по адресу: *115409, г. Москва, Каширское ш., 31.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»*, а также по ссылке www.ods.mephi.ru/dissertations.

Автореферат разослан «_____» ________________ 2015 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор *Леонов А.С.*

Актуальность работы.

Диссертация посвящена численному и аналитическому исследованию нелинейных нелокальных сред, динамика которых описывается следующим уравнением

$$u_{tt} - \mathcal{L}u + F(u) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – оператор умножения Фурье, $\widehat{\mathcal{L}u}(\omega) = l(\omega)\widehat{u}(\omega)$, $l(\omega)$ - символ оператора $\mathcal{L}$, $F(u)$ - нелинейность. Уравнение (1) является нелокальным обобщением нелинейного уравнения Клейна-Гордона, соответствующего случаю $\mathcal{L} = \partial^2/\partial x^2$. Предполагается, что $F(u)$ обладает свойством *бистабильности*, то есть имеются два состояния равновесия u_+ и u_-, такие, что $F(u_\pm) = 0$. Основным объектом исследования в работе являются бегущие волны перехода между этими состояниями равновесия. Эти решения уравнения (1) называются *кинками* (или топологическими солитонами) и удовлетворяют граничным условиям

$$\lim_{x\to-\infty} u(t,x) = u_-, \quad \lim_{x\to\infty} u(t,x) = u_+. \tag{2}$$

Вообще говоря, движение кинков в средах такого типа сопровождается излучением (см. рис. 1, А). В результате этого излучения движение кинка замедляется, а его форма существенно изменяется. Вместе с тем, одним из важных свойств задач такого типа является возможность существования так называемых «волн скольжения» при распространении которых излучения не возникает. Такие волны соответствуют определенным типам фронта кинка и определенным значениям скоростей, называемых «скоростями скольжения» (*«sliding velocities»*) [1,2] (см. рис. 1, Б). Явление «волн скольжения» пред-

[1] Oxtoby O.F., Pelinovsky D.E., Barashenkov I.V. Travelling kinks in discrete ϕ^4 models//Nonlinearity, 2006. – v.19, pp.217-235.

[2] Oxtoby O.F., Barashenkov I.V. Moving solitons in the discrete nonlinear Schrodinger equation//Phys.Rev.E, 2007. – v.76, p.036603.

ставляется важным, как с точки зрения фундаментальных представлений о моделируемых системах, так и с практической точки зрения. При этом скорости скольжения являются важными характеристиками рассматриваемой нелокальной среды.

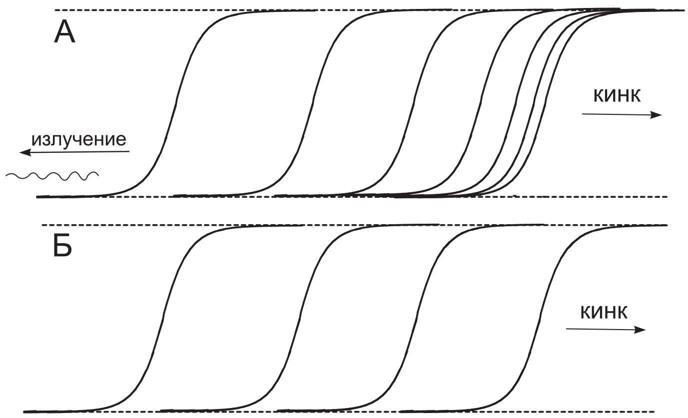

Рис. 1. В нелокальной среде А: кинк движется с излучением и тормозит; Б: кинк движется стационарно со скоростью скольжения.

В работе предполагается, что оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}u = \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x - x')u_{x'}(x')dx', \tag{3}$$

при этом он непрерывно зависит от некоторого параметра λ, $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_\lambda$. Параметр λ в дальнейшем будет называться *параметром нелокальности*. Таким образом, основным уравнением, рассмотренным в диссертации является

$$u_{tt} + F(u) = \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x - x')u_{x'}(x')dx'. \tag{4}$$

Для бегущих волн уравнение (4) записывается в виде

$$v^2 u_{zz} + F(u) = \frac{d}{dz} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(z - z')u_{z'}(z')dz', \tag{5}$$

где $z = x - vt$ - бегущая координата и v - скорость. Таким образом, *с математической точки зрения задача состоит в исследовании решений вида (2)* *уравнения (4) при некоторых физически значимых типах нелинейности $F(u)$ и ядра $G(z)$.*

Важнейшей областью приложений уравнения (5) является *джозефсоновская электродинамика*[3,4]. Эффект Джозефсона — явление протекания сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника. Такой ток обусловлен квантовой природой явления сверхпроводимости. Это явление называют джозефсоновским током, а такое соединение сверхпроводников — джозефсоновским контактом. Эффект Джозефсона в наше время используется, например, для создания точных измерительных приборов. В контексте джозефсоновской элетродинамики $u = u(x,t)$ - разность фаз параметров порядка в сверхпроводящих электродах, а традиционной нелинейностью $F(u)$ является синусная. Уравнение (5) с синусной нелинейностью называется *нелокальным уравнением синус-Гордона.* При туннелировании куперовских пар через диэлектрик возникает циркулирующий ток, который создает вихрь. Простейший джозефсоновский вихрь (называемый также 2π-*кинком* или *флюксоном*) соответствует значениям $u_- = 0$ и $u_+ = 2\pi$.

Для одинарного джозефсоновского перехода это уравнение возникает с разными ядрами $G(\xi)$ [5], [6], [7], в зависимости от характеристик перехода. Также уравнение (5) используют для описания систем точечных джозефсонов-

[3] Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А. К теории нелинейных диспергирующих волн в джозефсоновских контактах// СФХТ. 1992. - Т.5, N2, стр.228-235.

[4] Gaididei Yu., Lazarides N., Flytzanis N. Fluxons in a superlattice of Josephson junctions: dynamics and radiation//J.Phys.A: Math. Gen, 2003. – v. 36, pp.2423-2441.

[5] Rauh H., Genenko Y.A. Bistable current–voltage characteristic of a weak-link between superconducting grains//Physica C, 2004. – v.401, pp.286-290.

[6] Алиев Ю.М., Силин В.П. О нелокальной джозефсоновской электродинамике//ЖЭТФ, 1993 – т.104, вып 1, стр.2526-2537.

[7] Алиев Ю.М., Силин В.П., Урюпин С.А. К теории нелинейных диспергирующих волн в джозефсоновских контактах// СФХТ. 1992. - Т.5, N2, стр.228-235.

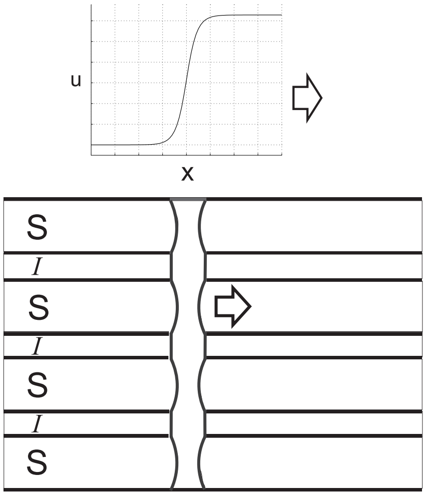

Рис. 2. Слоистая структура: S — сверхпроводящие слои, I — туннельные слои. Вихревая структура движется слева направо.

ских контактов [8] или слоистых джозефсоновских структур [9] (см. рис. 2). Таким структурам в последнее время уделяется большое внимание, в связи с возможностью создания источников, детекторов и фильтров терагерцового излучения на их основе [10]. В частности, в работе [11] для описания слоистых структур предлагалось использовать нелокальное уравнение синус-Гордона с экспоненциальным ядром

$$G_\lambda(\xi) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left\{ -\frac{|\xi|}{\lambda} \right\}, \tag{6}$$

которое соответствует нелокальным взаимодействиям Каца-Бейкера и естественным образом возникает в приложениях различной физической природы. Ядро (6) в дальнейшем будет называться *ядром Каца-Бейкера.*

[8] Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Mitskevich N.V. Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions// Chaos, 1993.- v.3(3), p.405-415.

[9] Gaididei Yu., Lazarides N., Flytzanis N. Fluxons in a superlattice of Josephson junctions: dynamics and radiation//J.Phys.A: Math. Gen, 2003. – v. 36, pp.2423-2441.

[10] Savel'ev S., Yampol'skii V., Rakhmanov A., Nori F. Terahertz Josephson plasma waves in layered superconductors: spectrum, generation, nonlinear and quantum phenomena//Rep. Prog. Phys. 2010.– v.73, 026501.

[11] Алиев Ю.М., Овчинников К.Н. Силин В.П., Урюпин С.А. Нелокальная джозефсоновская электродинамика слоистых структур// ЖЭТФ, 1995. – т.107, вып.3, стр 972-988.

Исследование скоростей скольжения для нелокального уравнения синус-Гордона и связанных с ним уравнений является довольно сложной задачей с численной точки зрения, так как скорость и форма вихря должны быть найдены одновременно. Таким образом методы, которые можно применить в локальном случае (см. например [12]), не могут быть использованы для исследования нелокальных задач без существенной модификации. Поэтому разработка специальных подходов для исследования именно нелокальных задач, представляет значительный интерес.

Помимо синусной нелинейности, в современных приложениях встречаются более сложные, несинусоидальные нелинейности. Модели такого типа возникают при описании SIS или SNINS и SFIFS переходов [13]. Актуальность данной тематики обусловлена перспективой практического применения джозефсоновских структур в наноэлектронике, квантовом компьютинге и других отраслях современных технологий.

Приложения уравнения (1) не ограничиваются проблематикой джозефсоновской электродинамики. Также оно используется для описания решеточных моделей, возникающих, например, в теории дислокаций, теории поверхностного слоя, при исследовании динамики ДНК. При этом для решеточных моделей уравнение (1) часто используются с нелинейностями $F(u) = -u+u^3$, известной в физических приложениях как модель ϕ^4 [14], и с нелинейностью $F(u) = -u(1-u^2)(1+\gamma u^2)$, где γ - параметр, соответствующей модели $\phi^4-\phi^6$. Также уравнение (1) используется для описания моделей теории магнетиков.

[12] П.Х.Атанасова, Т.Л.Бояджиев, Е.В.Земляная, Ю.М.Шукринов. Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых уравнением двойного синус-Гордона. Математическое Моделирование, Т.22, No.11, 2010, сс.40-64

[13] Golubov A.A., Kupriyanov M.Yu., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Rev. Mod. Phys., 2004. – v. 76(2), pp. 411-469.

[14] Boyd J. P. A numerical calculation of a weakly non-local solitary wave: the phi 4 breather //Nonlinearity. - 1990. - Т. 3. - №. 1. - С. 177.

Краткий обзор известных результатов.

Тот факт, что рассматриваемое уравнение является одновременно и нелокальным и нелинейным, существенно затрудняет его исследование. Автору неизвестны общие результаты о существовании и единственности решения задачи Коши для этого уравнения. Вместе с тем, если оператор дисперсии является неотрицательно определенным, то, по всей видимости, утверждения о локальном существовании решения задачи Коши в классических формулировках для гиперболических квазилинейных уравнений остаются справедливы [15]. Вместе с тем, известно, что глобальной устойчивости решений может не быть [16], так как возможен коллапс решений. Утверждения о существовании решений типа бегущих волн для уравнений такого типа при этом ранее делались, например в работе [17].

Явление волн скольжения в задачах с нелокальностью было обнаружено в джозефсоновской электродинамике в 90-х годах XX века. Исследование проводилось главным образом аналитически, на основе упрощенных моделей путем использования различных приближений. В частности, рассматривались различные кусочно-линейные приближения синусной нелинейности. В этом случае решения типа кинков можно находить путем "сшивки" точных решений в разных областях. В работах ФИАНовской группы под руководством В.П.Силина использовались, в основном, два приближения: приближение Обри-Волкова [18] и приближение Сакаи-Татено-Педерсона [19]. В частности,

[15] T.Tao, Nonlinear dispersive equations: Local and global analysis - AMS, 2006 - 373 p.

[16] Levine H. A. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ //Transactions of the American mathematical society. – 1974. – Т. 192. – С. 1-21.

[17] Peter W. Bates, Chunlei Zhang, Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum long-range interaction. Discrete and continuous dynamical system, volume 16, number 1, 2006, p.235-252

[18] Малишевский А.С, Силин В.П., Урюпин С.А. Черенковский захват волн и дискретность движения 6π-кинков в длинном джозефсоновском переходе//Письма в ЖЭТФ, 1999. – т.69,N4. стр. 318-322

[19] Силин В.П., Студенов А.В. О квантованности движения и черенковской структуре джозефсоновского вихря// ЖЭТФ, 2000. – т.117, вып. 6, стр 1230–1241.

в последнем случае исследования предсказывают существования бесконечного набора скоростей скольжения 2π-кинков. Необходимо отметить также работы группы В.М.Елеонского, [20,21], где задача о скоростях скольжения исследовалась методами теории динамических систем. В этих работах, однако, скорости скольжения находились для кинков с высоким топологическим зарядом, но не для 2π-кинков.

Уравнение (1) детально рассматривалось в докторской диссертации Г.Л. Алфимова [22]. В этой работе был предложен метод, позволяющий аппроксимировать исходное нелокальное уравнение системой дифференциальных уравнений и доказаны некоторые утверждения, касающиеся дискретизации скоростей кинков в нелокальной модели. Однако, основными нелинейностями, рассмотренными в работе [22], были кубическая и синусная нелинейности.

Цель диссертационной работы состоит в разработке метода и комплексов программ для моделирования волн скольжения в нелокальных моделях для широкого класса нелинейностей, а также проведение численного исследования этих моделей. Здесь можно выделить следующие задачи:

1. Разработка численного метода нахождения скоростей скольжения и моделирование режимов скольжения для уравнения (5) с ядром Каца-Бейкера (6) и его реализация в комплексах программ в среде Matlab.

2. Исследования, численное и аналитическое, нелокального уравнения (1) с *периодическими нелинейностями* в контексте описания динамики электромагнитных полей в джозефсоновских слоистых структурах. Главным вопросом здесь является изучение спектра скоростей скольжения кинков с наи-

[20] Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Lerman L.M. Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations // Chaos, 1998. – v. 8, N1, pp. 257-271.

[21] Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Mitskevich N.V. Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions// Chaos, 1993.- v.3(3), p.405-415.

[22] Алфимов Г.Л. Некоторые классы решений нелинейных уравнений волнового типа с пространственной нелокальностью. -М.: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2014 г.

меньшим топологическим зарядом (2π-кинков), если таковые имеются.

3. Исследования, численное и аналитическое, нелокального уравнения (1) с *полиномиальными нелинейностями* в контексте описания волн переноса в решеточных моделях с нелокальными взаимодействиями.

Научная новизна. Все результаты, полученные в работе, являются новыми. Основным результатом работы является численный алгоритм, реализованный в виде программы в среде MatLab, позволяющий находить формы фронтов кинков и значения скоростей скольжения для различных типов нелинейности. В данной работе впервые показано, что в нелокальной модели джозефсоновской слоистой структуры, описываемой нелокальным уравнением двойного синус-Гордона, существует семейство решений типа 2π-кинков, причем каждое из этих решений может соответствовать только единственной скорости скольжения. Наличие такого семейства отличает нелокальную модель двойного синус-Гордона от аналогичной модели с синусной нелинейностью. При помощи численного моделирования показано, что такой режим движения является, в некотором смысле, асимптотическим. Во-вторых, показано, что подобное явление имеет место и для нелокального уравнения с нелинейностью $\phi^4 - \phi^6$. Наконец, в-третьих, в представленной работе впервые сформулированы, обоснованы, подтверждены расчетами и проиллюстрированы многочисленными примерами условия существования дискретного набора скоростей движения кинков, причем для этих скоростей приведены асимптотические формулы.

Практическая значимость. Результаты работы, изложенные в диссертации, могут быть использованы при подготовке экспериментов с джозефсоновскими слоистыми структурами, а также при разработке учебных курсов по теории нелинейных волн в высших учебных заведениях.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту:

1. Разработан метод расчета волн скольжения и скоростей скольжения

для исследования задач нелокальной джозефсоновской электродинамики с нелинейностью достаточно общего вида. Он реализован в виде комплекса программ для моделирования волн скольжения в нелокальных моделях. Для представленного метода предложены методы контроля точности счета.

2. Показано, что в модели слоистой джозефсоновской структуры, описываемой нелокальным двойным уравнением синус-Гордона, с нелокальностью, представленной интегродифференциальным оператором с ядром Каца-Бейкера, существует дискретный набор скоростей скольжения кинков. При этом 2π-кинк, соответствующий простейшему джозефсоновскому вихрю, движется без излучения. Показана важность скоростей скольжения при моделировании эволюции кинка: режим распространения типа волны скольжения является в некотором смысле асимптотическим.

3. Показано, что в нелокальной модели $\phi^4 - \phi^6$ с нелокальностью типа Каца-Бейкера существуют неизлучающие бегущие кинки. Набор скоростей этих кинков дискретен, причем эти скорости естественно проявляются при численном моделировании динамики кинков в этой модели.

4. На основании проведенных исследований сформулированы гипотезы о том, что существование бесконечного набора бегущих кинков (или уединенных волн) в слабонелокальных моделях с резонансами связано с расположением особых точек в комплексной плоскости аналитического продолжения невозмущенного решения. Представлена, обоснована и проиллюстрирована многочисленными примерами асимптотическая зависимость значений внешнего параметра задачи, при котором существуют решения типа кинков (уединенных волн).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах: на научной конференции "Перспективы развития фундаментальных наук", Москва, 1-11 июня 2011 г.; на семинаре исследовательской группы по нелинейному и комплексному анализу в Aston University, Бирмингем, Великобритания, 16 марта 2012 г.; на научной конференции “Микроэлектроника и информатика-2012”, Зеленоград, 18-20 апреля 2012 г.; на научной сессии совета РАН по нелинейной динамике, декабрь 2012 г.; на научной конференции “Нелинейные уравнения и комплексный анализ-2013”, Уфа, 18-22 марта 2013 г.; на научной конференции “Nonlinear Waves: Theory and Applications”, Пекин, Китай, июнь 2013 г.; на научной конференции “Нелинейная динамика, бифуркации и странные аттракторы”, Нижний Новгород, 1-5 июля 2013 г.; на международном научном семинаре лаборатории “моделирование природных и техногенных катастроф”, руководитель Е.Н. Пелиновский, НГТУ, Нижний Новгород, 7 августа 2013 г.; на семинаре исследовательской группы “Ecuaciones Diferenciales”, руководитель П. Торрес, Университет Гранады, Испания, 11 сентября 2013 г.; на научной конференции “Нелинейные уравнения и комплексный анализ-2014”, Уфа, 17-21 марта 2014 г.; на семинаре по вычислительной физике лаборатории информационных технологий ОИЯИ, руководитель И.В. Пузынин, 13 ноября 2014 г; на научном семинаре по математическому моделированию, РУДН, руководитель Л.А. Севастьянов, 1 апреля 2015 г.; на научном семинаре кафедры прикладной математики (кафедры 31) НИЯУ МИФИ, руководитель Н.А. Кудряшов, 23 апреля 2015 г.

Публикации. Результаты работы были отражены в 9 публикациях в отечественных и международных изданиях, в том числе 4 статьи в рецензируемых изданиях, из них 3 индексируются системой Web of Science.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Автором развит и обобщен метод численного и аналитического исследования нелинейных волн на новые классы уравнений, который ранее использовался только для нелокального уравнения с синусной и кубической нелинейностями. В работах [1–4] все компьютерные расчеты, весь численный анализ, а также вся необходимая аналитическая работа были выполнены лично автором на основе разработанных методов и компьютерных программ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 110 страниц, работа содержит 20 рисунков, 9 таблиц. Список литературы содержит 78 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе представлен численный метод нахождения решений типа кинков для нелинейного уравнения Клейна-Гордона с нелокальностью типа Каца-Бейкера.

Для изучения решений типа кинка уравнения (5) с ядром (6) интегро-дифференциального оператора применялся подход, описанный в [23]. Следуя этому подходу, заменим уравнение (4) с ядром (6) системой

$$u_{tt} + F(u) = q_x, \quad -\lambda^2 q_{xx} + q = u_x. \tag{7}$$

Для бегущих волн система (7) записывается

$$v^2 u_{zz} + F(u) = q_z, \quad -\lambda^2 q_{zz} + q = u_z. \tag{8}$$

[23] Алфимов Г.Л. Некоторые классы решений нелинейных уравнений волнового типа с пространственной нелокальностью. -М.: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2014 г.

Система (8) имеет гамильтонову структуру [24]. Сведение нелокального уравнения к системе ОДУ существенно упрощает как численное, так и аналитическое исследования задачи.

Рассмотрим четырехмерное фазовое пространство системы (8) с координатами u, u_z, q, q_z. Тогда решения типа кинка системы (8) соответствуют гетероклиническим орбитам, соединяющим состояния равновесия $O_-(u = u_-, u' = q = q' = 0)$ и $O_+(u = u_+, u' = q = q' = 0)$. Особые точки $O_\pm$ являются состояниями равновесия типа седло-центр. Это означает, что для O_- существует одна пара входящих траекторий $\gamma^+_{1,2}(O_-)$, которые приближаются к O_- при $z \to -\infty$ (выходящие траектории), и одна пара траекторий $\gamma^-_{1,2}(O_-)$, которые приближаются к O_- при $z \to +\infty$ (входящие траетории). Аналогичная ситуация имеет место для O_+, соответствующие траетории — $\gamma^+_{1,2}(O_+)$ (входящие) и $\gamma^-_{1,2}(O_+)$ (выходящие). Существование гетероклинической орбиты означает слияние траекторий: одной из выходящих из O_- и одной из входящих в O_+. В четырехмерном фазовом пространстве гамильтоновой системы (8) такое слияние не является случаем общего положения, но оно может иметь место при некоторых значениях v при фиксированном λ. В этом случае гетероклиническая орбита должна пройти через плоскость симметрии $(u = \tilde{u}, q_z = 0)$.

Численный алгоритм для вычисления значений скоростей скольжения v состоит в «подборе» параметра v таким образом, что одна из исходящих из O_- траекторий ($\gamma^+_1(O_-)$, для определенности) пересекала плоскость $(u = \pi, q_z = 0)$. Технически, это может быть реализовано поиском *нулей* функции $R(v, \lambda)$, которая для заданных параметров λ и v определяется как

$$R(v, \lambda) = q_z(z_0; \lambda, v),$$

[24] Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Lerman L.M. Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations // Chaos, 1998. – v. 8, N1, pp. 257-271.

где $(u(z;\lambda,v), u_z(z;\lambda,v), q(z;\lambda,v), q_z(z;\lambda,v))$ является выходящей траекторией для O_- и z_0 удовлетворяет условию $u(z_0;\lambda,v)=\tilde{u}$. Нули могут быть найдены с помощью метода дихотомии.

Подводя итог, метод может быть алгоритмизирован следующим образом.

1. Задать начальные условия $S=(u(0;\lambda,v), u_z(0;\lambda,v), q(0;\lambda,v), q_z(0;\lambda,v))$, используя линеаризацию (8) в окрестности точки O_- (т.е. найти точку S с контролируемой точностью на траектории $\gamma_1^+(O_-)$ вблизи точки равновесия O_-).

2. Численно решить задачу Коши с начальными условиями в точке S до момента, когда компонента u на траектории примет значение $\tilde{u}$. Зафиксировать $R(v,\lambda)=q_z(z_0;\lambda,v)$ в этой точке.

3. Меняя параметр v, найти значения v, при которых $R(v,\lambda)=0$. Компонента u на соответствующей траектории дает решение типа кинка.

При использовании данного алгоритма при вычислении значений v возникают два основных источника погрешности: погрешность численного решения задачи Коши и ошибка выбора исходных данных S. В работе приводятся методы оценки точности счета, основанные на анализе этих источников погрешностей.

Моделирование эволюции Для численных экспериментов по распространению кинков система (7) переписывается в следующем виде [25]

$$Q=q_x,\quad u_{tt}+F(u)=Q,\quad \lambda^2 Q_{xx}+Q=u_{xx}.$$

Вычисления выполнялись с помощью явной численной схемы второго поряд-

[25] Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Mitskevich N.V. Dynamics of topological solitons in models with nonlocal interactions// Chaos, 1993.- v.3(3), p.405-415.

ка точности

$$\frac{1}{\tau^2}(u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}) + F(u_m^n) = Q_m^n; \tag{9}$$

$$\frac{\lambda^2}{h^2}(Q_{m+1}^n - 2Q_m^n + Q_{m-1}^n) - Q_m^n = -\frac{1}{h^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n), \tag{10}$$

где τ – шаг по времени, h – шаг по пространству, u_m^n и Q_m^n являются значениями функций u и Q в m-узле сетки вдоль x $(m = 1, ..., M)$ во временном n-слое. Проверка устойчивости схемы (9)-(10) при $F(u) \equiv 0$ при помощи спектрального признака устойчивости показала, что схема устойчива при

$$\tau^2 < h^2 + 4\lambda^2;$$

отсюда не следует сохранение устойчивости для нелинейной задачи. Граничные условия (2)

$$u(t, 0) = u_- \quad u(t, L) = u_+,$$

где L -длина интервала, аппроксимируется краевым условием Дирихле на концах фиксированного отрезка. Длина интервала L берется достаточно большой для исключения отражения излучения, испускаемого кинком от концов этого интервала.

Численное моделирование показывает, что такая численная схема является высоконадежной для достаточно широкого диапазона значений τ и h.

Вторая глава посвящена использованию построенного в Главе 1 алгоритма для исследования свойств вихрей в слоистых джозефсоновских структурах (см. рис. 2), в предположении, что (а) электродинамика джозефсоновской структуры является *нелокальной* и (б) ток-фазовая зависимость представлена *двумя синусоидальными гармониками* вместо одной синусоидальной гармоники для случая уравнения синус-Гордона.

Основным уравнением для этой модели является нелокальное двойное уравнение синус-Гордона

$$\sin u + 2A \sin 2u + v^2 u_{zz} = \frac{1}{2\lambda} \frac{d}{dz} \int \mathrm{e}^{-|z-z'|/\lambda} u_{z'}(z')\ dz', \tag{11}$$

которое зависит от двух внешних параметров: параметра нелокальности λ и A, описывающего амплитуду второй гармоники в ток-фазовой зависимости. Простейший джозефсоновский вихрь (флюксон) соответствует решению типа 2π-кинка уравнения (11). Из-за нелокальности среды движение такого вихря обычно сопровождается излучением. В этой главе показано, что для фиксированных λ и A существует *дискретный* набор скоростей (скоростей скольжения), при которых 2π-кинк движется без излучения.

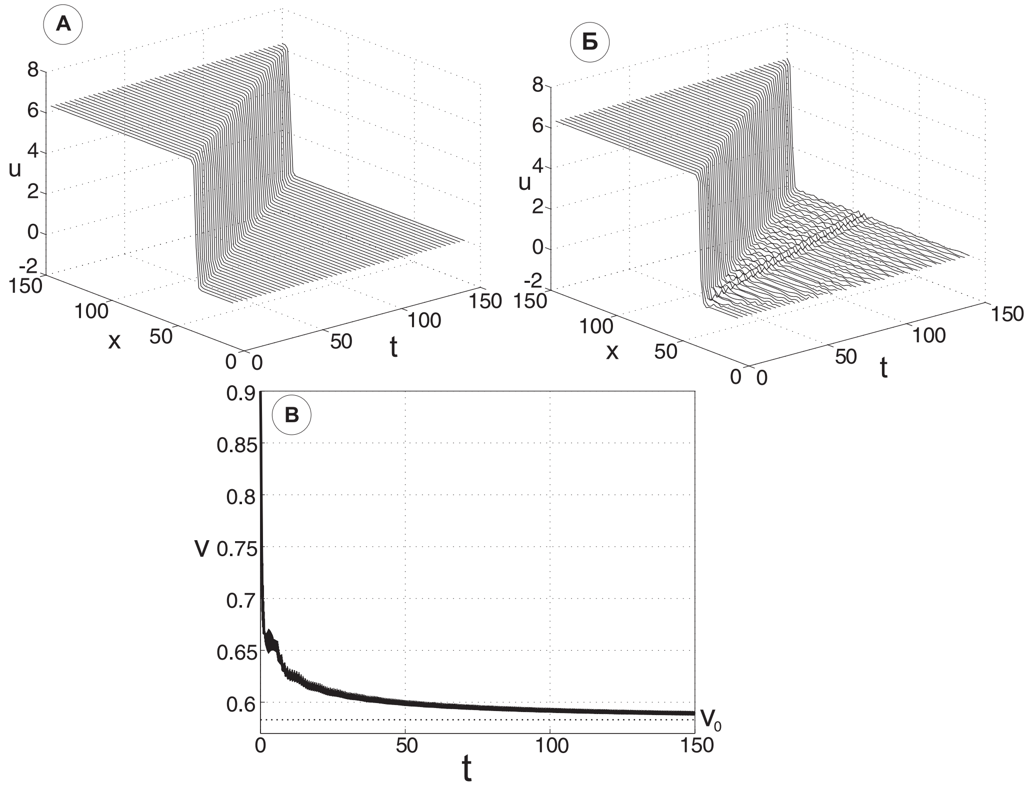

Рис. 3. Распространение 2π-кинка при $A = 1/8$, $\lambda = 0.3$. (А) Безызлучательное распространение кинка $u_1(z)$ с первой дискретной скоростью $v = v_0$; (Б) Распространение кинка такой же формы, как и в (А), но снабженного скоростью $v = 0.9$; (В) Скорость движения центра фронта кинка (точки, где $u = \pi$), соответствующая распространению на панели Б.

Численное моделирование показывает важность скоростей скольжения 2π-кинков, $v_0 > v_1 > \ldots$, и соответствующих им значений энергий, $W_0 >$

$W_1 > \ldots$, как характеристик рассматриваемой нелокальной среды. В первом эксперименте взятый в качестве начального условия для уравнения (11) 2π-кинк $u_1(z)$ был снабжен в начальный момент первой скоростью скольжения $v = v_0$. Его эволюция показана на рис. 3 А. Из рисунка видно, что скорость кинка сохраняется и излучение отсутствует. Затем в качестве начального условия был взят тот же самый 2π-кинк $u_1(z)$, но ему была придана начальная скорость $v = 0.9 > v_0$. Рис. 3, Б и В, показывает, что кинк замедляется до скорости скольжения v_0. При этом излучается “лишняя” энергия.

В этой главе также представлены результаты численных экспериментов, когда (а) кинкообразный импульс, имея в начальный момент времени энергию, большую, чем W_0, излучает и замедляется до скорости скольжения v_0; и (б) энергия кинкообразного импульса в начальный момент времени лежит между W_0 и W_1, при этом в процессе движения он замедляется до скорости v_1. Также приведен пример переключения между режимами распространения, скоростями v_0 и v_1, при помощи включения диссипации.

Основные результаты главы 2 были опубликованы в работе [3].

Третья глава посвящена применению алгоритма из Главы 1 для изучения бегущих неизлучающих решений типа кинка для нелокального уравнения Клейна-Гордона с полиномиальными нелинейностями: модели ϕ^4 и ϕ^4-ϕ^6, соответствующие нелинейностям третей и пятой степени. Основным уравнением в этой главе является

$$v^2 u_{zz} - u(1-u^2)(1+\gamma u^2) = \frac{1}{2\lambda}\,\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|z-z'|}{\lambda}} u_{z'}(z')dz', \qquad (12)$$

где γ – параметр, причем $\gamma = 0$ для нелокальной модели ϕ^4 и $\gamma > 0$ для нелокальной модели ϕ^4-ϕ^6. Показано, что непрерывный спектр скоростей кинков, существующий в локальных моделях ϕ^4 и ϕ^4-ϕ^6, исчезает при переходе к нелокальным моделям. Спектр скоростей кинков в нелокальных моделях ϕ^4

и ϕ^4-ϕ^6 является *дискретным*. В случае нелокальной модели ϕ^4 численный счет показывает *отсутствие* неизлучающих бегущих кинков, т.е. спектр возможных скоростей кинков включает только нулевую скорость. Этот факт согласуется [26]; вместе с тем в представленной диссертации показано, что при слабой нелокальности кинки могут распространяться на большие расстояния с относительно слабым излучением. В то же время сильная нелокальность подавляет мобильность кинка. Помимо кинков, нелокальная модель ϕ^4 допускает бегущие уединенные волны, для которых $u \equiv 0$ при $z \to \pm\infty$. Однако они являются неустойчивыми объектами.

Численное исследование динамики, описываемой уравнением (12), показывает, что в случае нелокальной модели $\phi^4 - \phi^6$ неизлучающие бегущие кинки *действительно существуют*. Набор скоростей таких кинков *дискретен*. Эти скорости естественно возникают при моделировании динамики кинков в модели ϕ^4-ϕ^6. В частности, кинк, снабженный высокой начальной скоростью, теряет энергию на излучение, и его скорость снижается до наибольшего значения из дискретного спектра скоростей скольжения $v = v_0$.

Основные результаты главы 3 были опубликованы в работе [1].

В четвертой главе сформулированы Гипотезы о связи явления волн скольжения в слабонелокальных моделях с расположением особых точек аналитического продолжения невозмущенного решения. Основным объектом, который рассматривается в главе 4, является уравнение

$$L_\varepsilon u = F(u) \tag{13}$$

для функции $u(z)$, где L_ε является оператором умножения Фурье в z пространстве, непрерывно зависящий от параметра ε, и $F(u)$ – функция нели-

[26] Алфимов Г.Л. Некоторые классы решений нелинейных уравнений волнового типа с пространственной нелокальностью. -М.: Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2014 г.

нейности. Символ $\widehat{L}(k)$ является четной функцией от k. Примером задач, приводящих к уравнению (13), является дискретное и нелокальное уравнения Клейна-Гордона (1). Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ происходит вырождение оператора L_ε в оператор $L_0 = \Omega^2 d^2u/dx^2$, где Ω - действительный параметр. Соответственно, при $\varepsilon \ll 1$ уравнение (13) может рассматриваться как слабонелокальное возмущение обыкновенного уравнения второго порядка.

В главе рассматриваются два типа решений (13) вида *вложенных солитонов* (“*embedded solitons*”): волны типа кинка и уединенные волны. Вложенными солитонами в литературе в настоящее время называют нелинейные моды, которые существуют только при изолированных значениях некоторого внешнего параметра (не обязательно скорости). Таким образом волны скольжения можно интерпретировать как частный случай явления вложенных солитонов.

При рассмотрении волн типа кинка резонансы соответствуют действительным корням дисперсионного уравнения вблизи $u \equiv u_\pm$

$$\widehat{L}_\varepsilon(k) = F'(u_\pm). \tag{14}$$

Появлению вложенных солитонов соответствует единственная пара действительных корней $k = k_0$ уравнений (14).

В случае кинков гипотеза заключается в следующем. Пусть невозмущенное уравнение

$$u_{zz} = F(u) \tag{15}$$

имеет решение типа кинка $\tilde{u}(z)$, которое может быть продолжено в комплексную плоскость. Если ближайшие к вещественной оси особые точки $\tilde{u}(z)$ в верхней полуплоскости представлены парой $z_\pm = \pm\alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta > 0$, тогда ожидается существование бесконечной последовательности значений $\{\varepsilon_n\}$, таких что для каждого $\varepsilon = \varepsilon_n$ уравнение (13) имеет решение типа кинка. Эта последовательность подчиняется следующему асимптотическому закону

$$k_0(\varepsilon_n) \sim (n\pi + \varphi_0)/\alpha, \qquad (16)$$

где φ_0 - константа, зависящая от L_ε и $\tilde{u}$.

Аналогичная гипотеза сформулирована для уединенных волн. Асимптотика значений ε в этом случае также описывается формулой (16). Таким образом, основным результатом этой главы являются условия существования счетной бесконечной последовательности вложенных солитонов, а также асимптотическая формула (16) для значений параметров $\{\varepsilon_n\}$, $n \to \infty$, при которых существуют вложенные солитоны. Спектр ε непосредственно связан со скоростями скольжения. Если спектр ε дискретен, это означает, что спектр скоростей скольжения также дискретен.

В четвертой главе приведено нестрогое обоснование этих Гипотез, а также представлены многочисленные примеры, в частности уравнения из глав 2 и 3, подтверждающие согласование асимптотической формулы (16) с численным счетом с достаточной степенью точности.

Пример: Рассмотрим двойное уравнение синус-Гордона в пределе слабой нелокальности из главы 2

$$\varepsilon^2 u_{\eta\eta\eta\eta} + u_{\eta\eta} - \sin u - 2A\sin 2u = 0, \quad \eta = z/\sqrt{1-v^2}; \qquad (17)$$

Гипотеза 1 предсказывает существование бесконечной последовательности значений $\{\varepsilon_n\}$, таких что уравнение (17) имеет решения типа 2π-кинка при $\varepsilon = \varepsilon_n$, удовлетворяющих асимптотической формуле при $n \to \infty$ с $\varphi_0 = \pi/2$

$$\varepsilon_n \sim \frac{\operatorname{arcch}(1+8A)}{\sqrt{1+4A}(2n+1)\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (18)$$

В Таблице 1 сопоставлены результаты численного счета для уравнения (17) при $A = 1$ и $A = 10$ со значениями ε, найденными с помощью асимптотической формулы (18). С ростом n асимптотические и численные значения ε_n

n	A	Асимпт. ε_n	Численные ε_n	A	Асимпт. ε_n	Численные ε_n
0	1	0.4110	0.3149	10	0.2529	0.1320
1		0.1370	0.1350		0.0843	0.0664
2		0.0822	0.0823		0.0506	0.0486
3		0.0587	0.0588		0.0361	0.0364
4		0.0456	0.0457		0.0281	0.0283
5		-	-		0.0230	0.0231
6		-	-		0.0195	0.0195
7		-	-		0.0169	0.0169

Таблица 1. Сравнение асимптотических и численных значений ε, при которых существует решение уравнения (17) типа 2π-кинка: $A = 1$ и $A = 10$. В случаях $n = 5, 6, 7$ и $A = 1$ точности численного счета недостаточно и результаты не представлены.

приближаются друг к другу, что указывает на справедливость формулы (18). Для $n = 5, 6, 7$ и $A = 1$ точности численного счета недостаточно и результаты не представлены.

Основные результаты главы 4 были опубликованы в работе [2].

В Заключении перечислены основные результаты работы, а также сформулированы некоторые вопросы математического характера, исследование которых могло бы быть полезно для дальнейшего развития теории.

Работа сопровождается двумя приложениями. Приложение А содержит доказательства некоторых Предложений, на которых основывается численный метод нахождения скоростей кинков. Приложение Б содержит вывод нелокального двойного уравнения синус-Гордона для джозефсоновской слоистой структуры с тонкими слоями.

Список публикаций по теме диссертации

1. Alfimov G.L., **Medvedeva E.V.** Moving nonradiating kinks in nonlocal ϕ^4 and $\phi^4-\phi^6$ models // Phys. Rev. E., 2011. – v.84, p.056606;

2. Alfimov G.L., **Medvedeva E.V.**, Pelinovsky D.E. Hamiltonian systems with an infinite number of localized travelling waves // Phys.Rev.Lett., 2014. – v.112, p.054103;

3. Alfimov G.L., Malishevskii A.V., **Medvedeva E.V.** Discrete set of kink velocities in Josephson structures // Physica D, 2014. – v.282, pp.16–26;

4. **Медведева Э.В.** Численный метод нахождения скоростей скольжения вихрей в нелокальной джозефсоновской электродинамике // Вестник РУДН. Математика, информатика, физика, 2015. – N1, cc. 46–53.

5. **Медведева Э.В**. Нелинейные структуры в моделях с дальнодействием // Тезисы доклада. Конференция "Перспективы развития фундаментальных наук", МФТИ, июнь 2011г., с.37;

6. **Медведева Э.В.** Бегущие кинки в нелокальных моделях ϕ^4 и $\phi^4-\phi^6$ с ядром типа Каца-Бейкера // Тезисы доклада. Конференция "Микроэлектроника и информатика – 2012", МИЭТ, апрель 2012 г., с.116;

7. Алфимов Г.Л., **Медведева Э.В.**, Пелиновский Д.Е. Дискретный спектр нелинейных мод в сингулярно возмущенной задаче // Тезисы доклада. Конференция "Нелинейные уравнения и комплексный анализ – 2013", Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, март 2013г., с.7;

8. Алфимов Г.Л., **Медведева Э.В.**, Пелиновский Д.Е. Discrete spectrum of nonlinear modes in weakly nonlocal problems: a mechanism to emerge // Тезисы доклада. Конференция "Nonlinear Waves: Theory and Applications", Пекин, Китай, июнь 2013 г., с.146;

9. Алфимов Г.Л., Малишевский А.В., **Медведева Э.В.** Дискретный набор скоростей кинков в джозефсоновских структурах: нелокальная модель двойного синус-Гордона // Тезисы доклада. Конференция "Нелинейные уравнения и комплексный анализ – 2014", Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, март 2014 г., с.7.