

На правах рукописи

Нифанова Александра Васильевна

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ S_n -МЕТОДЫ ДЛЯ
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ
В СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Троицк - 2008

Работа выполнена в ФГУП «Государственный научный центр Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Трошиев Виталий Ефимович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Головизнин Василий Михайлович,
ИБРАЭ РАН

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Аристова Елена Николаевна,
Институт математического моделирования РАН

Ведущая организация: Институт теоретической и математической физики
РФЯЦ ВНИИЭФ

Защита состоится «24» сентября 2008 г. в _____ часов
На заседании диссертационного совета Д212.130.09 в Московском инженерно-
физическом институте по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31, тел. 324-84-
98, 323-92-56

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИФИ.

Просим принять участие в работе совета или прислать отзыв в одном экземпляре,
заверенный печатью организации.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук, профессор

Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена построению новых разностных схем с улучшенными свойствами монотонности на базе классического DSn -метода и метода характеристических трубок. Новые схемы предназначены для решения задач переноса частиц в системах со сферической симметрией.

Актуальность темы

Для широкого круга задач нейтронно-ядерной физики со сферической симметрией процессов переноса и кинетики нейтронов основными математическими методами их численного решения являются Sn -методы и методы характеристик. Первые варианты этих методов были независимо сформулированы в конце 1940-х и начале 1950-х годов в работах по атомным проектам США и СССР. Это Sn -метод Карлсона [1] и КН-схема Гольдина [2], метод прямого интегрирования Рихтмайера [3] и метод характеристик Владимирова [4]. Несколько позже были предложены дискретный Sn -метод (DSn -метод) [5] и метод характеристических трубок (ХТ-метод) [6], которые представляют собой развитие и обобщение в определенных направлениях первоначальных методов.

Sn -методы – это конечно-разностные аппроксимации кинетического интегро-дифференциального уравнения переноса частиц, рассматриваемого как уравнение в частных производных первого порядка. Методы характеристик – это разностные или разностно-аналитические аппроксимации семейства обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ), записанных на характеристиках-траекториях движения частиц в сфере. Отсюда проистекает существенное различие в математических свойствах этих методов и в классах задач, для которых их применение эффективно.

Дискретный Sn -метод является наиболее простым и экономичным с точки зрения программной реализации и объема вычислений. Метод использует прямоугольные сетки (Sn -сетки) и всюду, кроме окрестности центра сферы, имеет второй порядок аппроксимации и точности на гладких решениях [7]. DSn -метод консервативен относительно законов сохранения нейтронов и легко обобщается на многомерные геометрии, но имеет большой недостаток, – метод немонотонен. Это может приводить к осцилляциям в сеточном решении или даже к появлению отрицательных значений скалярного потока, что существенно снижает точность расчетов при численном решении стационарных и нестационарных задач переноса в сложных гетерогенных средах. В разное время были предложены алгоритмы монотонизации [9-13], а также различные модификации DSn -метода [14,15] для повышения его точности. Они достаточно

эффективны при определенных условиях, но решают проблему немонотонности лишь частично, а их обобщения на многомерные уравнения очень сложны.

Метод характеристических трубок, в отличие от DS_n -метода, положителен и монотонен, имеет также второй порядок точности и полностью консервативен. Однако расчетная сетка ХТ-метода в виде характеристических ячеек-трубок (Т-сетка) существенно сложнее по сравнению с прямоугольными S_n -сетками и практически не подходит для решения задач с учетом других физических процессов. Прямое обобщение характеристических сеток на многомерные уравнения является также очень сложной задачей.

DS_n - и ХТ-методы – принципиально разные по своей сути, но их аппроксимационной основой являются сеточные уравнения баланса, записанные соответственно на S_n - и Т-сетках. Это аппроксимационное свойство в определенной степени их сближает и может быть основой для построения новых численных методов.

Представляет большой теоретический и практический интерес обобщение подхода «характеристических трубок» на сетки произвольного вида, особенно на S_n -сетки, и построение на этой основе новых разностных схем типа DS_n -метода с математическими свойствами, характерными для ХТ-метода, и с возможностью простых обобщений на нестационарные задачи переноса и кинетики нейтронов с учетом других физических процессов.

Цель работы

Применить подход характеристических трубок для построения на S_n -сетках консервативных 2-го порядка точности разностных схем с существенно улучшенными свойствами монотонности и точности сеточных решений задач переноса и кинетики нейтронов.

Основные результаты работы

1. Введением новой сеточной функции – полного потока частиц на освещенных и неосвещенных гранях - классический DS_n -метод преобразован в разностную схему для ОДУ баланса относительно полного потока на неосвещенных гранях и схему его распределения по этим граням. Обе схемы имеют второй порядок точности на гладких решениях, но не положительны и не монотонны. DS_n -метод в новой двухэтапной форме представляет собой схему расщепления по причинам, вызывающим его теоретическую и практическую немонотонность.
2. Математические понятия инварианта переноса и среднего расстояния, ранее введенные в методе характеристических трубок обобщены на сетки произвольной формы. Установлена их связь с фазовым объемом сеточных ячеек в сфере. В S_n -

ячейке, трактуемой как характеристическая трубка, построено ОДУ баланса относительно полного потока и функция независимого источника с непрерывным изменением аргумента - расстояния от освещённых граней до неосвещённых.

3. Для ОДУ в Sn-ячейке предложена экономичная монотонная 2-го порядка точности разностная схема. Эта схема вместе с различными алгоритмами распределения полного потока по неосвещенным граням представляют собой новый численный метод - DSn-метод характеристических трубок (DSnt-метод), в котором полностью устранена причина немонотонности, обусловленная аппроксимацией столкновительных членов в уравнении переноса и кинетики нейтронов.
4. Написаны программы, реализующие разработанные методы. Эффективность новых DSnt-схем подтверждена численными расчетами задач с независимыми источниками и задач на собственные значения. Полное устранение одной причины немонотонности приводит к качественно новым численным результатам (квазимонотонные схемы).

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнительными численными исследованиями новых схем и классического DSn-метода, выполненными для различных классов задач, а также сопоставлением с результатами исследований Sn-методов, проведенными ранее другими авторами [8,9,15-17]. Расщепление причин немонотонности и устранение одной из них обосновано аналитическими преобразованиями.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми. У классического DSn-метода обнаружено новое свойство – возможность его расщепления по причинам немонотонности. Построены новые двухэтапные схемы расщепления, в которых полностью устранена одна из причин немонотонности. Эти схемы являются обобщением метода характеристических трубок на Sn-сетки и обеспечивают существенное повышение точности получаемых приближенных решений для основных классов задач переноса и кинетики нейтронов.

Практическая значимость работы

Разработаны Sn-методы характеристического типа с существенно улучшенными свойствами монотонности и точности. Они легко обобщаются на нестационарные задачи переноса и кинетики нейтронов в сфере с учетом других физических процессов, а также на многомерные геометрии и могут быть применены для решения широкого круга задач нейтронно-ядерной физики.

Апробация и публикации

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Научных сессиях МИФИ (2001, 2003, 2004, 2007), на семинаре «Нейтроника-2005» в Обнинске, на семинаре В. Я. Гольдина Института математического моделирования РАН, на семинаре В.М.Головизнина ИБРАЭ РАН.

По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, из них две статьи в реферируемых журналах – «Доклады академии наук», «Математическое моделирование», два препринта, тезисы докладов на Научных сессиях МИФИ.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из четырех глав, введения, заключения, приложения и списка литературы. Материал диссертации изложен на 97 страницах, включает 12 рисунков, 3 таблицы и список литературы из 58 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы диссертации и дается обзор существующих конечно-разностных методов решения задач переноса частиц в сфере, определяются цели и методы работы. Кратко излагается содержание, и формулируются основные результаты диссертационной работы.

В **первой главе** излагаются математические постановки для основных классов задач о переносе и кинетике нейтронов в сферических системах (задачи с источником, задачи на собственные значения). Интегро-дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка записывается в дивергентной (1) и недивергентной (1') формах

$$LN(r, \mu) \equiv \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} N \right) + \sigma(r)N = S(r), \quad (1)$$

$$LN(r, \mu) \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \sigma(r)N = S(r), \quad (1')$$

$$S(r) = \frac{\beta(r)}{2} n^0(r) + \frac{Q(r)}{2}, \quad n^0(r) = \int_{-1}^1 N(r, \mu) d\mu. \quad (1'')$$

Краевые условия имеют вид $N(R, \mu) = \psi(\mu)$, $\mu \leq 0$

$$\frac{dN(r, \mu = -1)}{dr} + \sigma(r)N(r, \mu = -1) = S(r); \quad N(r = 0, \mu) = const.$$

В уравнениях (1), (1') r, μ - независимые переменные: r - расстояние от центра сферы до точки М, где находится нейтрон; $\mu = \cos \theta$, где θ - угол в точке М между

радиус-вектором \vec{r} и направлением полета нейтрона $\vec{\xi}$ в сфере (рис.1) v - скорость движения нейтронов, t - время. Таким образом, переменные r, μ изменяются в области $D = \{0 \leq r \leq R, -1 \leq \mu \leq 1\}$, где R - внешний радиус сферы. Функции $\beta(r), \sigma(r), S(r)$ заданы.

Искомая функция $N(r, \mu)$ есть плотность нейтронов в фазовом пространстве r, μ , иначе говоря, $N(r, \mu)dW$, $dW = r^2 dr d\mu$ есть число частиц в элементарном фазовом объеме dW .

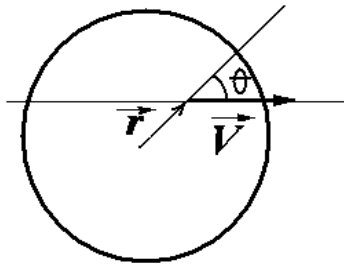


Рис.1 Изменение угла θ на траектории нейтрона в сфере, $\mu = \cos \theta$.

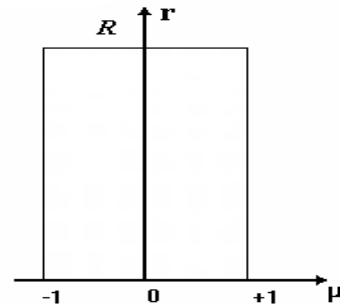


Рис.2. Область D.

В задачах с источником $Q(r, \mu) \neq 0$ либо $\psi(\mu) \neq 0$.

В задачах на расчет критических параметров $Q(r, \mu) = 0$ и $\psi(\mu) = 0$

Уравнения переноса в недивергентной форме (1') рассматриваются также как однопараметрическое семейство обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений на характеристиках-траекториях полета частиц в пространстве (r, μ) :

$$\frac{dN(\xi)}{d\xi} = LN(r, \mu),$$

$$\frac{dr}{d\xi} = \mu, \quad \frac{d\mu}{d\xi} = \frac{1 - \mu^2}{r}, \quad r\sqrt{1 - \mu^2} = C.$$

Применяется итерационный метод решения изложенных задач

$$L N^{v+1}(r, \mu) = \frac{\beta}{2} n^0(r) + \frac{Q(r, \mu)}{2}.$$

Во **второй главе** проводится расщепление DS_n-метода на схему метода характеристических трубок относительно полного потока частиц и схему распределения полного потока по неосвещенным граням S_n-ячейки.

Классический DS_n-метод записывается в виде уравнения баланса частиц (2) в прямоугольной S_n-ячейке (рис. 3, 4) и дополнительных аппроксимационных соотношений (3):

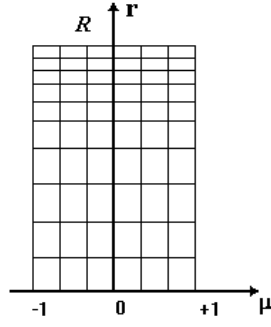


Рис.3 Sn-сетка в области D.

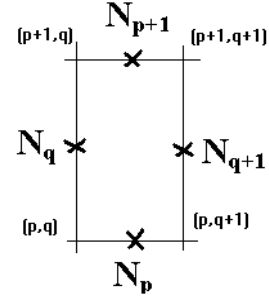


Рис.4 Ячейка $d_{p,q}$.

$$(r_{p+1}^2 N_{p+1} - r_p^2 N_p) \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu + [(1 - \mu_{q+1}^2) N_{q+1} - (1 - \mu_q^2) N_q] r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r + \sigma_{p+\frac{1}{2}} N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta V_{p+\frac{1}{2}} \Delta \mu, \quad (2)$$

$$N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (N_p + N_{p+1} + N_q + N_{q+1}),$$

$$S_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \beta_{p+\frac{1}{2}} n_{p+\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{2} Q_{p+\frac{1}{2}}, \quad n_{p+\frac{1}{2}}^0 = \sum_{q=0}^{\bar{q}-1} N_{p+\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}} \Delta \mu,$$

$$\Delta V_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (r_{p+1}^3 - r_p^3),$$

$$\frac{1}{2} (N_{q+1} + N_q) = \frac{1}{2} (N_{p+1} + N_p), \quad p = 0, 1, \dots, \bar{p} - 1, \quad q = 0, 1, \dots, \bar{q} - 1, \quad (3)$$

$\mu < 0$: искомые значения N_{q+1} и N_p ; $\mu > 0$: искомые значения N_{q+1} и N_{p+1} .

Метод характеристических трубок (ХТ-метод) записывается в виде уравнения баланса частиц (4) в характеристической ячейке-трубке (рис. 5, 6) относительно полных потоков Φ_p и Φ_{p+1} на ее торцах:

$$\Phi_{p+1} - \Phi_p + \frac{1}{2} \sigma_{p+\frac{1}{2}} (N_p + N_{p+1}) \Delta_{p,q} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta_{p,q}, \quad (4)$$

где $\Phi_{p+1} = r_{p+1}^2 \mu_{p+1} N_{p+1} \Delta \mu_{p+1}$, $\Phi_p = r_p^2 \mu_p N_p \Delta \mu_p$,

$$\Delta_{p,q} = \iint_{d_{p,q}} r^2 dr d\mu.$$

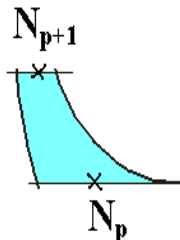


Рис.5 Характеристическая ячейка-трубка.

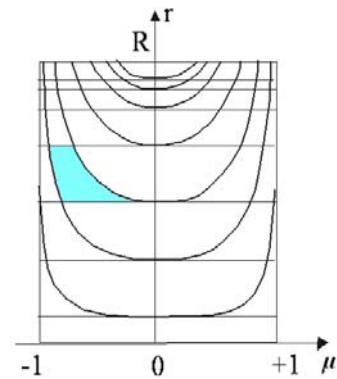


Рис.6 Сетка ХТ-метода.

Уравнение баланса (4) представляет собой разностную аппроксимацию осредненного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) относительно функции потока $\Phi(\xi)$, где ξ - расстояние вдоль средней характеристики в ячейке-трубке от освещенного торца.

Далее DS_n-метод преобразуется в каждой S_n-ячейке в эквивалентную двухэтапную схему расщепления. Для этого в DS_n-методе по аналогии с методом характеристических трубок (4) [6] вводятся *новые сеточные функции* Φ_1 и Φ_2 – полные потоки частиц через освещенные и неосвещенные грани ячейки, а также величина I – инвариант переноса. Аппроксимация столкновительных членов уравнения выражается через введенные функции. Уравнение баланса частиц в ячейке записывается относительно функции полного потока частиц через неосвещенные грани ячейки – *схема первого этапа*.

$$\Phi_2 - \Phi_1 + \sigma_{p+\frac{1}{2}} \left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \alpha I \right) \frac{\Delta W_{p+\frac{1}{2}}}{I} = S_{p+\frac{1}{2}} \Delta W_{p+\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$\Delta \mu = \mu_{q+1} - \mu_q, \quad \mu_{q+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mu_{q+1} + \mu_q)$$

$$\Delta r = r_{p+1} - r_p, \quad r_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (r_{p+1} + r_p), \quad \Delta W_{p+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (r_{p+1}^3 - r_p^3) \Delta \mu.$$

$$\frac{\Delta W_{p+\frac{1}{2}}}{I} \equiv \Delta \xi \quad - \text{среднее расстояние, проходимое частицами в ячейке, } \alpha \text{ - величина 2-го}$$

порядка малости относительно шагов Δr , $\Delta \mu$.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \Phi_{1p,q} = \left(I - \mu_q^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r N_q - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_{p+1} \\ \Phi_2 &\equiv \Phi_{2p,q} = \left(I - \mu_{q+1}^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r N_{q+1} - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_p \end{aligned} \right\} \quad \text{для } \mu < 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \Phi_{1p,q} = \left(I - \mu_q^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r N_q + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_p \\ \Phi_2 &\equiv \Phi_{2p,q} = \left(I - \mu_{q+1}^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r N_{q+1} + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu N_{p+1} \end{aligned} \right\} \quad \text{для } \mu > 0,$$

$$I \equiv I_{p,q} = \begin{cases} \left(I - \mu_{q+1}^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r - r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \equiv \left(I - \mu_q^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r - r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu, & \mu < 0 \\ \left(I - \mu_{q+1}^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r + r_{p+1}^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu \equiv \left(I - \mu_q^2 \right) r_{p+\frac{1}{2}} \Delta r + r_p^2 \mu_{q+\frac{1}{2}} \Delta \mu, & \mu > 0. \end{cases}$$

Делается вывод о том, что уравнение (5) представляет собой конечно-разностную аппроксимацию (немонотонную и неположительную) некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) относительно функции полного потока $\Phi(\xi)$.

Второй этап, необходимый для расчета последующих ячеек, – использование дополнительных аппроксимационных соотношений DS_n-метода, то есть распределение найденного из уравнения (5) полного потока по неосвещенным граням. Таким образом, DS_n-схема преобразована в двухэтапную схему расщепления, которую можно трактовать

как схему расщепления по причинам немонотонности DSn-метода, одна из которых – линейная аппроксимация второго порядка столкновительных членов в (1), а другая – линейная аппроксимация второго порядка дифференциальной части оператора уравнения (1). Расщепление классического DSn-метода является основным результатом на пути построения новых DSn-методов с существенно улучшенными свойствами монотонности (квазимонотонные схемы) и точности сеточных решений.

Во второй главе также рассмотрена возможность расщепления балансных разностных схем для многомерных кинетических уравнений переноса частиц [18].

В третьей главе решается задача построения двухэтапной схемы в Sn-ячейке с улучшенными свойствами монотонности. Для этого формулируется осредненное ОДУ в Sn-ячейке, для ОДУ предлагается монотонная 2-го порядка точности схема и рассматриваются способы распределения полного потока по неосвещенным граням. В связи с этим рассматривается ячейка-трубка с произвольными торцами (частным случаем является Sn-ячейка) с целью построения в ней ОДУ баланса частиц относительно функции полного потока через контур – поперечное сечение ячейки – с непрерывно меняющимся аргументом – расстоянием вдоль средней характеристики в ячейке от ее освещенного торца (рис.7).

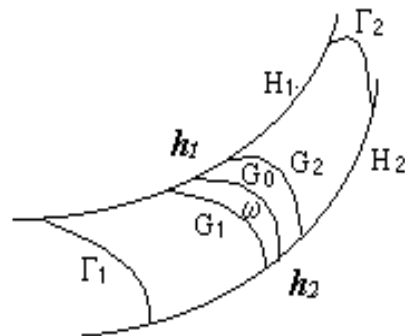


Рис.7 Характеристическая трубка в области $\mu > 0$.

Для этого вводится правило перехода в ячейке-трубке от освещенного торца к неосвещенному (закон заметания ячейки): каждый промежуточный контур делит каждую характеристику в ячейке-трубке в одном и том же отношении. Для малой области ω , содержащей внутри промежуточный контур записывается уравнение баланса частиц с применением формулы Грина, при этом возникает величина постоянная внутри данной трубки – инвариант переноса $I \equiv \int_{-G_1}^{G_2} d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \int_{G_2}^{G_1} d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) > 0$

Из уравнения баланса следуют выражения для полных потоков Φ_1 и Φ_2 (6), фазового объема области $\delta\omega$ и среднего расстояния $\delta\xi$, проходимого в ней частицами, а также выражения для столкновительного члена N_ω и для правой части S_ω получаемого

ОДУ баланса в зависимости от непрерывно меняющегося аргумента - расстояния от освещенного торца ячейки вдоль средней характеристики в ней (7):

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{-G_1} N d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \bar{N}_1 \int_{-G_1} d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \bar{N}_1 I, \\ \Phi_2 &= \int_{G_2} N d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \bar{N}_2 \int_{G_2} d\left(\frac{1}{2}(1-\mu^2)r^2\right) = \bar{N}_2 I,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\delta\omega = \iint_{\omega} r^2 dr d\mu, \quad \delta\xi = \frac{\delta\omega}{I}, \quad N_{\omega} = \frac{\iint N(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_{\omega} r^2 dr d\mu}, \quad S_{\omega} = \frac{\iint S(\mu, r) r^2 dr d\mu}{\iint_{\omega} r^2 dr d\mu}.\quad (7)$$

В результате предельного перехода (при уменьшении области) в каждой Sn-ячейке выводится ОДУ баланса частиц

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \sigma(\Phi + I\rho) = \bar{S}I, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta\xi,$$

и ставится задача Коши с начальным условием $\Phi(0) = \Phi_1$, где ρ - величина 2-го порядка малости по ширине трубки.

Алгоритм построения ОДУ баланса применяется к Sn-ячейке, которая рассматривается как ячейка-трубка.

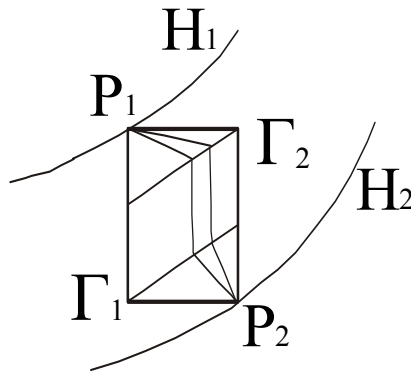


Рис.8 Sn-ячейка, характеристики и промежуточные контуры.

Для Sn-ячейки записываются выражения всех необходимых величин как в случае ячейки-трубки общего вида, и формулируется задача Коши для ОДУ относительно функции полного потока через контур (8) или относительно $\tilde{N} \equiv \tilde{\Phi}/I$ - функции среднего значения плотности частиц на контуре (9)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \sigma\Phi = I\bar{S}, \quad \Phi(0) = \Phi_1, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta\xi,\quad (8)$$

$$\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\xi} + \sigma\tilde{N} = \bar{S}, \quad \tilde{N}(0) = \tilde{N}_1, \quad 0 \leq \xi \leq \Delta\xi.\quad (9)$$

После того как решена задача построения ОДУ баланса в Sn-ячейке дается обзор подходящих для его решения монотонных и условно-монотонных схем 2-го порядка точности [19-23] и выбирается из них для проведения численных расчетов наиболее простая и экономичная:

$$\begin{cases} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{h} + \sigma \phi_{k-\frac{1}{2}} = S_{k-\frac{1}{2}} \\ \frac{\phi_k - \phi_{k-\frac{1}{2}}}{h/2} + \sigma \phi_k = S_k \end{cases} \quad (10)$$

Однако схема (10) является условно-монотонной. Для монотонизации схемы (10) предложен и применяется простой алгоритм нелинейного типа. Решение по монотонной положительной схеме ОДУ баланса есть *первый этап* предлагаемого в диссертационной работе DSn-метода характеристических трубок (*DSnt-метод*).

Второй этап – это распределение по неосвещенным граням Sn-ячейки полного потока, который получен положительным по схеме первого этапа. В главе 3 предлагается два способа распределения. Первый состоит в применении аппроксимационных соотношений DSn-метода, второй строится с использованием решения уравнения переноса в ячейке вдоль характеристик в предположении, что правая часть постоянна внутри ячейки.

1. $N_{p+1,q+\frac{1}{2}} - N_{p+\frac{1}{2},q+1} = N_{p+\frac{1}{2},q} - N_{p,q+\frac{1}{2}}$ - DSn-распределение
2. $N_{p+1,q+\frac{1}{2}} - N_{p+\frac{1}{2},q+1} = N' - N'' = e^{-\sigma \Delta \xi} \cdot (N_{p+\frac{1}{2},q} - N_{p,q+\frac{1}{2}})$ - σ Sn-распределение

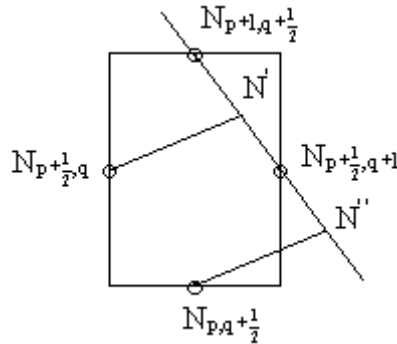


Рис. 9. Построение σ Sn-распределения.

Таким образом построены новые DSn-методы, состоящие на первом этапе из монотонной 2-го порядка точности схемы (10) для ОДУ баланса, а на втором – из 1-го или 2-го способа распределения полного потока (DSnt-методы).

В **четвертой главе** описываются результаты численных исследований точности новых схем, проведенных для различных классов задач переноса частиц.

Задачи с источником. Сравнительный численный анализ новых двухэтапных схем с классическим DSn-методом для задач с гладкими решениями (*однородные шары*), в которых DSn-метод не проявляет немонотонности, показал, что DSnt-схемы по качеству ему не уступают.

Для задач с гладкими решениями, в которых DSn-метод на крупной сетке дает сильную немонотонность сеточного решения, применение новых схем на той же сетке существенно уменьшает немонотонность и обеспечивает практически 2-й порядок точности численного решения. Рассматривается задача с параметрами: $R=20$; $\sigma(r)=10$; $\beta(r)=0$; $Q(r)=1$. DSn-метод дает сильно немонотонное решение во всей области. DSnt-метод с DSn-распределением дает немонотонное решение, но немонотонность существенно уменьшается, это объясняется тем, что одна причина немонотонности устранена, и осредненный полный поток на неосвещенных гранях получен положительным, немонотонность остается только из-за способа распределения этого потока. DSnt-метод с σ Sn-распределением дает гладкое решение, полностью соответствующее физическому процессу. На рис.10 представлен скалярный поток $n^0(r_p) = \sum_q N_p \Delta\mu$, решение получено на равномерной сетке (10 интервалов по переменной r , 8 интервалов по переменной μ). Обозначения на рисунке: DSN - Dsn-метод, CH_DSN и CH_CH - новые DSnt-схемы, CH_DSN - Dsn-распределение, CH_CH - σ Sn-распределение.

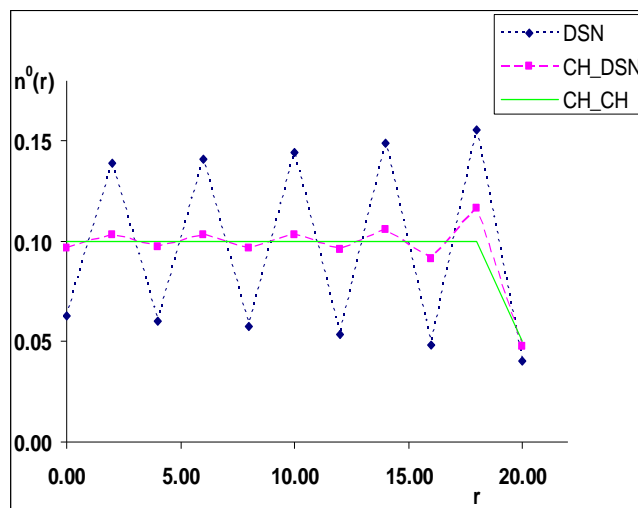


Рис.10 Однородная сфера: $R=20$; $\sigma(r)=10$; $\beta(r)=0$; $Q(r)=1$.

Для сложных *многослойных задач* новые схемы дают сеточное решение близкое к точному. В качестве примера приводится расчет тестовой задачи Риды.

Таблица 1. Тестовая задача Рида

	$0 < r < 2$	$2 < r < 3$	$3 < r < 5$	$5 < r < 6$	$6 < r < 8$
β	0,0	0,0	0,0	0,9	0,9
σ	50,0	5,0	0,0	1,0	1,0
Q	50,0	0,0	0,0	0,7	0,0

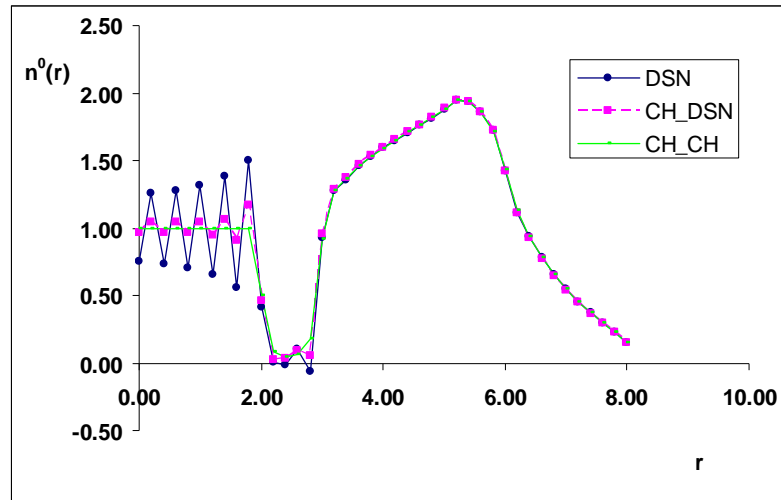


Рис.11 Задача Рида, три метода решения.

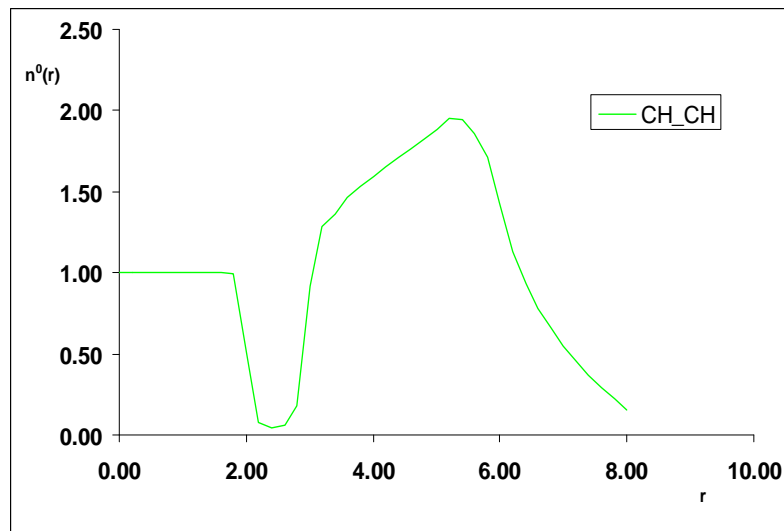


Рис.12 Задача Рида, DSnt-метод с σS_n -распределением.

Расчеты показывают, что устранение одной причины немонотонности приводит на практике к существенному улучшению численных результатов. Можно заключить, что двухэтапные DSnt-схемы являются квазимонотонными.

Далее в главе 4 показывается, что применение новых двухэтапных методов к решению задач на определение критических параметров в ряде случаев может дать более высокую точность, чем непрерывный и дискретный Sn-методы.

Рассматривается задача из работы [16] на определение наименьшего положительного числа α ($\alpha_{кр}$), при котором однородная задача

$$LN(r, \mu) \equiv \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \alpha N = \frac{1}{2} \alpha h \int_{-1}^1 N(r, \mu', t) d\mu',$$

$$N(1, \mu) = 0, \quad \mu < 0, \quad h=1,724$$

имеет ненулевое решение. Расчет $\alpha_{кр}$ был произведен DSnt-методом с σ Sn-распределением на равномерной сетке (10 интервалов по r , 10 интервалов по μ), $\alpha_{кр} = 1,280$. Этот результат можно считать хорошим, в работе [16] приводится значение $\alpha_{кр} = 1,279$, полученное методом характеристик и $\alpha_{кр} = 1,280$, полученное методом Бубнова-Галеркина.

Также представлена задача определения критического параметра λ слоистой системы, приведенная в работе [17]:

$$LN(r, \mu) \equiv \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mu N) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} N \right) + \left(\sigma(r) + \frac{\lambda}{v} \right) N = S(r),$$

$$S(r) = \frac{\beta(r)}{2} n^0(r) + \frac{Q(r)}{2}, \quad n^0(r) = \int_{-1}^1 N(r, \mu) d\mu,$$

$$Q(r) = 0, \quad N(5,0, \mu) = 0 \text{ для } \mu \leq 0.$$

Сферически-симметричная система состоит из трех областей, заполненных средой с различными свойствами, параметры приведены в таблице 2.

Таблица 2. ТРЕХОБЛАСТНАЯ СИСТЕМА $v=100$, $Q(r)=0$

	$0 < r < 1$	$1 < r < 3$	$3 < r < 5$
σ	1	0,1	0,01
β	2	0,1	0,01

Для численного расчета выбирались начальные сетки (такие же как в работе [17]).

По переменной r 12 интервалов: $r_0=0,0$; $r_1=0,1$; $r_2=0,4$; $r_3=0,7$; $r_4=0,9$; $r_5=1,0$; $r_6=1,2$; $r_7=2,0$; $r_8=2,8$; $r_9=3,0$; $r_{10}=3,6$; $r_{11}=4,8$; $r_{12}=5,0$.

По переменной μ 10 интервалов: $\mu_0=-1,0$; $\mu_1=-0,9$; $\mu_2=-0,7$; $\mu_3=-0,4$; $\mu_4=-0,1$; $\mu_5=0,0$; $\mu_6=0,1$; $\mu_7=0,4$; $\mu_8=0,7$; $\mu_9=0,9$; $\mu_{10}=1,0$.

Расчеты проводились также на пропорционально измельченных сетках в 2 и в 4 раза, значения λ приведены в таблице 4 ($\lambda_{\text{э}}$ – экстраполированное значение), результаты для непрерывного Sn-метода (кроме $\lambda_{\text{э}}$) взяты для сравнения из работы [17].

Таблица 3. **РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКОГО ПАРАМЕТРА λ ПРИ ИЗМЕЛЬЧЕНИИ СЕТКИ**

Число интервалов по r и по μ	12 по r , 10 по μ	24 по r , 20 по μ	48 по r , 40 по μ	$\lambda_{\text{э}}$
DSn-метод	6,4046	5,1633	4,7803	4,6092
DSnt-метод с DSn-распред .	4,6704	4,6478	4,6450	4,6446
DSnt-метод с σ Sn-распред.	3,6499	4,3770	4,5767	4,6523
Непрерывный Sn-метод [17]	4,4366	4,5859	4,6291	4,6467

Результаты расчетов трехобластной задачи, приведенные в таблице 3, показывают, что DSnt-метод с DSn-распределением сходится быстрее и превосходит по точности остальные методы, а DSnt-метод с σ Sn-распределением точнее классического DSn-метода. Полученные результаты позволяют заключить, что новые DSnt-методы не уступают по точности DSn-методу, они могут быть использованы для решения различных задач на определение критических параметров.

В **заключении** диссертации обсуждаются основные результаты работы и формулируются выводы.

В **приложении** приведена более подробная информация по результатам расчетов однообластных сферических задач, которые описаны в главе 4.

Заключение

Результаты и выводы диссертационной работы:

- DSn-метод преобразован в две последовательно выполняемые схемы. Первая – это разностная схема для ОДУ относительно полного потока на неосвещенных гранях, вторая - это схема его распределения по двум неосвещенным граням. В новой двухэтапной форме классический DSn-метод представляет собой схему расщепления по причинам, вызывающим его теоретическую и практическую немонотонность.
- Показано, что у DSn-метода в новой двухэтапной форме схема для ОДУ аналогична простейшей разностной схеме ХТ-метода, а схема распределения эквивалентна дополнительным аппроксимационным соотношениям DSn-метода.

- Сформулирован новый подход к построению разностных схем на S_n -сетках. Суть подхода заключается в том, что разностная схема первого этапа заменяется в каждой ячейке на ОДУ баланса относительно полного потока с непрерывным изменением аргумента в самом ОДУ, в независимом источнике и источнике вторичных нейтронов. В работе такое ОДУ построено.
- Обоснована необходимость применения монотонных или квазимонотонных разностных схем 2-го порядка точности для численного решения ОДУ в каждой отдельной S_n -ячейке. В этом случае первая причина немонотонности DS_n -метода, обусловленная аппроксимацией члена поглощения частиц σ_N , полностью устраняется.
- Предложена экономичная монотонная 2-го порядка точности разностная схема для решения ОДУ в S_n -ячейке и алгоритмы распределения полного потока по неосвещенным граням, что в совокупности образует новый численный метод - DS_n -метод характеристических трубок - DS_{nt} -метод. Эффективность новых DS_{nt} -схем подтверждена численными исследованиями различных классов задач переноса и кинетики нейтронов.

Цитируемая в реферате литература

1. Б. Карлсон, Дж. Белл. Решение транспортного уравнения S_n -методом. – В сб. “Физика ядерных реакторов”. М., Атомиздат, 1959, стр.408–432.
2. В.Я. Гольдин. Методы расчета переноса нейтронов и горения в термоядерном изделии (1948–1960 гг.) – Международный симпозиум, Дубна, 14–17 мая 1996 г. В сб.: “Наука и общество: история советского атомного проекта (40–е – 50–е годы)”, 1999, том.2, стр.497–501.
3. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М. «Мир», 1972, 418 с.
4. В.С. Владимиров. Численное решение кинетического уравнения для сферы. Вычислительная математика, 3, 1958, 3–33.
5. Карлсон Б.Г., Латроп К.Д. Теория переноса. Метод дискретных ординат. В сб.: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринпсена, К. Келбера и Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972, стр.102-157.
6. А.В. Никифорова, В.А. Тарасов, В.Е. Трощев. О решении кинетических уравнений дивергентным методом характеристик.–ЖВМ и МФ, 1972, 12, N4,с.1041–1048.

7. В.Е. Трощев. О математических свойствах S_n -методов решения кинетических уравнений.– ЖВМ и МФ, 1975, 15, N5, с.1209–1221.
8. В.Е. Трощев. Решение кинетического уравнения и уравнений квазидиффузии по согласованным разностным схемам. – Численные методы решения задач математической физики (дополнение к ЖВМ и МФ, 6, № 4). М.: Наука, 1966. С.177-185.
9. Л.П. Басс, А.М. Волощенко, Т.А. Гермогенова. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. ИПМ АН СССР, М., 1986.
10. Carlson B.G. A method of characteristics and other improvements in solution methods for the transport equation. Nuclear science and engineering: 61, 408-425 (1976).
11. В.А. Елесин, В.Е. Трощев, В.Ф. Юдинцев, В.И. Федянин – Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения. Сб.: Комплексы программ математической физики, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1972, 18–23.
12. В.Я. Гольдин, А.В. Колпаков, А.В. Мисюрев. Решение нестационарного уравнения переноса без явного выделения фронта. – Препринт ИПМ АН СССР N68, 1983.
13. А.Д. Гаджиев, И.А. Кондаков, В.Н. Писарев, О.И. Стародумов, А.А. Шестаков. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией для численного решения уравнения переноса нейтронов. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып.4. с.13–24.
14. О.С. Широковская. Об одной модификации DS_n -метода. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып.1. с.24–29.
15. С.В. Мжачих, Е.В. Грошев, В.Ф. Юдинцев. О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^\gamma$ -схем для сферически-симметричного уравнения переноса. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып.2. с.21–31.
16. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. – Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, - 158 с.
17. О.В. Бутнева, Ю.М. Матвеев. Численное сравнение дискретной и непрерывной аппроксимаций S_n -метода решения сферически-симметричного уравнения переноса. ВАНТ, Серия: Методики и программы численного решения задач математической физики, 1983, вып.3, С.36-40.
18. Трощев В.Е., Нифанова А.В., Трощев Ю.В. Характеристический подход к аппроксимации законов сохранения в кинетических уравнениях переноса излучений. ДАН 2004, т394, N4, стр.454-458.

19. Е.В. Грошев, А.М. Пастушенко, В.Ф. Юдинцев. Об одной трехточечной разностной схеме с весовым множителем для уравнения переноса. – Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып.2. С.87–96.
20. W.H. Reed. New Difference Schemes for the Neutron Transport Equation. Nucl. Sci. Eng., 46, 1971, p.309-315
21. С.Р. Меркулова, В.Е. Трощев. Монотонные разностные схемы для уравнения переноса и метод их построения. Препринт ИАЭ им. И.В. Курчатова, N5458/16, М., 1992.
22. В.Е. Трощев, А.В. Нифанова. Построение и исследование разностных схем для уравнения переноса первого и второго порядка в плоском слое. Препринт ТРИНИТИ N0052–А,(1999), 6с.
23. Трощев В.Е., Трощев Ю.В. Монотонные разностные схемы с весом для уравнения переноса в плоском слое. – Математическое моделирование, т. 15, № 1, 2003, с. 3-13.

Основные публикации по теме диссертации

1. Трощев В.Е., Нифанова А.В., Трощев Ю.В. Характеристический подход к аппроксимации законов сохранения в кинетических уравнениях переноса излучений. ДАН 2004, т394, N4, стр.454-458.
2. В.Е. Трощев, А.В. Нифанова. Подход характеристических трубок к анализу DSn-метода и построение новых разностных схем на Sn-сетках. – Математическое моделирование, т. 18, № 7, 2006, с. 24-42.
3. В.Е. Трощев, А.В. Нифанова. Построение и исследование разностных схем для уравнения переноса первого и второго порядка в плоском слое. Препринт ТРИНИТИ N0052–А,(1999), 6с.
4. А.В. Нифанова, В.Е. Трощев. Нелинейная монотонная схема типа DSn-метода для уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2001, сборник научных трудов, т.7, М., 2001, с.85–85.
5. А.В. Нифанова, В.Е. Трощев. Обобщение метода характеристических трубок на Sn-сетки для сферически-симметричного уравнения переноса. Препринт ТРИНИТИ N0097–А,(2002), 16с.
6. А.В. Нифанова. Характеристический подход к аппроксимации сферического уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2003, сборник научных трудов, т.7, М., 2003, с.107–108.
7. А.В. Нифанова, В.Е. Трощев. О методах распределения полного потока в схемах для сферического уравнения переноса. Научная сессия МИФИ–2004, сборник научных трудов, т.7, М., 2004, с.98–99.
8. В.Е. Трощев, А.В. Нифанова. Характеристический анализ непрерывного Sn-метода. Научная сессия МИФИ–2007, сборник научных трудов, т.7, М., 2007, с.100–101.