На правах рукописи

СОЛОВЬЕВ ВЯЧЕСЛАВ ВИКТОРОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена на кафедре Высшей математики Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор, «Институт проблем безопасного развития атомной энергетики» РАН Вабищевич Пётр Николаевич

Доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК МГУ Ильинский Анатолий Серафимович

Доктор физико-математических наук, профессор «Белгородского государственного национального исследовательского университета» Солдатов Александр Павлович

Ведущая организация: Национальный исследовательский университет «МЭИ» (Московский энергетический институт)

Защита диссертации состоится 15.октября 2014 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 при Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ» по адресу: 115409, Москва, Каширское шоссе, д.31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НИЯУ «МИФИ» и на сайте ods.mephi.ru

Автореферат разослан « » 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор А.С.Леонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важнейшей характеристикой любой математической модели, описывающей то или иное физическое явление, является вопрос о корректной разрешимости этой математической модели, т.е. вопрос о существовании и единственности решения в рамках рассматриваемой модели, а также вопрос об устойчивости решения к малым (в том или ином смысле) изменениям входных данных. Наличие указанных свойств у выбранной математической модели физического явления является важнейшим фактом, подтверждающим адекватность этой модели описываемому физическому явлению. Кроме того, наличие таких свойств открывает путь к созданию методов нахождения приближенного решения для этой модели.

Изученные в диссертации постановки обратных задач для уравнений эллиптического и параболического типов возникли в результате естественного развития теории обратных и некорректных задач, возникшей из непосредственных требований практики и давшей новую трактовку понятию корректности математической модели. Именно появление этой теории вызвало интерес к изучению неклассических постановок задач (включая обратные задачи) для уравнений математической функции, ранее считавшихся не имеющими смысла. Это направление в математической физике возникло и получило свое развитие в работах А.Н. Тихонова[1], А.А. Самарского[2], В.А. Ильина[3], М.М. Лаврентьева[4], Е.И. Моисеева[5], А.В. Би-

---

[1] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач// ДАН СССР, 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.

[2] Вабицевич П.Н., Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2007.

[3] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным уравнением на двух концах за произвольный промежуток времени// Дифференциальные уравнения, 1999. Т. 35. № 1. С. 1517–1534.

[4] Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа// Изв. АН СССР, сер. Математика, 1956. Т. 20. № 6. С. 819–842.

цадзе[6], В.К. Иванова[7], В.Г. Романова[8], А.И. Прилепко[9] и их учеников и последователей.

Исследования по обратным задачам математической физики, кроме выше упомянутых математиков, проводились в работах А.М. Алифанова , А.Х. Амирова , Ю.С. Аниканова , Н.Я. Безнощенко, Ю.Я. Белова, А.Л. Бухгейма, П.Н.Вабищевича, В.М. Волкова, В.Б. Гласко, Н.Л. Гольдман, А.В. Гончарского, А.М. Денисова, В.И. Дмитриева, А.С. Ильинского, В.М. Исакова, А.Д. Искендерова, В.Л. Камынина, М.В. Клебанова, А.И. Кожанова, А.Б. Костина, М.М. Лаврентьева, Д.Г. Орловского, С.Г. Пяткова, В.В. Соловьёва, И.В. Тихонова, Д.С. Ткаченко, А. Хайдарова, А.Ю. Щеглова, С.Д. Эйдельмана, В.Г. Яхно, I.R. Cannon, A. Lorenci, N.S. Pillant, W. Rundell и других авторов. Подробный обзор этих работ приведён в книге А.И. Прилепко[10] (по состоянию на 2000г.), а также в более поздней книге, V. Isakov[11] (2006г.) и соответствующих ссылках в статьях приведённых в конце автореферата.

Важнейшим вопросом, возникающим при решении обратных задач определения коэффициентов в уравнениях с частными производными, которому и посвящена диссертация, является вопрос о нахождении достаточных условий на заданные функции при которых существуют единственные решения этих обратных задач, и они устойчивы к малым изменениям входных данных.

Цель работы. Главной целью работы является решение проблемы важной для построения теории обратных задач и для прак-

---

[5] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О граничном уравнении на одном конце процессом, описываемом телеграфным уравнением// Докл. РАН, 2002. Т. 387. № 5. С. 600–603.

[6] Бицадзе А.В., Салахетдинов М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа//Сибирский мат. журн., 1961. Т. 2. №1. С. 7–19.

[7] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

[8] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

[9] Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала// Математич. заметки, 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.

[10] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New-York–Basel: Marsel Dekker Inc., 2000.

[11] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New-York: Springer, 2006.

тического решения различных обратных задач, возникающих в приложениях теории уравнений с частными производными – получение достаточных условий, гарантирующих существование и единственность решений изучаемых обратных задач. При выполнении найденных автором достаточных условий на коэффициенты уравнений, области рассмотрения обратных задач и функции, заданные при постановке обратных задач, изученные обратные задачи становятся корректно разрешимыми. Устойчивость к малым изменениям входных данных доказана в указываемых функциональных пространствах Гёльдера. Все указанные автором условия корректной разрешимости обратных задач, как правило, легко проверяемы.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Поставлена и изучена обратная задача определения источника для общего линейного равномерно эллиптического уравнения в области специального вида (удовлетворяющей условию (А)), с переопределением внутри области. Для этой задачи доказана справедливость альтернативы Фредгольма в различных пространствах Гёльдера.

2. При некоторых дополнительных предположениях о структуре равномерно эллиптического оператора, области рассмотрения обратной задачи и заданных функциях, для обратной задачи с переопределением внутри области получены различные достаточные условия единственности решения этой обратной задачи. Полученные достаточные условия носят как глобальный так и локальный характер (локальность по одной из осей координат и т.д.) и, сформулированы для различных предположений о гладкости коэффициентов уравнения и границы области.

3. На основе доказанной альтернативы Фредгольма и полученных достаточных условиях единственности решения получен ряд теорем, дающих достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части равномерно эллиптического уравнения с переопределением внутри области. При выполнении этих достаточных условий получены оценки устойчивости к малым изменениям входных данных для исследуемых обратных задач в различных пространствах Гёльдера.

4. На основе результатов, полученных для обратных задач с переопределением внутри области, проведено рассмотрение обратной задачи определения источника в равномерно эллиптическом уравнении с переопределением на границе области. Для этой задачи также доказана справедливость альтернативы Фредгольма, указаны различные достаточные условия единственности ее решения и, как следствие справедливости альтернативы Фредгольма, получен ряд теорем, гарантирующих существование единственного решения обратной задачи и его устойчивость к малым изменениям входных данных в различных функциональных пространствах .

5. Рассмотрена обратная задача определения коэффициента в равномерно эллиптическом уравнении с переопределением внутри области. Для этой задачи получены глобальные условия единственности ее решения для различных типов областей и в различных пространствах Гёльдера. Для случая цилиндра доказаны достаточные условия существования решения этой задачи и условия ее однозначной разрешимости.

6. Изучена обратная задача определения коэффициента в равномерно эллиптическом уравнении с переопределением на границе. Для случая цилиндра получены глобальные достаточные условия существования единственного решения этой обратной задачи.

7. Рассмотрена обратная задача определения источника для равномерно параболического уравнения общего вида в цилиндре с переопределением на верхней крышке (финальным переопределением). Для этой обратной задачи доказана справедливость альтернативы Фредгольма в пространствах Гёльдера.

8. При различных дополнительных предположениях о коэффициентах равномерно параболического уравнения получены различные достаточные условия единственности решения обратной задачи определения правой части этого уравнения. Полученные условия являются как глобальными (ограничения на знаки заданных функций и их производных), так и локальными (малость области по одной из осей координат и т.д.).

9. На основе полученных достаточных условий единственности решения обратной задачи определения правой части равномерно параболического уравнения и доказанной ранее альтернативы Фредгольма для этой задачи получены различные достаточные

условия однозначной разрешимости этой обратной задачи в пространствах Гёльдера.

10. Рассмотрена обратная задача определения коэффициента в равномерно параболическом уравнении с финальным переопределением. Для этой задачи получены различные достаточные условия единственности ее решения. При некоторых дополнительных ограничениях доказана теорема существования и единственности решения указанной обратной задачи.

11. Для задачи определения коэффициента в равномерно параболическом квазилинейном уравнении в цилиндре с финальным переопределением получены различные достаточные условия существования решения.

12. Рассмотрена обратная задача определения источника для равномерно параболического уравнения с переопределением в фиксированных пространственных точках. Доказана единственность решения этой обратной задачи для случая нелинейного параболического уравнения самого общего вида. В линейном и квазилинейном случаях для этой задачи доказана однозначная разрешимость. Рассмотрены случаи задачи Коши и краевых задач для нелинейного параболического уравнения.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер и создает основу для дальнейших исследований рассмотренных обратных задач в направлении создания эффективных методов нахождения их приближенных решений. Достаточные условия однозначной разрешимости обратных задач, полученные в диссертации, носят ясный и понятный характер. Проверка этих условий является простой – достаточно проверить знаки некоторых заданных при постановке обратной задачи функций и их производных или величину некоторых постоянных вычисляемых по четко указываемому правилу.

Материал диссертации представляет интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений с частными производными и специалистов, занимающихся математическим моделированием физических процессов, описываемых уравнениями эллиптического и параболического типов. Работа может быть востребована во многих отечественных и международных научных центрах, ведущих исследования в области механики сплошных сред, физики плазмы, физической кинетики и многие других разделов макроскопической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации с полными доказательствами докладывалась автором на семинаре мехмата МГУ. «Обратные задачи анализа, математической физики и естествознания» под руководством акад. В.А. Садовничего и проф. А.И. Прилепко. В разные годы основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на различных международных конференциях, проводимых в России (а ранее в СССР). Приведем список выступлений на различных международных конференциях только за последние десять лет:

1) Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», Белгород, 26–31 мая 2013 г.;

2) IV Международная конференция, посвященная 80-летию со дня рождения А.Д. Кудрявцева, Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г.;

3) Тихоновские чтения. Научная конференция, Москва, ВМК МГУ, 14 июня 2012 г.

4) Международная конференция, посвященная 110 годовщине со дня рождения И.Г. Петровского, Москва, 28 мая – 4 июня 2011 г.;

5) V Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 14–18 мая 2011 г.;

6) Международная конференция «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвященная памяти академика А.А. Самарского, Москва, 16–18 июня 2009 г.;

7) Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их применения», посвященная 70-летию ректора МНУ академика В.А. Садовничего, Москва, МГУ, 30 марта – 2 апреля 2009 г.;

8) III Международная конференция, посвященная 85-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2005 г.;

9) Международная конференция, посвященная памяти И.Г. Петровского, Москва, 21–26 мая 2007 г.;

10) Международная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, 19–25 июня 2006 г.;

11) II Международная конференция, посвященная 80-летию Л.Д. Кудрявцева, Москва, 2003 г.

Публикации. Основные результаты диссертации полностью опубликованы. Всего по теме диссертации опубликовано 56 печатных работ. Список основных 23 работ, в которых опубликованы основные результаты диссертации, приведен в конце автореферата. Из этих работ 19 опубликованы в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК. Из трех совместных работ на защиту выносятся только результаты, полученные лично автором диссертации. Вклад соавтора (А.И. Прилепко) четко оговорен в тексте диссертации.

Структура и объем работы. Полный текст диссертации составляет 291 с. Сначала идет оглавление, затем небольшой технический раздел «Обозначения, соглашения, пространства функций», в котором, для облегчения чтения диссертации, приведены некоторые обозначения, использованные в дальнейшем. Далее следует введение и основной текст диссертации, разбитый на 4 главы.

Главы делятся на параграфы, параграфы – на пункты. Параграфы нумеруются в пределах каждой главы, пункты – в пределах каждого параграфа. Нумерация выделенных формул состоит из трех чисел, разделенных точками. Первая цифра означает номер главы, вторая – номер параграфа, последнее число – номер выделенной формулы в данном параграфе. Теоремы и леммы нумеруются аналогично, т.е. первая цифра означает номер главы, где сформулировано это утверждение, вторая цифра – номер параграфа, третья – номер теоремы или леммы по порядку в этом параграфе. Нумерация следствий ведется отдельно после каждой теоремы или леммы.

Завершает диссертацию список литературы, где сначала в алфавитном порядке приведены работы на кириллице, а затем – на латинице. Библиография содержит 275 наименований.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обсуждаются вопросы, связанные с общей идейной направленностью диссертации и дается краткое обсуждение ее содержания. Сведения исторического и приоритетного характера приводятся в очень ограниченном объеме и предназначены только для предварительной ориентации в ситуации. Подробные сведения о ранее полученных в обсуждаемых вопросах результатах других авторов и сопоставление их с результатами автора диссертации помещены в конце каждой главы.

Основной текст диссертации разбит на четыре главы, каждая их которых посвящена различным, но тесно связанным между собой методами исследования и полученными свойствами, обратным задачам. Приведем здесь наиболее принципиальные результаты, полученные автором диссертации, составляющие основу содержания всей работы. Нумерация приводимых здесь теорем будет совпадать с нумерацией теорем в диссертации. Нумерация же приводимых формул будет сквозной, в отличие от нумерации в диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению обратной задачи определения правой части в равномерно эллиптическом уравнении. Для постановки этой обратной задачи проведем некоторые предварительные построения и приведем необходимые определения. Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, пространство $\mathbb{R}^n$ вложено в евклидово пространство точек $\mathbb{R}^{n+1}$, которые далее будем обозначать $(y, x) = (y, x_1, \dots, x_n)$. Всюду далее $0 < \alpha < 1$ – фиксированное число, $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, числа q, q_1, q_2 удовлетворяют неравенствам $q > 0$, $q_1 < 0 < q_2$. Определим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ цилиндры:

$$Q(q_1,q_2) = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ q_1 < y < q_2,\ x \in D\},$$
$$Q(q) = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ -q < y < q,\ x \in D\}.$$

Боковые поверхности этих цилиндров будем обозначать следующим образом:

$$\Gamma(q_1,q_2) = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ q_1 < y < q_2,\ x \in \partial D\},$$
$$\Gamma(q) = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ -q < y < q,\ x \in \partial D\}.$$

Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет условию (A), если существуют такие числа q, p, $0 < q < p$, что для области Ω выполнены условия $Q(q) \subset \Omega \subset Q(p)$. При этом, если $Q(q_1,q_2) \subset \Omega$, то будем говорить, что область Ω удовлетворяет условию (A) с цилиндром $Q(q_1,q_2)$, и обозначать $\overline{q} = \min\{|q_1|, q_2\}$.

Пусть область Ω удовлетворяет условию (А). Определим необходимые для дальнейших формулировок пространства Гёльдера функций с областями определения $\overline{\Omega}$ по правилу:

$$U_1(\Omega)=\{u\in C(\overline{\Omega}):\exists\ q>0\ \ u\in C^{2,\alpha}(\Omega\cup\Gamma(q))\},$$

$$G(\Omega)=\{g\in C(\overline{\Omega}):\exists\ q>0\ \ g\in C^{\alpha}(\Omega)\cap C^{\alpha}(\overline{Q}(q))\},$$

$$M(\partial\Omega)=\{\mu\in C(\partial\Omega):\exists\ q>0\ \ \mu\in C^{2,\alpha}(\Gamma(q))\}.$$

Определим также множество троек функций $R(\Omega)$ по правилу

$$R(\Omega)=\{(g,\mu,\chi):g\in G(\Omega),\ \mu\in M(\partial D),\ \chi\in C^{2,\alpha}(\overline{D}),$$

$$\chi(x)=\mu(0,x),x\in\partial D\}.$$

Приведем постановку обратной задачи определения источника эллиптического уравнения в области типа (А).

Пусть в замкнутой области $\overline{\Omega}$ определен линейный равномерно эллиптический оператор L следующего вида:

$$(Lu)(y,x)=\left(a_{00}(y,x)u_{yy}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}a_{0i}(y,x)u_{yx_i}(y,x)+b_0(y,x)u_y(y,x)\right)+$$

$$+\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(y,x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(y,x)u_{x_i}(y,x)+c(y,x)u(y,x)\right)=$$

$$=(L_yu)(y,x)+(L_xu)(y,x).$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times C^{\alpha}(\overline{D})$ из условий:

$$\begin{gathered}(Lu)(y,x)=f(x)h(y,x)+g(y,x),\ \ (y,x)\in\Omega,\\ u(y,x)=\mu(y,x),\ \ (y,x)\in\partial\Omega,\end{gathered}\tag{1}$$

$$u(0,x)=\chi(x),\ \ x\in\overline{D}.\tag{2}$$

Вопрос о разрешимости обратной задачи (1)–(2) тесно связан с разрешимостью однородной обратной задачи (1)–(2), т.е. задача определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times C^{\alpha}(\overline{D})$ из условий:

$$\begin{gathered}(Lu)(y,x)-f(x)h(y,x)=0,\ \ (y,x)\in\Omega,\\ u(y,x)=0,\ \ (y,x)\in\partial\Omega,\ \ u(0,x)=0,\ \ x\in\overline{D}.\end{gathered}\tag{3}$$

Задачи (1)–(2), (3) связывает следующее утверждение.

Теорема 1.9.1 (альтернатива Фредгольма для обратной задачи (1)–(2)). Пусть область Ω удовлетворяет условию (А) и условию «внешнего конуса», для коэффициентов строго эллиптического в области Ω оператора L и функции h справедливы условия $a_{ij},b_i,c,h\in C^{\alpha}(\Omega)\cap C^{\alpha}(\bar{Q}(q))\cap C(\bar{\Omega})$, $(a_{ij})_y,(b_i)_y,c_y,h_y\in C^{\alpha}(\bar{Q}(q))$, $i,j=0,1,\ldots,n$, выполнены неравенства $c(y,x)\le 0$, $|h(0,x)|\ge h_0\ge 0$, $(y,x)\in\Omega$. Тогда для обратной задачи (1)–(2) справедливо одно из двух утверждений:

1) обратная задача (1)–(2) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R(\Omega)$ (в частности, если $y\equiv 0$, $\mu\equiv 0$, $\chi\equiv 0$, единственное решение $u\equiv 0$, $f\equiv 0$);

2) однородная обратная задача (3) имеет конечное число линейно независимых решений.

В качестве следствия теоремы 1.9.1 и доказанных в диссертации различных достаточных условий единственности решения обратной задачи (1)–(2) получен ряд достаточных условий однозначной разрешимости для обратной задачи (1)–(2). Приведем здесь некоторые из полученных результатов. Пусть в уравнении (1) равномерно эллиптический оператор L имеет следующий вид:

$$(Lu)(y,x)=a(x)u_{yy}(y,x)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(x)u(y,x).$$

Всюду далее под знаком нормы без дополнительных индексов понимается обычная sup-норма. Тогда для задачи (1)–(2) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.10.1. Пусть область Ω удовлетворяет условию (А) с цилиндром $Q(q_1,q_2)$, $\bar{q}=\min\{|q_1|,q_2\}$, и условию «внешнего конуса», для коэффициентов строго эллиптического в области Ω оператора L справедливы условия: $a,a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha}(\bar{D})$, для функции h справедливы условия $h\in C(\bar{\Omega})\cap C^{\alpha}(\Omega)$, $h,h_y,h_{yy}\in C^{\alpha}(\bar{Q}(q_1,q_2))$, выполнены неравенства $c(x)\le 0$, $|h(0,x)|\ge h_0>0$, $x\in\bar{D}$. Для оператора L выполнено неравенство $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}(x)}{a(x)}\xi_i\xi_j\ge\lambda_0|\xi|^2$, $x\in D$,

$\beta = \left\| \frac{b}{a} \right\| / \lambda_0$, $\lambda_0 > 0$ – фиксированная постоянная, величина γ определяется по формуле $\gamma = \max\left\{ \left\| \frac{h(q_1, .)}{h(0,\cdot)} \right\|, \left\| \frac{h(q_2, .)}{h(0,\cdot)} \right\| \right\}$ и при этом для неё справедливо неравенство $\gamma < 1$.

Пусть выполнено, по крайней мере, одно из двух условий:

1) область D при некотором i, $i \in \{1,...,n\}$ лежит в полосе $0 < x_i < l_i$, при этом для величины l_i выполнено неравенство $l_i < l_*$, где число l_* определяется по формуле

$$l_* = \frac{1}{\beta+1} \ln\left(1 + \frac{(1-\gamma)\lambda_0}{\frac{16}{\bar{q}^2} \left\| \frac{h(\cdot,\cdot)}{h(0,\cdot)} \right\| + \left\| \frac{h_{yy}(\cdot,\cdot)}{h(0,\cdot)} \right\|} \right),$$

2) для коэффициента $c(x)$ справедливо неравенство $c(x)/a(x) \le -æ < 0$, при этом число $æ$ удовлетворяет условиям $æ > æ_0$, где величина $æ_0$ определяется по формуле

$$æ_0 = \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{16}{\bar{q}^2} \left\| \frac{h(\cdot,\cdot)}{h(0,\cdot)} \right\| + \left\| \frac{h_{yy}(\cdot,\cdot)}{h(0,\cdot)} \right\| \right).$$

Тогда обратная задача (1)–(2) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega)$.

В случае, если область Ω есть простейшая область, удовлетворяющая условию (А), цилиндр $\Omega = Q(q_1, q_2)$, будем предполагать, что оператор L в уравнении (1) имеет следующий вид:

$$(Lu)(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(y,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(y,x) + c(x)u(y,x).$$

В этом случае для задачи (1)–(2) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.10.4. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в области Ω оператора L и функции h справедливы условия:

$a, a_y, a_{yy}, h, h_y, h_{yy} \in C^{\alpha}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $a, a_y, h, h_y \in C^{\alpha}(\bar{Q}(q))$, $0 < q \le \bar{q}$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(\bar{D})$, выполнены неравенства $c(x) \le 0$, $a_{yy}(y,x) + c(x) \le 0$, $h(y,x) \ge 0$, $h_{yy}(y,x) \le 0$, $h(0,x) \ge h_0 > 0$, $(y,x) \in \Omega$. Тогда обратная задача (1)–(2) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega)$.

Приведем достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи определения источника для частного случая области с гладкой границей, удовлетворяющей условию (А).

Будем говорить, что область Ω удовлетворяет условию (Б), если на замкнутой области $\bar{D}$ определена такая функция $y = \nu(x)$, $x \in \bar{D}$, для которой справедливо условие $\min\{\nu(x) : x \in \bar{D}\} = \nu_0 > 0$, при этом для области Ω справедливо представление:

$$\Omega = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| < \nu(x),\ x \in D\},$$

и, кроме того, граница области Ω – множество $\partial\Omega$ – является границей класса $C^{2,\alpha}$.

Пусть в уравнении (1) оператор L имеет вид:

$$(Lu)(y,x) = \left(a_{00}(y,x) u_{yy}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(y,x) u_{yx_i}(y,x) + b_0(y,x) u_y(y,x) \right) +$$
$$+ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i}(y,x) + c(y,x) u(y,x) \right).$$

Определим следующее линейное множество троек функций:

$$R_2(\Omega) = \{(g, \mu, \chi) : g \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}),\ \mu \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega),$$
$$\chi \in C^{2,\alpha}(\bar{D}),\ \chi(x) = \mu(0,x),\ x \in \partial D\}.$$

Далее всюду будем использовать обозначение:

$$\Omega_- = \{(y,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : (y,x) \in \Omega,\ y < 0\}.$$

Для формулировки теоремы существования и единственности обратной задачи (1)–(2) в области удовлетворяющей условию (Б) определим следующие функции:

$$h_r(y,x) = [h(y,x) + h(-y,x)]/2,\ \ \mathrm{h}_n(y,x) = [h(y,x) - h(-y,x)]/2,$$

В этом случае для задачи (1)–(2) верна следующая теорема однозначной разрешимости.

Теорема 1.10.7. Пусть область Ω удовлетворяет условию (Б), для коэффициентов строго эллиптического оператора L и функции h справедливы условия: $a_{0i},(a_{0i})_y,b_0,(b_0)_y,c,c_y,h,h_y \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, i = 0, 1, ..., n, $a_{ij},b_i \in C^{\alpha}(\overline{D})$, i,j = 1, ..., n, выполнены следующие неравенства $c(y,x)\le 0,(y,x)\in\Omega$, $|h(0,x)|\ge h_0>0, x\in D$, $(b_0)_y(y,x)+$ $+c(y,x)\le 0$, $c_y(y,x)\ge 0$, $h_r(y,x)(h_r)_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Omega_-$. Тогда, если для оператора L выполнены условия симметрии:

$$a_{00}(y,x)=a_{00}(-y,x),\ a_{0i}(y,x)=-a_{0i}(-y,x),\ i=1,\ldots,n,$$

$$b_0(y,x)=-b_0(-y,x),\ c(y,x)=c(-y,x),\ (y,x)\in\Omega,$$

то для задачи (1)–(2) справедливы следующие утверждения:

1) задача (1)–(2) для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R(\Omega)$ имеет единственное решение – пару функций

$$(u,f)\in U_1(\overline{\Omega})\times C^{\alpha}(\overline{D});$$

2) задача (1)–(2) для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R_2(\Omega)$ имеет единственное решение – пару функций

$$(u,f)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{\alpha}(\overline{D}).$$

Для формулировки теоремы об однозначной разрешимости для обратной задачи (1)–(2) в важном частном случае, когда область Ω есть симметричный относительно плоскости $y=0$ цилиндр, примем следующие дополнительные определения.

Пусть $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<R\}$ – шар в $\mathbb{R}^n$, такой, что $\overline{D}\subset B_R$. Тогда, если $\Omega=(-\overline{q},\overline{q})\times D$ – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, симметричный относительно плоскости $y=0$, будем обозначать $\Omega_R=[-\overline{q},\overline{q}]\times B_R$. В приведенных обозначениях, в предположении, что оператор L имеет тот же вид, что и в теореме 1.10.7, для задачи (1)–(2) будет справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.10.8. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре Ω_R оператора L справедливы условия: $a_{0i},(a_{0i})_y$, $i=0,1,\ldots,n$, $b_0,(b_0)_y$, $c,c_y\in C^{\alpha}(\Omega_R)$, $a_{ij},b_i\in C^{\alpha}(B_R)$, i,j = 1, ..., n, для функции h справедливы включения $h,h_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, выполнены неравенства $c(y,x)\le 0,\ (y,x)\in\Omega_R,\quad (b_0)_y(y,x)+c(y,x)\le 0,$ $c_y(y,x)\ge 0,\quad h_r(y,x)(h_r)_y(y,x)\ge 0,\ |h(0,x)|\ge h_0>0,\ (y,x)\in\Omega_R^-$. Тогда, если для коэффициентов оператора L выполнены условия симметрии:

$$a_{00}(y,x)=a_{00}(-y,x),\ a_{0i}(y,x)=-a_{0i}(-y,x),\ i=1,\ldots,n,$$
$$b_0(y,x)=-b_0(-y,x),\ c(y,x)=c(-y,x),\ (y,x)\in\Omega,$$

то обратная задача (1)–(2) имеет единственное решение – пару функций $(u,f)\in U_1(\Omega)\times C^{\alpha}(\bar{D})$, для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R(\Omega)$.

В качестве следствия сформулированных выше теорем существования и единственности для обратных задач определения источника с переопределением внутри области приведем полученные теоремы разрешимости для обратных задач с переопределением на границе. Для постановки таких задач проведем некоторые предварительные построения. Для любого числа $q>0$ обозначим множества:

$$Q_1(q)=\{(y,x)\in\mathbb{R}^{n+1}:-q<y<0,\ x\in D\},$$
$$\Gamma_1(q)=\{(y,x)\in\mathbb{R}^{n+1}:-q<y\le 0,\ x\in D\},$$
$$\Gamma_0=\{(y,x)\in\mathbb{R}^{n+1}:y=0,\ x\in D\},$$

Будем говорить, что область $\Omega_-\in\mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет условию (B), если существуют такие числа $0<q<p$, что справедливо условие $Q_1(q)\subset\Omega_-\subset Q_1(p)$.

Определим пространство функций с областью определения $\bar{\Omega}_-$, такой, что область Ω_- удовлетворяет условию (B), по правилу

$$U_1(\Omega_-)=\{u\in C(\bar{\Omega}_-):\exists q>0\ u\in C^{2,\alpha}(\Omega_-\cup\Gamma_1(q)\cup\Gamma_0)\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega_-)\times C^{\alpha}(\bar{D})$ из условий

$$(Lu)(y,x)=f(x)h(y,x)+g(y,x),\ (y,x)\in\Omega_-,$$
$$u(y,x)=\mu(y,x),\ (y,x)\in\partial\Omega_-\setminus\Gamma_0,\ u_y(0,x)=0,\ x\in D,\qquad(4)$$
$$u(0,x)=\chi(x),\ x\in\bar{D}.\qquad(5)$$

В уравнении (4) оператор L имеет тот же вид, что и в формулировке теоремы 1.9.1. Однородной задачей для задачи (4)–(5) будем называть задачу (4)–(5) при $\mu=0$, $\chi=0$, $g=0$. В области, удовлетворяющей условию (B), и на ее границе определим следующие множества функций:

$$G(\Omega_-)=\{g\in C(\bar{\Omega}_-):\exists q>0\ g\in C^{\alpha}(\Omega_-\cup\bar{Q}_1(q))\},$$

$$M(\partial\Omega_-)=\{\mu\in C(\partial\Omega_-):\exists q>0\ \mu\in C^{2,\alpha}(\Gamma_1(q)),\ \mu_y(0,x)=0,\ x\in\partial D\}.$$

Чтобы сформулировать альтернативу Фредгольма для обратной задачи (4)–(5), определим следующие линейные множества троек функций:

$$R(\Omega_-)=\{(g,\mu,\chi):\ g\in G(\Omega_-),\ \mu\in M(\partial\Omega_-),$$

$$\chi\in C^{2,\alpha}(\bar{D}),\ \chi(x)=\mu(0,x),\ x\in\partial D\}.$$

Для обратной задачи (4)–(5) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.12.1 (альтернатива Фредгольма для обратной задачи (4)–(5)). Пусть область Ω_- удовлетворяет условию (B) и условию внешнего конуса, для коэффициентов строго эллиптического в области Ω_- оператора L и функции h справедливы условия: $a_{ij},b_i,c,h\in C^{\alpha}(\Omega_-)\cap C^{\alpha}(\bar{Q}_1(q))\cap C(\bar{\Omega}_-)$, $(a_{ij})_y,(b_i)_y,c_y,h_y\in C^{\alpha}(\bar{Q}_1(q))$, выполнены неравенства $c(y,x)\le 0$, $|h(0,x)|\ge h_0>0$, $(y,x)\in\Omega_-$, и условия симметрии $a_{0i}(0,x)=0$, $i=1,\dots,n$, $b_0(0,x)=0$, $(a_{ij})_y(0,x)=0$, $(b_i)_y(0,x)=0$, $i,j=0,1,\dots,n$, $c_y(0,x)=0$, $h_y(0,x)=0$, $x\in\bar{D}$, то для обратной задачи (4)–(5) справедливо одно из двух утверждений:

1) задача (4)–(5) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R(\Omega_-)$ (в частности, при $g\equiv 0$, $\mu\equiv 0$, $\chi\equiv 0$ единственное решение $u\equiv 0, f\equiv 0$);

2) однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений.

В качестве следствия теоремы 1.12.1 для задачи (4)–(5) сформулируем различные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (4)–(5). В случае простейшей области, удовлетворяющей условию (B), для цилиндра $\Omega_-=Q_1(q)$, можно сформулировать достаточные условия существования единственного решения задачи (4)–(5), носящие характер ограничений на знаки заданных функций. Пусть оператор L в уравнении (4) имеет вид:

$$(Lu)(y,x)=a(y,x)u_{yy}(y,x)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+$$
$$+c(x)u(y,x).$$

В этом случае для обратной задачи (4)–(5) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.13.4. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре $\Omega_-=Q_1(\overline{q})$ оператора L и функции h справедливы следующие условия a, a_y, a_{yy}, $h,h_y,h_{yy}\in C^{\alpha}(\Omega_-)\cap C(\overline{\Omega}_-)$, a, a_y, $a_{yy}, h,h_y,h_{yy}\in C^{\alpha}(\overline{Q}_1(q))$, $q\le\overline{q}$, $a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha}(\overline{D})$, выполнены неравенства $c(x)\le 0$, $a_{yy}(y,x)+c(x)\le 0$, $h(y,x)\ge 0$, $h_{yy}(y,x)\le 0$, $h(0,x)\ge h_0>0$, $(y,x)\in\Omega_-$, и дополнительные условия $h_y(0, x) = 0$, $a_y(0, x) = 0$, $x\in D$. Тогда обратная задача (4)–(5) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g,\mu,\chi)\in R(\Omega_-)$.

В случае, если коэффициенты оператора L определены в некотором шаре, содержащем область D, можно доказать теорему существования и единственности для более общего вида оператора L, чем в теореме 1.13.4 и при более общих условиях. Пусть оператор L в уравнении (4) имеет вид:

$$(Lu)(y,x)=\left(a_{00}(y,x)u_{yy}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}a_{0i}(y,x)u_{yx_i}(y,x)+b_0(y,x)u_y(y,x)\right)+$$
$$+\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(y,x)u(y,x)\right).$$

Будем предполагать, что $D\subset\overline{B}_R$, цилиндр $\Omega_R^-=[-q,0]\times B_R$. В этом случае для обратной задачи (4)–(5) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.13.7. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре Ω_R^- оператора L и функции h справедливы условия $a_{0i},(a_{0i})_y$, $i=0,1,\dots,n$, $b_0,(b_0)_y$, $c,c_y\in C^{\alpha}(\Omega_R^-)$, a_{ij}, $b_i\in C^{\alpha}(B_R)$, $i,j=1,\dots,n$, $h,h_y\in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_-)$, выполнены неравенства $c(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega_R^-$, $c_y(y,x)\ge 0$, $h(y, x)\, h_y(y, x)\ge 0$, $|h(0, x)|\ge h_0>0$, $(y, x)\in$

$\in \Omega_-$, выполнены условия симметрии: $(a_{00})_y(0, x) = 0$, $a_{0i}(0, x) = 0$, $i = 1, ..., n$, $b_0(0, x) = 0$, $c_y(0, x) = 0$, $h_y(0, x) = 0$, $x \in D$. Тогда обратная задача (4)–(5) имеет единственное решение – пару функций $(u, f) \in U_1(\Omega_-) \times C^\alpha(\overline{D})$, для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega_-)$.

Приведем теорему существования и единственности, доказанную в предположении, что граница области Ω_- при $y < 0$ является гладкой. Будем говорить, что область $\Omega_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет условию (Г), если на замкнутой области $\overline{D}$ определена такая непрерывная функция $y = \nu(x)$, для которой справедливо условие

$$\max\{\nu(x) : x \in \overline{D}\} = -\nu_0 < 0,$$

при этом для области Ω_- справедливо представление

$$\Omega_- = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \nu(x) < y < 0, \ x \in D\},$$

часть границы области Ω_-, расположенная в пространстве $y < 0$ является границей класса $C^{2,\alpha}$.

Пусть оператор L в уравнении (4) имеет тот же вид, что и в теореме 1.13.7. Тогда для обратной задачи (4)–(5) справедлива следующая теорема существования и единственности.

Теорема 1.13.11. Пусть область Ω_- удовлетворяет условию (Г), для коэффициентов строго эллиптического в области Ω_- оператора L и функции h справедливы включения $a_{0i}, (a_{0i})_y$, $i = 0, 1, ..., n$, $b_0, (b_0)_y$, $c, c_y, h, h_y \in C^\alpha(\overline{\Omega}_-)$, a_{ij}, $b_i \in C^\alpha(\overline{D})$, $i, j = 1, ..., n$, выполнены неравенства $c(y, x) \le 0$, $(b_0)_y(y, x) + c(y, x) \le 0$, $c_y(y, x) \ge 0$, $|h(0, x)| \ge \ge h_0 > 0$, $h(y, x)h_y(y, x) \ge 0$, $(y, x) \in \Omega_-$. Тогда, если выполнены следующие дополнительные условия $(a_{00})_y(0, x) = 0$, $h_y(0, x) = 0$, $a_{0i}(0, x) = 0$, $i = 1, ..., n$, $b_0(0, x) = 0$, $x \in D$, то обратная задача (4)–(5) имеет единственное решение для любой тройки функций $(g, \mu, \chi) \in R(\Omega_-)$.

Задачи определения источника для эллиптического уравнения с переопределением внутри области были поставлены и изучены В.В. Соловьевым. Задачи определения источника для эллиптического уравнения с переопределением на границе в цилиндре изучались в работах М.М. Лаврентьева[12] (в случае $h = h(t)$), А.Д. Искендерова[13] (случай $h(y, x) \equiv 1$), Д.Г. Орловского[14] (в предположении, что L – самосопряженный оператор с коэффициентами, не зависящими от y), А.И. Прилепко[15] (в том же предположении и дополнительно $f(x) = 0$, $x \in \partial D$, $\mu = 0$), О.Ю. Эмануилова[16] (в предположении $h(y, x) = h(y)$, $\mu = 0$), А. Хайдарова[17] (в предположении $f(x) = 0$, $x \in \partial D$, $\mu = 0$). Полученные в этих работах различные достаточные условия единственности и существования решений указанных обратных задач согласуются с условиями теоремы 1.13.7 и являются ее частным случаем. Более подробный обзор истории вопроса и примеры практических приложений даются в работе А.И. Прилепко[18].

Глава 2 диссертации посвящена изучению обратной задачи определения коэффициента в строго эллиптическом уравнении. В отличие от задачи определения источника эта задача является нелинейной, поэтому ее изучение потребовало других методов исследования. Пусть область Ω удовлетворяет условию (Б), и, в области Ω определен равномерно эллиптический оператор L следующего вида:

$$(Lu)(y,x) = \left(a_{00}(y,x)u_{yy}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(y,x)u_{yx_i}(y,x) + b_0(y,x)u_y(y,x) \right) +$$

$$+ \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(y,x) + c(y,x)u(y,x) \right).$$

---

[12] Лаврентьев М.М., Романов Н.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.

[13] Искендеров А.Д., Татев Р.Г. Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений // Вопросы прикладной математики и кибернетики, 1979. № 1.

[14] Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференциальные уравнения, 1990. Т. 28. № 9. С. 1614–1621.

[15] Прилепко А.И. Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1992.

[16] Эмануилов О.Ю. Один класс обратных задач для получения эллиптических и параболических уравнений // Тр. Московского математического общества. Т. 35. М.: Изд. МГУ, 1994. С. 285–309.

[17] Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений //Дифференцальные уравнения, 1987. Т. 23. № 7. С. 1376–1383.

[18] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New-York–Basel: Marsel Dekker Inc., 2000.

Определим следующее пространство Гёльдера:

$$F_1^-(D)=\{f\in C^\alpha(\bar{D}): f(x)\le 0,\ x\in D\}.$$

В области Ω рассмотрим задачу определения пары функций $(u,f)\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})\times F_1^-(D)$, из условий:

$$-(Lu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega,$$
$$u(y,x)=\mu(y,x),\quad (y,x)\in\partial\Omega, \tag{6}$$
$$u(0,x)=\chi(x),\quad x\in\bar{D}. \tag{7}$$

Для формулировки теоремы единственности решения обратной задачи (6)–(7) определим следующие функции:

$$g_r(y,x)=[g(y,x)+g(-y,x)]/2,\quad g_n(y,x)=[g(y,x)-g(-y,x)]/2,$$
$$\mu_r(y,x)=[\mu(y,x)+\mu(-y,x)]/2,\quad \mu_n(y,x)=[\mu(y,x)-\mu(-y,x)]/2.$$

Для обратной задачи (6)–(7) справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 2.1.2. Пусть область Ω удовлетворяет условию (Б), для коэффициентов строго эллиптического в области Ω оператора L и функций g, μ справедливы условия a_{0i}, $i=0,1,\dots,n$, $b_0,c,g\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\mu\in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $a_{ij},b_i\in C^\alpha(\bar{D}),i,j=1,\dots,n$, $(a_{0i})_y$, $i=0,1,\dots,n$, $(b_0)_y,c_y$, $(g_r)_y\in C^\alpha(\bar{\Omega}_-)$ выполнены неравенства $c(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega$, $c_y(y,x)\ge 0$, $g_r(y,x)\ge 0$, $(g_r)_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Omega_-$, функция μ удовлетворяет следующим условиям: $\mu(y,x)=0$, $y\le -\nu_0$, $(y,x)\in\partial\Omega_-$, $\mu_r(y,x)\ge 0$, $(\mu_r)_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Gamma_1(\nu_0)$, выполнены условия симметрии $a_{00}(y,x)=a_{00}(-y,x)$, $a_{0i}(y,x)=-a_{0i}(-y,x)$, $i=1,\dots,n$, $b_0(y,x)=-b_0(-y,x)$, $c(y,x)=c(-y,x)$, $(y,x)\in\Omega$. Тогда, если хотя бы одна из функций μ_r, g_r не тождественный нуль, то не могут существовать два различных решения обратной задачи (6)–(7).

Рассмотрим обратную задачу (6)–(7) в важном частном случае цилиндра, т.е. $\Omega=Q(q_1,q_2)$. Функцию u – решение прямой задачи (6) будем считать принадлежащей следующему пространству Гёльдера:

$$\bar{U}(\Omega)=\{u\in C(\bar{\Omega}):\ u_{yy}\in C(\bar{\Omega}),\ u\in C^{2,\alpha}(\Omega)\}.$$

В рассматриваемом случае цилиндра будем предполагать, что оператор L в уравнении (6) имеет следующий вид:

$$(Lu)(y,x)=a(y,x)u_{yy}(y,x)+\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(x)u(y,x)\right).$$

Для обратной задачи (6)–(7) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 2.2.1. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре $\Omega=Q(q_1,q_2)$ оператора L и функций g, μ справедливы включения: $a,a_y,a_{yy},g,g_y,g_{yy}\in C^{\alpha}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $a_{ij},b_i,c\in$ $\in C^{\alpha}(D)\cap C(\overline{D})$, $\mu,\mu_y,\mu_{yy}\in C(\overline{\Gamma}(q_1,q_2))$, выполнены неравенства $c(x)\le 0$, $x\in D$, $c(x)+a_{yy}(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega$, $g(y,x)\ge 0$, $g_{yy}(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega$, $\mu(y,x)\ge 0$, $\mu_{yy}(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Gamma(q_1,q_2)$, при этом хотя бы одна из функций g, μ не является тождественным нулём. Тогда обратная задача (6)–(7) не может иметь двух различных решений в указанном классе функций.

В п. 2.3 диссертации рассмотрен вопрос о единственности решения обратной задачи (6)–(7) в важном частном случае цилиндра – в цилиндре, симметричном относительно плоскости $y=0$, т.е. $\Omega=Q(q)$, $q<0$. В этом случае можно предполагать, что оператор L имеет более общий вид:

$$(Lu)(y,x)=\left(a_{00}(y,x)u_{yy}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}a_{0i}(y,x)u_{yx_i}(y,x)+b_0(y,x)u_y(y,x)\right)+$$

$$+\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(y,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(y,x)+c(y,x)u(y,x)\right).$$

Для симметричного по переменной y цилиндра рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\times F_1^{-}(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega,$$

$$u(y,x)=\mu(y,x),\quad (y,x)\in\overline{\Gamma}(q),\quad u(q,x)=u(-q,x)=0,\quad x\in\overline{D}, \tag{8}$$

$$u(0,x)=\chi(x),\quad x\in\overline{D}. \tag{9}$$

Для обратной задачи (8)–(9) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 2.3.2. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре $\Omega_R=[-q,q]\times B_R$ оператора L справедливы условия: a_{0i}, $i=0, 1, \ldots, n$, b_0, $c\in C^\alpha(\Omega_R)$, $a_{ij},b_i\in C^\alpha(B_R)$, $i,j=1, \ldots, n$, $(a_{0i})_y,(b_0)_y,c_y\in C^\alpha(\overline{\Omega}_-)$, $i=0, 1, \ldots, n$, выполнены следующие неравенства и дополнительные условия: $c(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega_R$, $(b_0)_y(y,x)+c(y,x)\le 0$, $c_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Omega_-$, $a_{00}(y,x)=a_{00}(-y,x)$, $a_{0i}(y,x)=-a_{0i}(-y,x)$, $i=1, \ldots, n$, $b_0(y,x)=-b_0(-y,x)$, $c(y,x)=$ $=c(-y,x)$, $(y,x)\in\Omega_R$. Тогда, если для функций μ, g справедливы включения $\mu\in C^{2,\alpha}(\overline{\Gamma}(q))$, $g\in C^\alpha(\Omega_R)$, $(g_r)_y\in C^\alpha(\overline{\Omega}_-)$, выполнены неравенства $g_r(y,x)\ge 0$, $(g_r)_y(y,x)\ge 0$ $(y,x)\in\Omega_-$, $\mu_r(y,x)\ge 0$, $(\mu_r)_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Gamma_1(q)$, хотя бы одна из функций g_r, μ_r не тождественный нуль, то не могут существовать двух различных решений задачи (8)–(9).

Далее в параграфе 2.4 изучается обратная задача определения коэффициента перед u в эллиптическом уравнении с переопределением на границе.

В области, удовлетворяющей условию (Г), рассмотрим задачу определения пары функций $(u,f)\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_-)\times F_1^-(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega_-,$$

$$u(y,x)=\mu(y,x),\quad (y,x)\in\partial\Omega_-\setminus\Gamma_0,\quad u_y(0,x)=0,\quad x\in\overline{D}, \tag{10}$$

$$u(0,x)=\chi(x),\quad x\in\overline{D}. \tag{11}$$

Для обратной задачи (10)–(11) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 2.4.2. Пусть область Ω_- удовлетворяет условию (Г), для коэффициентов строго эллиптического в области Ω_- оператора L и функций g, μ справедливы условия: a_{0i}, $(a_{0i})_y$, b_0,$(b_0)_y$, c, c_y, g, $g_y\in$ $\in C^\alpha(\overline{\Omega}_-)$, $i=0,1,\ldots,n$, $a_{ij},b_i\in C^\alpha(\overline{D})$, $i,j=1,\ldots,n$, $\mu\in C^{2,\alpha}(\partial\Omega_-\setminus\Gamma_0)$, выполнены следующие неравенства: $c(y,x)\le 0$, $(b_0)_y(y,x)+$ $+c(y,x)\le 0$, $g(y,x)\ge 0$, $g_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Omega_-$, функция μ удовлетворяет условиям $\mu(y,x)=0$, $y \le -\nu_0$, $(y,x)\in\partial\Omega_-$, $\mu(y,x)\ge 0$, $\mu_y(y,x)\ge 0$, $(y,x)\in\Gamma_1(\nu_0)$, выполнены условия симметрии: $a_{0i}(0,x)=0$, $i=1,\ldots,n$, $b_0(0,x)=0$, $x\in\bar{D}$. Тогда, если хотя бы одна из функций g, μ не тождественный нуль, то не может существовать двух различных решений задачи (10)–(11) в указанном классе функций.

Пусть область Ω_- есть цилиндр $Q_1(q)$. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in\bar{U}(\Omega_-)\times F^-(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega_-,$$

$$u(y,x)=\mu(y,x),\quad (y,x)\in\bar{\Gamma}_1(q),\quad u(-q,x)=0,\quad x\in D,$$

$$u_y(0,x)=0,\quad x\in D, \tag{12}$$

$$u(0,x)=\chi(x),\quad x\in\bar{D}. \tag{13}$$

Для обратной задачи (12)–(13) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 2.4.4. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре Ω_- оператора L и функций g, μ справедливы условия: $a,a_{yy},g,g_{yy}\in C^{\alpha}(\Omega_-\cup\Gamma_0)\cap C(\bar{\Omega})$, $a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha}(D)\cap C(\bar{D})$, $\mu,\mu_{yy}\in C^{\alpha}(\bar{\Gamma}_1(q))$, выполнены неравенства $c(x)\le 0$, $a_{yy}(y,x)+c(x)\le 0$, $g_{yy}(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Omega_-$, $\mu(y,x)\ge 0$, $\mu_{yy}(y,x)\le 0$, $(y,x)\in\Gamma_1(q)$ и дополнительные условия $a_y(0,x)=0$, $g_y(0,x)=0$, $x\in D$, $\mu_y(0,x)=0$, $x\in\partial D$. Тогда, если хотя бы одна из функций g, μ не тождественный нуль, то обратная задача (12)–(13) не может иметь двух различных решений в указанном классе функций.

В цилиндре $\Omega_-=Q_1(q)$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)=C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}_-)\times F_1^-(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x)=f(x)u(y,x)+g(y,x),\quad (y,x)\in\Omega_-,$$

$$u(y,x)=\mu(y,x),\quad (y,x)\in\bar{\Gamma}_1(q),\quad u(-q,x)=0,$$

$$u_y(0,x)=0,\quad x\in\bar{D}, \tag{14}$$

$$u(0,x)=\chi(x),\quad x\in\bar{D}. \tag{15}$$

Для обратной задачи (14)–(15) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 2.4.6. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре $\Omega_R^-=[-q,0]\times B_R$ оператора L справедливы условия

a_{0i}, $i = 0, 1, ..., n$, $b_0, c \in C^{\alpha}(\Omega_R^-)$, $a_{ij}, b_i \in C^{\alpha}(B_R)$, $i,j = 1, ..., n$, $(a_{0i})_y$, $(b_0)_y, c_y \in C^{\alpha}(\Omega_R^-)$, $i = 0, 1, ..., n$, выполнены следующие неравенства и дополнительные условия: $c(y,x) \le 0$, $(b_0)_y(y,x) + c(y,x) \le 0$, $c_y(y,x) \ge 0$, $(y,x) \in \Omega_R^-$, $(a_{00})_y(0,x) = 0$, $c_y(0,x) = 0$, $a_{0i}(0,x) = 0$, $i = 1, ..., n$, $b_0(0,x) = 0$, $x \in D$. Тогда, если для функций μ, g справедливы включения $\mu \in C^{2,\alpha}(\overline{\Gamma}_1(q))$, $g, g_y \in C^{\alpha}(\Omega_R^-)$, выполнены следующие неравенства и дополнительные условия $g(y,x) \ge 0$, $g_y(y,x) \ge 0$, $(y,x) \in \Omega_-$, $\mu(y,x) \ge 0$, $\mu_y(y,x) \ge 0$, $(y,x) \in \overline{\Gamma}_1(q)$, $g_y(0,x) = 0$, $x \in D$, $\mu_y(0,x) = 0$, $x \in D$, при этом хотя бы одна из функций μ, g не тождественный нуль, то не может существовать двух различных решений обратной задачи (14)–(15) в указанном классе функций.

Для случая, когда область Ω – цилиндр, для обратной задачи определения коэффициента удалось получить достаточные условия существования решения. Изложению этого вопроса посвящен параграф 2.5. В цилиндре $\Omega = Q(q_1, q_2)$ рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in \overline{U}(\Omega) \times F^-(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \quad (y,x) \in \Omega,$$

$$u(y,x) = \mu(y,x), \quad (y,x) \in \overline{\Gamma}(q_1, q_2),$$

$$u(q_1,x) = 0, \; u(q_2,x) = 0, \quad x \in \overline{D}, \tag{16}$$

$$u(0,x) = \chi(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{17}$$

В уравнении (16) оператор L имеет следующий вид:

$$(Lu)(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(y,x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(y,x) + c(x)u(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) + (L_x u)(y,x).$$

Определим для обратной задачи (16)–(17) понятие условий согласования при $y = q_1$, $y = 0$, $y = q_2$. Будем говорить, что для задачи (16)–(17) выполнены условия согласования, если для функций μ, χ, g выполнены следующие условия:

$$\mu(q_1,x) = 0, \; \mu(0,x) = \chi(x), \; \mu(q_2,x) = 0, \; x \in \partial D, \tag{18}$$

$$-a(q_1,x)\mu_{yy}(q_1,x) = g(q_1,x),\ -a(q_2,x)\mu_{yy}(q_2,x) = g(q_2,x),$$
$$x \in \partial D. \tag{19}$$

Определим пространство функций:

$$H(D) = \{\chi \in C(\bar{D}) : \chi \in C^{2,\alpha}(D), L_x\chi \in C(\bar{D})\}.$$

Для формулировки достаточных условий существования решения обратной задачи (18)–(19) определим вспомогательную функцию $\bar{w} \in U_0(\Omega)$ как решение в области Ω следующей краевой задачи:

$$-(L\bar{w})(y,x) - 2a_y(y,x)\bar{w}_y(y,x) - a_{yy}(y,x)\bar{w}(y,x) = (g_{yy})^-(y,x),$$
$$(y,x) \in \Omega,$$
$$\bar{w}(y,x) = (\mu_{yy})^-(y,x),\quad (y,x) \in \bar{\Gamma}(q_1,q_2),$$
$$\bar{w}(q_1,x) = g^+(q_1,x)/a(q_1,x), \tag{20}$$
$$\bar{w}(q_2,x) = g^+(q_2,x)/a(q_2,x),\ x \in \bar{D}.$$

Для обратной задачи (16)–(17) справедлива следующая теорема существования её решения.

Теорема 2.5.1. Пусть для коэффициентов строго эллиптического оператора L справедливы включения: $a, a_y, a_{yy} \in$ $\in C^\alpha(D) \cap C(\bar{D})$, $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar{D})$, выполнены неравенства: $c(x) \le 0$, $x \in D$, $a_{yy}(y,x) + c(x) \le 0$, $(y,\ x) \in \Omega$. Тогда для любых функций $\mu, \mu_{yy} \in C(\bar{\Gamma}(q_1,q_2))$, $g, g_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\chi \in H(D)$, удовлетворяющих условиям согласования (18)–(19) и следующим дополнительным условиям: $\chi(x) \ge \chi_0 > 0$, $a(0,x)\bar{w}(0,x) - ((L_x\chi)(x) + g(0,x)) \le 0$, $x \in D$, существует решение обратной задачи (16)–(17).

В качестве следствий теоремы 2.5.1 и теоремы единственности 2.2.1 для задачи (16)–(17) формулируется следующая теорема существования и единственности.

Теорема 2.5.2. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в области $\Omega = Q(q_1,q_2)$ оператора L справедливы включения $a, a_y, a_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(D) \cap C(\bar{D})$, выполнены неравенства $c(x) \le 0$, $x \in D$, $a_{yy}(y,x) + c(x) \le 0$, $(y,\ x) \in \Omega$. Тогда для любых функций μ, g, χ, для которых справедливы включения

$\mu, \mu_{yy} \in C(\overline{\Gamma}(q_1, q_2))$, $g, g_{yy} \in C^{\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\chi \in H(D)$, выполнены условия согласования (18)–(19) и следующие неравенства $\chi(x) \geq \chi_0 > 0$, $a(0,x)\overline{w}(0,x) - ((L_x\chi)(x) + g(0,x)) \leq 0$, $x \in D$, $g(y,x) \geq 0$, $g_{yy}(y,x) \leq 0$, $(y, x) \in \Omega$, $\mu(y,x) \geq 0$, $\mu_{yy}(y,x) \leq 0$, $(y, x) \in \Gamma(q_1,q_2)$, существует единственное решение обратной задачи (16)–(17).

В п. 2.6 изучается вопрос о существовании решения обратной задачи определения коэффициента в эллиптическом уравнении в цилиндре с переопределением на границе. Пусть $q > 0$ – фиксированное число. В цилиндре $\Omega_- = Q_1(q)$ рассмотрим задачу определения пары функций $(u, f) \in \overline{U}(\Omega_-) \times F^-(D)$ из условий:

$$-(Lu)(y,x) = f(x)u(y,x) + g(y,x), \ (y,x) \in \Omega_-,$$

$$u(y,x) = \mu(y,x), \ (y,x) \in \overline{\Gamma}_1(q),$$

$$u(-q,x) = 0, \ u_y(0,x) = 0, \ x \in \overline{D}, \tag{21}$$

$$u(0,x) = \chi(x), \ x \in \overline{D}. \tag{22}$$

В уравнении (21) оператор L имеет следующий вид:

$$(Lu)(y,x) = a(y,x)u_{yy}(y,x) +$$

$$+\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(y,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(y,x) + c(y,x)u(y,x)\right) =$$

$$= a(y,x)u_{yy}(y,x) + (L_x u)(y,x).$$

Определим для обратной задачи условия согласования при $y =$ $= -q$, $y = 0$. Будем говорить, что для задачи (21)–(22) выполнены условия согласования, если для функций μ, g, χ выполнены условия:

$$\mu(-q,x) = 0, \ \mu(0,x) = \chi(x), \ \ \mu_y(0,x) = 0, \ x \in \partial D, \tag{23}$$

$$-a(-q,x)\mu_{yy}(-q,x) = g(-q,x), \ x \in \partial D. \tag{24}$$

Для формулировки теоремы существования решения обратной задачи (21)–(22) необходимо определить вспомогательную функцию $\overline{w} \in U_0(\Omega)$. Будем предполагать, что для коэффициентов оператора L и функций a, a_{yy}, g справедливы включения: $a, a_{yy}, g,$ $g_{yy} \in C(\overline{\Omega}_-) \cap C^{2,\alpha}(\Omega_- \cup \Gamma_0)$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{\alpha}(D) \cap C(\overline{D})$, для функции

μ справедливы включения $\mu, \mu_{yy} \in C(\Gamma_1(q))$ и справедливы неравенства $c(x) \leq 0$, $x \in D$, $c(x) + a_{yy}(y,x) \leq 0$, $(y,x) \in \Omega_-$, выполнены условия согласования (23)–(24) и дополнительные условия $g_y(0,x) = 0$, $a_y(0,x) = 0$, $x \in \overline{D}$.

При этих предположениях продолжим четно функции a, g, μ по переменной y при каждой фиксированной точке $x \in \overline{D}$. Продолженные таким образом в цилиндр $\Omega = Q(q)$ функции будем обозначать $\tilde{a}, \tilde{g}, \tilde{\mu}$. Для них в указанных выше условиях будут справедливы включения:

$$\tilde{a}, \tilde{a}_y, \tilde{a}_{yy}, \tilde{g}, \tilde{g}_{yy} \in C^\alpha(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ \tilde{\mu}, \tilde{\mu}_{yy} \in C(\Gamma(q)).$$

Вспомогательную функцию $\overline{w} \in U_0(\Omega)$ определим как решение следующей краевой задачи:

$$-(\tilde{L}\overline{w})(y,x) - 2\tilde{a}_y(y,x)\overline{w}_y(y) - \tilde{a}_{yy}(y,x)\overline{w}(y,x) = (\tilde{g}_{yy})^-(y,x),\ (y,x) \in \Omega,$$

$$\overline{w}(y,x) = (\tilde{\mu}_{yy})^-(y,x),\ (y,x) \in \overline{\Gamma}(q),$$

$$\overline{w}(q,x) = (\tilde{g})^+(q,x) / \tilde{a}(q,x),$$

$$\overline{w}(-q,x) = (\tilde{g})^+(-q,x) / \tilde{a}(q,x),\quad x \in \overline{D}. \qquad (25)$$

В уравнении (25) строго эллиптический в цилиндре Ω оператор $\tilde{L}$ тот же, что и в условиях (20), но с заменой a на $\tilde{a}$.

Для обратной задачи (21)–(22) справедлива следующая теорема существования её решения.

Теорема 2.6.1. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре Ω_- оператора L справедливы условия: a, a_y, $a_{yy} \in C^\alpha(\Omega_- \cup \Gamma_0) \cap C(\overline{\Omega}_-)$, $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(D) \cap C(\overline{D})$, выполнены следующие неравенства и дополнительные условия: $c(y,x) \leq 0$, $x \in D$, $a_{yy}(y,x) + c(x) \leq 0$, $(y,x) \in \Omega_-$, $a_y(0,x) = 0$, $x \in D$. Тогда для любых функций μ, g, χ, таких, что $\mu, \mu_{yy} \in C(\overline{\Gamma}_1(q))$, $g, g_{yy} \in C^\alpha(\Omega_- \cup \Gamma_0) \cap C(\overline{\Omega}_-)$, $\chi \in H(D)$, удовлетворяющих условиям согласования (23)–(24) и дополнительным условиям $\chi(x) \geq \chi_0 > 0$, $a(0,x)\overline{w}(0,x) - ((L_x\chi)(x) + g(0,x) \leq 0$, $x \in D$, $g_y(0,x) = 0$, $x \in D$, существует решение обратной задачи (21)–(22) в указанном классе функций.

Как следствие теоремы 2.6.1 существования решения для задачи (21)–(22) и доказанной ранее теоремы 2.4.4 единственности ее решения следует следующая теорема существования и единственности решения задачи (21)–(22).

Теорема 2.6.2. Пусть для коэффициентов строго эллиптического в цилиндре $\Omega_- = Q_1(q)$ оператора L справедливы условия: $a, a_y, a_{yy} \in C(\overline{\Omega}_-) \cap C^{\alpha}(\overline{\Omega}_- \cup \Gamma_0)$, $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{D}) \cap C^{\alpha}(D)$, выполнены следующие неравенства и дополнительные условия: $c(x) \le 0$, $x \in D$, $a_{yy}(y,x) + c(x) \le 0$, $(y,x) \in \Omega_-$, $a_y(0,x) = 0$, $x \in D$. Тогда для любых функций μ, g, χ, таких, что справедливы условия $\mu, \mu_{yy} \in C(\overline{\Gamma}_1(q))$, $g, g_{yy} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}_- \cup \Gamma_0) \cap C(\overline{\Omega}_-)$, $\chi \in H(D)$, удовлетворяющих условиям согласования (23)–(24) и дополнительным условиям $\chi(x) \ge \chi_0 > 0$, $a(0,x)\overline{w}(0,x) - ((L_x\chi)(x) + g(0,x)) \le 0$, $x \in D$, $\mu(y,x) \ge 0$, $\mu_{yy}(y,x) \le 0$, $(y,x) \in \overline{\Gamma}_1(q)$, $g(y,x) \ge 0$, $g_{yy}(y,x) \le 0$, $g_y(0,x) = 0$, $x \in D$, существует единственное решение задачи (21)–(22) в указанном классе функций.

Обратная задача определения коэффициента для эллиптического уравнения с переопределением внутри области была поставлена и изучена В.В. Соловьевым. Обратную задачу определения коэффициента с переопределением на границе в случае цилиндра рассматривал А. Хайдаров[19] в 1990 г. в предположении, что $g = 0$ и оператор L с независящими от переменной y коэффициентами. Полученный им результат согласуется с теоремой 2.4.4 и является ее частным случаем при дополнительном предположении, что оператор L самосопряжен. В работе В.М. Исакова[20] вопрос о существовании решения обратной задачи определения коэффициента в цилиндре с переопределением на границе формулируется как важная проблема для развития теории обратных задач.

[19] Хайдаров А. Один класс обратных задач для эллиптических уравнений //Сибирский математический журнал, 1990. Т. 31. № 4. С. 149–159.

[20] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New-York: Springer, 2006.

В главе 3 излагаются основные результаты, полученные автором при изучении обратных задач для уравнения параболического типа с переопределением на верхней крышке цилиндра (финальным переопределением).

Перейдем к обзору основных результатов, полученных при изучении обратных задач для параболических уравнений с переопределением на верхней крышке. Пусть $T > 0$ – фиксированное число, $D \subset \mathbb{R}^n_x$ – ограниченная область с границей класса $C^{2,\alpha}$, цилиндр $\Omega_T = D \times (0,T] \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$.

Рассмотрим обратную задачу определения источника для уравнения параболического типа в цилиндре, точнее – задачу определения пары функций $(u,f) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}_T) \times C^{\alpha}(\overline{D})$ из условий:

$$\begin{gathered}\rho(x,t)u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f(x)h(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D},\\ u(x,t) = \mu(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T],\end{gathered} \tag{26}$$

$$u(x,T) = \chi(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{27}$$

В уравнении (26) оператор L имеет вид

$$(Lu)(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t).$$

Предполагается, что уравнение (26) является равномерно параболическим в цилиндре Ω_T, т.е. предполагаются выполненными условия:

$$\rho(x,t) \geq \rho_0 > 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad a_0 > 0, \quad (x,t) \in \Omega_T.$$

Условие (27), заданное на верхней крышке цилиндра Ω_T, являются дополнительным условием к уравнению, начальному и краевым условиям, вполне определяющим решение прямой задачи (26) при известной функции f. Это условие называется переопределением и является той дополнительной информацией, которая позволяет считать функцию f также неизвестной и рассматривать обратную задачу определения пары функций (u, f) из условий (26)–(27).

В п. 3.2 при некоторых упрощающих предположениях доказана единственность решения обратной задачи (26)–(27). Рассмотрим следующую обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega_T)\times C^{\alpha}(\bar D)=U_1(\Omega_T)\times C^{\alpha}(\bar D)$ из условий:

$$\rho(x,t)u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\bar D,\ u(x,t)=\mu(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T, \tag{28}$$
$$u(x,T)=\chi(x),\ x\in\bar D. \tag{29}$$

В уравнении (28) оператор L имеет вид:

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(x,t)+c(x,t)u(x,t).$$

Для задачи (28)–(29) справедлива следующая теорема единственности ее решения.

Теорема 3.2.1. Пусть для коэффициентов оператора L и функции h справедливы условия a_{ij}, b_i $\in C^{\alpha}(\bar D)$, $\rho,\rho_t,c,c_t,h,h_t\in$ $\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar\Omega_T)$, выполнены следующие неравенства: $c(x,t)\le 0$, $c_t(x,t)\ge 0$, $h(x,t)h_t(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in\Omega_T$. Тогда задача (28)–(29) не может иметь двух различных решений в том и только в том случае, когда носитель функции $h(x,T)$ совпадает с $\bar D$.

В п. 3.6 доказана альтернатива Фредгольма для задачи (26)–(27). Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega_T)\times C^{\alpha}(\bar D)$ из условий:

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in\bar D,\ u(x,t)=\mu(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T, \tag{30}$$
$$u(x,T)=\chi(x),\ x\in\bar D. \tag{31}$$

В уравнении (30) оператор L имеет вид:

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}(x,t)+c(x,t)u(x,t).$$

Будем говорить, что для задачи (30)–(31) выполнены условия согласования до первого порядка, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x)=\mu(x,0),\ \chi(x)=\mu(x,T),\ x\in\partial D,$
2) $\big(\mu_t(x,0)-(L\varphi)(x,0)-g(x,0)\big)h(x,T)=$
$=\big(\mu_t(x,T)-(L\chi)(x,T)-g(x,T)\big)h(x,0),\quad x\in\partial D.$

Рассмотрим краевую задачу определения функции $\omega \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ из условий $(L\omega)(x,T) = 0, x \in D$, $\omega(x) = 0, x \in \partial D$. Будем говорить, что для оператора L выполнено условие (А), если задача определения функции ω из этих условий имеет только тривиальное решение.

Для обратной задачи (30)–(31) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6.1. Пусть для коэффициентов оператора L и функции h справедливы условия $a_{ij}, b_i, c, h, (a_{ij})_t, (b_i)_t, c_t, h_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, выполнено условие (А), выполнено неравенство $|h(x,T)| \geq h_T > 0$, $x \in D$. Тогда для обратной задачи (30)–(31) справедлива альтернатива Фредгольма в смысле эквивалентности двух утверждений:

1) задача (30)–(31) имеет при $g = 0$, $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\mu = 0$ только тривиальное решение;

2) задача (30)–(31) имеет единственное решение $(u,f) \in \in U_1(\Omega_T) \times C^{\alpha}(\bar{D})$ для любых функций $\varphi, \chi \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$, $\mu \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T)$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, удовлетворяющих условиям согласования первого порядка.

В качестве следствия альтернативы Фредгольма (теоремы 3.6.1) и сформулированной теоремы единственности решения обратной задачи определения источника приведем формулировку теоремы существования и единственности решения, следующую из этой теоремы.

Теорема 3.6.2. Пусть для коэффициентов оператора L и функции h справедливы включения a_{ij}, $b_i \in C^{\alpha}(\bar{D})$, ρ, ρ_t, c, c_t, h, $h_t \in \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, выполнены неравенства $c(x,t) \leq 0$, $c_t(x,t) \geq 0$, $h(x,t)h_t(x,t) \geq 0$, $|h(x,t)| \geq h_T > 0$, $x \in \bar{D}$. Тогда задача (28)–(29) имеет единственное решение для любых функций φ, $\chi \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$, $\mu \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T)$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, удовлетворяющих условиям согласования до первого порядка:

$$\chi(x) = \mu(x,T), \quad \varphi(x) = \mu(x,0),$$

$$(\rho(x,0)\mu_t(x,0) - (L\varphi)(x,0) - g(x,0))h(x,T) =$$

$$= (\rho(x,T)\mu_t(x,T) - (L\chi)(x,0) - g(x,0))h(x,0), \quad x \in \partial D.$$

В п. 3.7 изучаются обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega_T)\times F_1^-(D)$ из условий:

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)u(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$u(x,0)=0,\ x\in\overline{D},\ u(x,t)=\mu(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T, \tag{32}$$

$$u(x,T)=\chi(x),\ x\in\overline{D}. \tag{33}$$

В уравнении (32) оператор L имеет вид:

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(x,t)+c(x,t)u(x,t).$$

Для задачи (32)–(33) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 3.7.1. Пусть для коэффициентов оператора L и функций g, μ справедливы включения $a_{ij}, b_i\in C^{\alpha}(\overline{D})$, $c, c_t, g, g_t\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $\mu\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T)$, выполнены следующие ограничения на знаки заданных функций $c(x,t)\le 0$, $c_t(x,t)\ge 0$, $g(x,t)\ge 0$, $g_t(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in\Omega_T$, $\mu(x,t)\ge 0$, $\mu_t(x,t)\ge 0$, $(x,t)\in\Gamma_T$, и хотя бы одна из функций μ, g отлична от тождественного нуля. Тогда задача (32)–(33) не может иметь двух различных решений.

В п. 3.8 изучается вопрос о существовании обратной задачи определения коэффициента. Рассмотрим задачу определения пары функций $(u,f)\in U_1(\Omega_T)\times F_1^-(D)$ из условий:

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f(x)u(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$u(x,0)=0,\ x\in\overline{D},\ u(x,t)=\mu(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T, \tag{34}$$

$$u(x,T)=\chi(x),\ x\in\overline{D}. \tag{35}$$

В уравнении (34) оператор L имеет вид:

$$(Lu)(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}(x,t)+c(x)u(x,t).$$

Для формулировки теоремы существования решения задачи (34)–(35) определим функцию $\overline{v}\in U(\Omega_T)=C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\overline{v}_t(x,t)-(L\overline{v})(x,t)=(g_t)^+(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T,$$

$$\overline{v}(x,0)=(g(x,0))^+,$$

$$x\in\overline{D},\ \overline{v}(x,t)=(\mu_t)^+(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T.$$

Для задачи (34)–(35) справедлива следующая теорема существования её решения.

Теорема 3.8.1. Пусть для коэффициентов оператора L и функций g, μ справедливы следующие условия $a_{ij}, b_i, c\in C^{\alpha}(\overline{D})$, $g, g_t\in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $\mu\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_T)$, $\mu_t\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma_{t_1,T})$; где число t_1 удовлетворяет неравенству $0\le t_1<T$, выполнены условия согласования $\mu_t(x,0)=g(x,0)$, $x\in\partial D$, и неравенство $c(x)\le 0$, $x\in D$. Тогда для любой функции $\chi\in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ удовлетворяющей неравенствам $|\chi(x)|\ge\chi_0>0$, $\overline{v}(x,T)-((L\chi)(x)+g(x,T))\le 0, x\in D,$ и условиям согласования $\chi(x)=\mu(x,T)$, $x\in\partial D$, существует решение обратной задачи (34)–(35).

В качестве следствия этой теоремы приведем достаточные условия существования и единственности решения задачи (34)–(35).

Следствие. Пусть, дополнительно к условиям теоремы 3.8.1 известно, что справедливы неравенства $\mu\ge 0$, $\mu_t\ge 0$, $g\ge 0$, $g_t\ge 0$. Тогда обратная задача (34)–(35) имеет и притом единственное решение.

Первые постановки обратных задач для параболических уравнений с финальным переопределением сформулированы в 1973 г. в известной работе А.И. Прилепко[1]. Альтернатива Фредгольма для для этой задачи была впервые сформулирована и доказана В.В. Соловьевым в 1987 г. для оператора L с коэффициентами, не зависящими от t. Общий случай доказан В.В. Соловьевым в 1989 г. Формулировка глобальной единственности для случая оператора L с независящими от t коэффициентами приведена В.М. Исаковым[2] в 1992 г. без доказательства. Доказательство методом ортогонально-

[1] Прилепко А.И. Обратные задачи теории потенциала// Математич. заметки, 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
[2] Исаков В.М. Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // ДАН СССР, 1982. Т. 263. № 6. С. 1296–1299.

сти Л.С. Новикова приведено В.М. Исаковым[1] в 1990 г. В 1987 г. оригинальным методом, отличным от метода ортогональности, В.В. Соловьев[2] привел доказательство для случая $h \geq 0$, $h_t \geq 0$. Окончательный вариант, приведенный в диссертации, опубликован в 2012 г. В дальнейшем метод доказательства, получивший название «метод позитивности», был обобщен в работах А.И. Прилепко, И.В. Тихонова[3] на дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Дальнейшие исследования обратной задачи определения источника в параболическом уравнении приводились в работах А.И. Прилепко и А.Б. Костина[4], Д.Г. Орловского[5], О.Ю. Эмануилова[6], А.И. Прилепко и Д.С. Ткаченко[7], в которых получены аналогичные результаты в классах обобщенных функций и для дифференциальных уравнений. Подобный обзор этих работ приведен в работе А.И. Прилепко[8]. Несколько иной подход к решению задачи определения коэффициента в параболическом уравнении использован в работах А.М. Кожанова[9], Ю.Е. Аниканова[1].

---

[1] Isakov V. Inverse Sourse Problems // Math. Serveys and Monographs Seies. V.24. AMS, Providence, R.I, 1990.

[2] Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. II //Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 10. С. 1791–1800.

[3] Прилепко А.И., Тихонов И.В. Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности // Докл. РАН, 1999. Т. 354. № 1. С. 21–23.

[4] Прилепко А.И., Костин А.Б. Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I.// Сибирский математ. журнал, 1992. Т. 33. № 3. С. 146–156.

[5] Орловский Д.Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференциальные уравнения, 1990. Т. 28. № 9. С. 1614–1621.

[6] Эмануилов О.Ю. Один класс обратных задач для получения эллиптических и параболических уравнений // Тр. Московского математического общества. Т. 35. М.: Изд. МГУ, 1994. С. 285–309.

[7] Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Фредгольмовость обратной задачи об источнике для параболических систем // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39. № 12. С. 1693–1700.

[8] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New-York–Basel: Marsel Dekker Inc., 2000.

[9] Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности// Сиб. Матем. журнал, 2005. Т. 46. № 5. С. 1053–1071.

В классах обобщенных функций задачи определения коэффициентов в параболических уравнениях рассматривались в работах В.Л. Камынина и А.Б. Костина[2].

В главе 4 рассмотрены обратные задачи с переопределением другого вида. В качестве дополнительной информации о решении прямой задачи для параболического уравнения предполагается известным след ее решения в различных фиксированных пространственных точках для всех моментов времени $t\in[0,T]$, $T>0$ – фиксированная постоянная. В пространстве точек $(x,t)\in\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t$ определим полосу $E_T=\{(x,t):x\in\mathbb{R}_x^n,t\in[0,T]\}$. В качестве неизвестной функции, подлежащей определению вместе с решением уравнения параболического типа, будет вектор-функция $f:[0,T]\to\mathbb{R}^N$, где N – некоторое фиксированное натуральное число, вектор-функция $f(t)=\{f_1(t),..,f_N(t)\}$. Пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ вектор-функций будем обозначать $F[0,T]$, т.е. $F[0,T] = (C[0,T])^N$. Ясно, что пространство $F[0,T]$ с нормой $\|f\| = \max\{\|f_i\|\}$, где $\|f_i\|$ – обычная sup-норма функции f_i на отрезке $[0,T]$, будет банаховым.

Определим пространство вектор-функций, определенных на полосе $\overline{E}_T$, $h:\overline{E}_T\to\mathbb{R}^N$, так что $h(x,t)=(h_1(x,t),...,h_N(x,t))$. Аналогично предыдущему определению будем обозначать $\|h\|$ = $\max\{\|h_k\|\}$, где $\|h_k\|$ – обычная sup-норма функции h_k. Пусть одна из компонент вектор-функции h – функция $h_k(x, t)$ – удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ по переменной x и с показателем $\alpha/2$ по переменной t. В этом случае будем обозначать $<h_l(\cdot,t)>_x^{(\alpha)}$, $<h_l(x,\cdot)>_t^{(\alpha/2)}$ – постоянные Гёльдера функции $h_k(x, t)$ по переменной x и по переменной t соответственно. Будем также использовать следующее обозначение:

$$<h_k>^{(\alpha,\alpha/2)}=\sup<h_k(\cdot,t)>_x^{(\alpha)}+\sup<h_k(x,\cdot)>_t^{(\alpha/2)}.$$

---

[1] Аниканов Ю.Е. Формулы для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка // Сиб. матем. журнал, 1996. Т. 37. № 3. С. 483–491.

[2] Камынин В.Л., Костин А.В. Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения, 2010. Т. 46. № 3. С. 372–383.

Если каждая компонента вектор-функции $h(x, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то будем обозначать $< h >^{(\alpha,\alpha/2)} = \max_l \{< h_l >^{(\alpha,\alpha/2)}\}$. Определим следующие пространства функций с областью определения $\overline{E}_T$:

$$U_0(E_T) = \{u \in C(\overline{E}_T) : u \in C^{2,1}_{x,t}(E_T)\},$$

$$U_1(E_T) = \{u \in C(\overline{E}_T) : u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{E}_T)\}.$$

Пусть даны фиксированные попарно различные точки $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k = 1,\dots,N$. Для шаров в $\mathbb{R}^n$ с центрами в точках $x^{(k)}$ и радиусом $r > 0$ будем использовать следующее обозначение $B_r(x^{(k)}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^{(k)}| < r\}$. Будем предполагать, что величина $r > 0$ достаточно мала, так что шары $B_r(x^{(k)})$ не пересекаются. Для упрощения записи при изложении результатов гл. 4 будем использовать соглашение, что по повторяющимся индексам i, j проводится суммирование от 1 до n, по повторяющимся индексам k, l проводится суммирование от 1 до N не указывая знак суммы..

В гл. 4 будем также обозначать $Q_k(r)$ следующие не пересекающиеся цилиндры в полосе E_T: $Q_k(r) = B_r(x^{(k)}) \times (0,T]$. Определим функциональное пространство:

$$U_1^r(E_T) = \{u \in U_0(E_T) : u \in C^{2,1}_{x,t}(\overline{Q}_k(r)),\ k = 1,\dots,N\}.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in U_0(E_T) \times F[0,T]$ из условий:

$$u_t(x,t) - (Lu)(x,t) = f_l(t)h_l(x,t) + g(x,t),\ (x,t) \in E_T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{36}$$

$$u(x^{(k)},t) = \psi_k(t),\ t \in [0,T],\ k = 1,\dots,N. \tag{37}$$

В равномерно параболическом в полосе $\overline{E}_T$ уравнении (36) оператор L имеет следующий вид:

$$(Lu)(x,t) = a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j}(x,t) + b_i(x,t)u_{x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t).$$

Для обратной задачи (36)–(37) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 4.1.2. Пусть справедливы условия $a_{ij},b_i,c,h_l \in$ $\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{E}_T)$ и выполнено неравенство $|\det h_l(x^{(k)},t)| \ge h_0 > 0$. Тогда задача (36)–(37) не может иметь двух различных решений.

В п. 4.2 на основе результатов, полученных в п. 4.1, проведено изучение единственности решения обратной задачи для нелинейного параболического уравнения самого общего вида. Пусть $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}^{n^2}$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f = \{f_l\} \in \mathbb{R}^N$, $(x,t) \in \bar{E}_T$ – независимые переменные, $F(a_0,a_{ij},b_i,c,f_l,x,t)$, $N(x,c)$ – вещественнозначные функции, определенные на множествах $S_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \bar{E}_T$, $S_2 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Далее для краткости будем использовать обозначения:

$$U_2(E_T) = C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{E}_T), \quad F_1[0,T] = (C^{\alpha/2}[0,T])^N.$$

Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u,f) \in U_2(E_T) \times F_1[0,T]$ из условий:

$$F(u_t(x,t),u_{x_ix_j}(x,t),u_{x_i}(x,t),u(x,t),f_l(t),x,t) = 0, \quad (x,t) \in E_T,$$

$$N(x,u(x,0)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{38}$$

$$u(x^{(k)},t) = \psi_k(t), \quad t \in [0,T], \quad k = 1,\ldots,N. \tag{39}$$

Для обратной задачи (38)–(39) справедлива следующая теорема единственности её решения.

Теорема 4.2.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция F и ее вторые производные по переменным a_0,a_{ij},b_i,c,f_l непрерывны на множестве S_1, ее первые производные по этим переменным удовлетворяют условию Гёльдера по переменным x, t с показателями α, $\alpha/2$ соответственно на любом ограниченном по переменным a_0,a_{ij},b_i,c,f_l множестве, лежащем в S_1;

2) функция $N(x, c)$ и ее первая производная по c непрерывны на множестве S_2;

3) выполнены условия строгой параболичности $F_{a_0} \ge \rho_0 > 0$, $-F_{a_{ij}}\xi_i\xi_j \ge \nu_0 |\xi|^2$, $\rho_0,\nu_0 > 0$ – фиксированные постоянные.

Тогда, если выполнены неравенства:

$$|\det F_{f_l}(a_0,a_{ij},b_i,c,f,x^{(k)},t)| \ge h_0 > 0, \quad N(x,c) \ge n_0 > 0,$$

где h_0, n_0 – фиксированные постоянные, то обратная задача (38)–(39) не может иметь двух различных решений в указанном классе функций.

В п. 4.5 доказано существование решения обратной задачи определения правой части уравнения в случае задачи Коши. Рассмотрим обратную задачу определения пары функций $(u, f) \in \in U_1^{r/2}(E_T)\times F[0,T]$ из условий:

$$u_t(x,t)-(Lu)(x,t)=f_l(t)h_l(x,t)+g(x,t),\quad (x,t)\in E_T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{40}$$

$$u(x^{(k)},t)=\psi_k(t),\quad t\in[0,T],\quad k=1,\dots,N. \tag{41}$$

В равномерно параболическом в полосе E_T уравнении (40) оператор L имеет тот же вид, что и в уравнении (36)

Для обратной задачи (40)–(41) справедлива следующая теорема существования и единственности её решения.

Теорема 4.5.1. Пусть справедливы следующие условия: $a_{ij},b_i,c,h_l,g\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{E}_T)$, $\varphi\in C(\mathbb{R}^n)\cap C^{2,\alpha}(\bar{B}_r(x^{(k)}))$, $\psi_k\in C^1[0,T]$, выполнены условия согласования $\psi_k(0)=\varphi(x^{(k)})$ и неравенство $|\det(h_l(x^{(k)},t))|=|\det(H_l^k(t))|\ge h_0>0$. Тогда существует единственное решение задачи (40)–(41) в указанном классе.

Обратные задачи определения коэффициентов в параболическом уравнении в постановке, изученной в гл. 4 диссертации, впервые изучались в работах А.И. Прилепко и Н.Я. Безнощенко[1]. Более подробный обзор, включающий приложения, приведен в работах А.И. Прилепко[2] и Ю.Ю. Белова[3].

На всем протяжении работы по изучению обратных задач автор находился в постоянном контакте и взаимодействии со своим научным учителем А.И. Прилепко, взгляды которого на исследования в области обратных задач для уравнений математической фи-

[1] Безнощенко Н.Я., Прилепко А.И. Обратные задачи для уравнений параболического типа // В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1977. С. 51–53

[2] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New-York–Basel: Marsel Dekker Inc., 2000.

[3] Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. New-York: Springer, 2006.

зики оказали решающее влияние на исследования, проведенные автором. Основная часть предлагаемых вниманию в данной работе математических результатов возникла при постоянных контактах с А.И. Прилепко и всеми участниками семинара по обратным задачам математической физики на Механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством академика В.А. Садовничего и профессора А.И. Прилепко. Всем участникам указанного семинара выражаю свою глубокую благодарность.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Соловьев В.В. Обратная задача определения коэффициента для эллиптический уравнений в цилиндре. II // Дифференциальные уравнения, 2013. Т. 49. №12. С. 1607–1615.

2. Соловьев В.В. Обратная задача определения коэффициента для эллиптический уравнений в цилиндре. I // Дифференциальные уравнения, 2013. Т. 49. № 8. С. 1026–1035.

3. Соловьев В.В. Об обратных задачах для параболического уравнения с переопределением в фиксированных точках // Вестник МГОУ, сер. Физика, математика, 2012. № 3. С. 6–11.

4. Соловьев В.В. Разрешимость обратных задач для эллиптических уравиений в цилиндре // Вестник МГОУ, сер. Физика, математика, 2012. № 1. С. 27–38.

5. Соловьев В.В. О разрешимости обратных коэффициентных задач для параболических уравнений // Вестник МГОУ, сер. Физика, математика, 2012. № 1. С. 23–27.

6. Соловьев В.В. Обратная задача определения коэффициента в уравнении Пуассона в цилиндре // Журиал вычислительной математики и математической физики, 2011. Т. 51. № 10. С. 1–8.

7. Соловьев В.В. Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространстве. II // Диффереициальиые уравиения, 2011. Т. 47. № 5. С. 714–723.

8. Соловьев В.В. Обратные задачи для эллиптических уравнений в пространстве. I // Диффереициальные уравнения, 2011. Т. 47. № 4. С. 499–506.

9. Соловьев В.В. Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольиике // Журнал вычисли-

тельной математики и математической физики, 2007. Т. 47. № 4. С. 499–506.

10. Соловьев В.В. Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости. II // Дифференциальные уравнения, 2007. Т. 43. № 1. С. 101–109.

11. Соловьев В.В. Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости. I // Дифференциальные уравнения, 2006. Т. 42. № 8. С. 1106–1114.

12. Соловьев В.В. Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004. Т. 44. № 5. С. 862–871.

13. Соловьев В.В. Существование решения в «целом» обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа // Дифференциальные уравнения, 1996. Т. 39. № 4. С. 546–544.

14. Соловьев В.В. Определение источника и коэффициентов в параболическом многомерном случае // Дифференциальные уравнения, 1995. Т. 31. № 6. С. 1060–1069.

15. Соловьев В.В. О существовании решения в задаче определения коэффициента в полулинейном уравнении параболического типа // Дифференциальные уравнения, 1992. Т.28. № 12. С. 2101–2110.

16. Соловьев В.В. Существование и единственность решения обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке // В кн.: Теоретико-функциональные и численные методы исследования прямых и обратных задач математической физики. М.: Энергоатомиздат, 1992. С. 141–148.

17. Соловьев В.В. Об управлении коэффициентами в полулинейном уравнении параболического типа // В кн.: Управление нелинейными системами: Сборник трудов. М.: ВНИИСИ, 1994. № 4. С. 36–40.

18. Соловьев В.В. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения в случае третьей нечетно-краевой задачи // В кн.: Обратные задачи для математических моделей физических процессов. М.: МИФИ, 1991. С. 75–79.

19. Соловьев В.В. О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 1989. Т.25. №9. С. 1577–1583.

20. Соловьев В.В. Фредгольмовость одной обратной задачи определения правой части в параболическом уравнении // В кн.: Анализ математических моделей физических процессов. М.: Энергоатомиздат, 1988. С. 90–95.

21. Прилепко А.И., Соловьев В.В. О разрешимости обратных задач определения коэффициента перед младшей производной в параметриче-

ском уравнении // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 1. С. 136–145.

22. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа. I // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 10. С. 1791–1800.

23. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа. II // Дифференциальные уравнения, 1987. Т. 23. № 11. С. 1971–1980.