Обнинский Институт Атомной Энергетики
Национального Исследовательского Ядерного Института
Московского инженерно-физического института

На правах рукописи

УДК 517.958

ТРОЯНОВА ИРИНА МИХАЙЛОВНА

АСИМПТОТИКА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Обнинск, 2010

Работа выполнена на кафедре прикладной математики ИАТЭ НИЯУ МИФИ.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.А. Тупчиев

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор Д.А.Камаев

доктор физико-математических наук, профессор А.В.Нестеров

Ведущая организация: Государственный научный центр Российской Федерации Физико-энергетический институт имени А. И. Лейпунского (ФГУП «ГНЦ РФ-ФЭИ»).

Защита диссертации состоится «   » _______________ 2010 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 212.130.09 Московского инженерно-физического института (государственного университета) по адресу: 115409, Москва, Каширское ш., 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИФИ.

Автореферат разослан «   » _________________ 2010г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.130.09,
доктор физико-математических наук,
профессор А.С. Леонов

Общая характеристика работы

Настоящая работа посвящена построению асимптотических разложений автомодельных решений диссипативных задач газовой динамики путем применения метода пограничных функций.

Актуальность темы.

Физико-математические модели многих процессов основаны на системе уравнений газовой динамики с учетом различных физических эффектов. Газодинамическое движение в них играет важную, а зачастую и определяющую роль. Уравнения газовой динамики – это математическое выражение основных законов сохранения (массы, импульса и энергии). Сами по себе уравнения газовой динамики не линейны. Получено много важных результатов в отдельных разделах газовой динамики, но, тем не менее, общих методов решения газодинамических задач в настоящее время не существует, нет также доказательств единственности решения в общем случае. Это объясняется сложностью уравнений газовой динамики и, прежде всего, их нелинейностью, так как давление, плотность, температура и скорость должны быть определены из решения нелинейной системы уравнений в частных производных. В то же время именно нелинейность порождает многие эффекты, к примеру, ударные волны и волны разрежения, с которыми приходится считаться в практически важных случаях.

Препятствием на пути получения точных аналитических решений является также ряд существенных особенностей в задачах прикладной математики, таких как нелинейности, изменяющиеся коэффициенты, границы сложной формы и многое другое. Таким образом, для получения информации о решениях уравнений мы вынуждены прибегнуть к приближенным методам. Среди них следует выделить, прежде всего, асимптотические методы, которые дают приближенные решения и представляют собою разложения по малым параметрам задач. Они дают возможность изучить асимптотические свойства решений, которые не могут быть установлены численными методами. Следует особо отметить метод пограничных функций, который позволяет в ряде задач прикладной газовой динамики учесть вязкость и теплопроводность.

Задача о поршне и задача о точечном взрыве являются примерами нелинейных задач, в которых возникает ударная волна. Считая коэффициенты вязкости и теплопроводности малыми параметрами, можно попытаться найти асимптотическое разложение некоторых функций по этому малому параметру, также входящему и в противодавление.

До сих пор для рассматриваемых задач в диссипативном случае не удавалось построить асимптотику. В диссертационной работе строится и полностью обосновывается асимптотика решений задачи о поршне и задачи о точечном взрыве с учетом диссипации. Для получения асимптотических разложений решений задач газовой динамики применяется метод пограничных функций.

Основные цели и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является построение асимптотических разложений автомодельных решений диссипативных задач газовой динамики путем применения метода пограничных функций. Рассматриваются две задачи, являющиеся одними из наиболее распространенных краевых задач, встречающихся в приложениях – задача о поршне и задача о точечном взрыве. Асимптотика решений названных задач строится по малому параметру, входящему в коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Среди основных задач диссертационной работы можно выделить:

1.Построение асимптотики решений для диссипативных задач;

2.Полное обоснование построенной асимптотики, нахождение оценок уклонений найденных асимптотических разложений от точных решений;

3.Нахождение условия существования ударной волны для рассматриваемых задач.

Основные результаты и их научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми и состоят в следующем:

1. До настоящего времени для задач газовой динамики, описывающих поведение системы с учетом вязкости и теплопроводности, асимптотика решений не строилась. В данной работе впервые построена асимптотика для диссипативных задач.

2. Дано полное обоснование построенной асимптотики решения задач, т.е. найдены оценки уклонений найденных асимптотических разложений от точных решений.

3. Изученные в работе системы уравнений газовой динамики с учетом диссипации при помощи специально подобранных замен переменных и ряда проведенных преобразований впервые приводятся к тихоновской форме.

4. При изучении задачи о поршне для общей геометрии течения при $\alpha = 1/2$ обнаружено, что исходную систему можно полностью исследовать с помощью сферы Пуанкаре. Благодаря этому изучен фазовый портрет системы и характер ее особых точек.

5. Впервые строго доказывается тот факт, что ударная волна в задаче о поршне при $\alpha = 1/2$ существует только в случае сферической симметрии и только если показатель среды $\gamma \in (1; 5/3]$. Устанавливается условие устойчивости на ударной волне или условие допустимости разрыва.

6. Для задачи о поршне в цилиндрическом случае найдено условие существования ударной волны. Для этого необходимо выполнение условия, $\gamma > \gamma_0$, где $\gamma_0 \cong 2,67 -$ корень уравнения $(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} \sqrt{|\gamma-2|} = 2.$

7. При изучении задачи о точечном взрыве было найдено условие существования ударной волны - условие существования решения задачи $I(\gamma)+1 \neq 0$, где $I(\gamma)$ - известная функция от параметра $\gamma = c_p / c_V$, являющегося показателем адиабаты Пуассона. Выполнение этого условия было проверено численно и было обнаружено, что условие соответствует $\gamma \leq 3.1$ и $\gamma \geq 3.2$.

Научные положения и выводы, сформулированные в диссертации, **обоснованы** с помощью доказанных лемм и теорем.

Для задачи о поршне доказана лемма, устанавливающая оценки невязок вида $C\varepsilon^{n+1}$ при выполнении условия существования ударной волны, и теорема о существовании асимптотического решения задачи при выполнении условия существования ударной волны.

Для задачи о точечном взрыве доказаны леммы об оценках невязок вида $C\varepsilon^{n+1}$ и *П*-функций вида $C\varepsilon^{k}$ при выполнении условия существования ударной волны, и теорема о существовании асимптотического решения задачи в окрестности вырожденного решения при выполнении условия существования ударной волны.

Значение для теории. Модель поршня часто используется для описания поведения различных физических объектов. Так, задачу о сильном взрыве с учетом газообразных продуктов взрыва можно исследовать, моделируя движение этих газообразных продуктов движением поршня, имеющего плоскую, цилиндрическую или сферическую поверхность, пренебрегая при этом начальными размерами массы взрывчатого вещества. Задача об установившемся обтекании тонкого тела потоком с большой сверхзвуковой скоростью с достаточно хорошим приближением аналогична задаче о нестационарном движении поршня. При изучении солнечных вспышек, плазмы солнечного ветра и ударных волн в космическом пространстве привлекаются разнообразные теоретические описания движения газа, в том числе гидродинамическое приближение. С целью идеализации источника возмущений плазмы часто рассматривают модель поршня и модель точечного взрыва с последующим движением поршня. Если предполагать, что энергия подводится в течение достаточно долгого времени, то процесс вспышки можно моделировать расширением поршня в газе. В мишенях, облучаемых мощным потоком лазерного излучения, в результате поглощения энергии в некотором слое вблизи поверхности резко повышаются температура и давление. В результате этого часть мишени будет разлетаться наружу, а внутренние области слоя пойдут вглубь, сжимая впереди себя вещество. Другими словами, по отношению к внутренней части мишени нагретый слой действует как поршень.

Практическая значимость результатов и выводов заключается в том, что асимптотические разложения решений рассмотренных задач с учетом диссипации могут применяться не только для двух конкретных задач, но и для других, сводящихся к рассмотренным моделям. Задача о поршне является одной из наиболее распространенных краевых задач, встречающихся в приложениях. Например, ее частным случаем является задача о движении газа, формирующемся в результате перемещения в нем твердого тела или системы тел (вообще – твердых непроницаемых границ). При заданном законе движения тела положение его поверхности известно в любой момент времени. Эта поверхность является, таким образом, поверхностью типа $\psi(t) = ct^{\alpha}, c > 0, \alpha > 0,$ следовательно, контактная характеристика полностью задана. На практике задача о поршне находит применение в вопросах, связанных с предварительным быстрым сжатием газа и с явлениями удара и откола.

Теория точечного взрыва нашла свое новое важное приложение к задачам обтекания тонких затупленных тел потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Выводы, основанные на результатах теории точечного взрыва с плоскими и цилиндрическими волнами, в ряде случаев дают хорошее совпадение с данными экспериментов по обтеканию затупленных плоских тел и тел вращения гиперзвуковым потоком. Теория точечного взрыва наиболее точно описывает распространение ударных волн, возникающих при атомных взрывах, так как для них время выделения энергии ничтожно мало, а плотность энергии взрыва намного больше плотности энергии взрывов химических взрывчатых веществ.

Апробация работы, публикации. Результаты предлагаемой диссертации обсуждались на Ш международной конференции «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 2006 [1],[2], на международной конференции «Тихонов и современная математика», Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2006 [3], на IV международной конференции «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 2008 [4], на семинаре Института Математического Моделирования РАН, Москва, в 2009 году.

По результатам диссертационной работы в реферируемых журналах из перечня ВАК опубликованы 2 работы ([5], [6]).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, приложения, заключения и списка литературы, содержащего 35 наименований. Объем диссертации составляет 143 страницы.

Краткое содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, научная новизна полученных результатов, а также кратко излагается содержание и основные результаты диссертационной работы.

В первом параграфе первой главы рассматривается система уравнений газовой динамики в форме законов сохранения для вязкого и теплопроводного газа в эйлеровых координатах:

$$\rho_t + (\rho u)_x + \rho u\nu/x = 0,$$
$$(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + \rho u^2\nu/x = \left(\widehat{\mu}u_x\right)_x,$$
$$(\rho E)_t + [\rho u(E + p/\rho) - \widehat{\mu}uu_x]_x + [\rho u(E + p/\rho - \widehat{\mu}uu_x)]\nu/x =$$
$$= (\widehat{\lambda}\theta_x)_x + \widehat{\lambda}\,\theta_x\nu/x.$$

Если в данной системе сделать замену

$$y = \frac{x}{at^{\alpha}},\ \hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \hat{u} = \frac{u}{q_0V_0t^{\alpha-1}}, \hat{\theta} = \frac{R_г\theta}{q_0^2V_0^2t^{2\alpha-2}},\ \hat{E} = \frac{E}{q_0^2V_0^2t^{2\alpha-2}},$$
$$\hat{\rho} = \widehat{\rho}, u = y\widehat{u}, \theta = y^2\widehat{\theta}, p = y^2\widehat{p}, E = y^2\widehat{E}, q = y\widehat{q}, r = y^2\widehat{r}, \chi = y^3\widehat{\chi},$$

то получим систему

$$\sigma\frac{\partial w}{\partial y} = F\left(w,v,y,\sigma\right) + \sigma^2\frac{1-2\alpha}{\alpha y}F^0(w,v)\frac{\partial V}{\partial\sigma},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = f\left(w,v,y\right) + \sigma\frac{1-2\alpha}{\alpha y}\frac{\partial f^0(w,v,y)}{\partial\sigma},$$

где $\sigma = \varepsilon t^{1-2\alpha}$.

При $\alpha = 1/2$ эта система становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной y.

Асимптотика задачи ищется в виде разложения по степеням σ для $X = (w,v)$ на полуоси $y_0 < y < \infty$ в предположении разрыва (ударной волны) вырожденного решения в точке $y = 1 > y_0$, то есть в виде

$$X = \overline{X} + \varPi X, \overline{X}(y,\sigma) = \sum_{k=0}\overline{X}_k(y)\sigma^k, \varPi X(\eta,\sigma) = \sum_{k=0}\varPi_k X(\eta)\sigma^k, \eta = \frac{y-1}{\sigma}$$

где $\varPi_k X(\eta) = \left\{\varPi_k^- X(\eta)\ при\ \eta < 0, \varPi_k^+ X(\eta)\ при\ \eta > 0\right\}$.

Для нахождения параметра y_0 найдена формула

$$y_0 = \exp\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{\overline{\Phi}(s)}\right),\text{ где } \overline{\Phi}(s) \text{ - известная функция.}$$

Случай цилиндрической симметрии рассмотрен детально во втором параграфе первой главы. В этом случае задача допускает два интеграла: интеграл энергии и интеграл адиабатичности. Благодаря этим соотношениям решение задачи может быть полностью определено.

Для этого случая также найдено условие существования ударной волны: для этого необходимо, чтобы $\gamma > \gamma_0$, где $\gamma_0 \cong 2,67$ – корень уравнения $(\gamma+1)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\sqrt{|\gamma-2|}=2.$ Также доказано, что энтропия за фронтом ударной волны возрастает, т.е. выполнено условии устойчивости ударной волны.

Путем применения метода последовательных приближений доказывается существование и единственность решения задачи, находятся оценки пограничных функций и невязок вида $C\varepsilon^{n+1}$. С помощью применения теоремы Хоппенстеда[1] доказано, что решение может быть продолжено на бесконечность.

Теорема 1.

Пусть выполнено условие существования ударной волны.

Тогда в окрестности вырожденного решения существует решение задачи такое, что при достаточно малом ε

$$\|X - \mathrm{X}_n\| \le C\varepsilon^{n+1},\ 0<\varepsilon\le\varepsilon_0,$$

где C *не зависит от* ε, *а* n *– любое.*

Важно, что в отличие от работы Н.Л. Крашенинниковой[2], где утверждалось отсутствие ударных волн в случае цилиндрической симметрии, в работе показано, что ударные волны возникают при выполнении условия $\gamma > \gamma_0$.

Далее в работе рассматривается случай $\alpha = 1/2$ для общей геометрии течения. Этот случай интересен тем, что задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Благодаря этому факту и тому, что исходную систему можно провести к одному уравнению, в правой части которого числитель и знаменатель имеют формы многочленов, с помощью аппарата Пуанкаре полностью изучен фазовый портрет этого уравнения и характер его особых точек. В результате исследования обнаружено, что в случае $\nu = 0,1$ ударной волны не возникает.

Полученный вывод о том, что в случае сферической симметрии (т.е. при $\nu = 2$) и $\gamma \in (1;5/3]$ перед поршнем возникает ударная волна, полностью согласуется с результатами,

[1] Hoppenstead.F. Singular perturbations on infinite interval, Trans. Amer. Math.Soc. Vol.123, #2,1966,pp.521-535.

[2] Крашенинникова Н.Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, №8, 1955.

полученными Н.Л. Крашенинниковой, но, в отличие от последних, является строго обоснованным.

В третьем параграфе первой главы диссертации для случая общей геометрии течения и $\alpha = 1/2$ однозначным образом определены все внутренние параметры для функций всех порядков, включая высшие. Это позволяет построить асимптотическое решение задачи высокого порядка в этом случае.

Во второй главе рассматривается задача о точечном взрыве в случае цилиндрической симметрии. Эта задача описывается системой

$$
\begin{aligned}
&\rho_t + (\rho u)_x + \rho u/x = 0,\\
&(\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + \rho u^2/x = \left(\widehat{\mu} u_x\right)_x,\\
&(\rho E)_t + [\rho u(E + p/\rho)]_x + [\rho u(E + p/\rho)]/x =\\
&= (\widehat{\lambda}\theta_x + \widehat{\mu} u u_x)_x + (\widehat{\lambda}\theta_x + \widehat{\mu} u u_x)/x,
\end{aligned}
$$

с начальными и краевыми условиями

$$
\left.\left(\rho, u, p\right)\right|_{t=0} = \left(\rho_0, u_0, p_0\right) = const,
$$
$$
u(0, t, \varepsilon) = 0,
$$

где второе условие является условием симметрии течения, $\rho_0 = \rho_0, u_0 = 0, p_0 = 0, \gamma > 1, \gamma = c_p/c_V$, $\widehat{p}_0$ – противодавление. Кроме того, предполагается, что на оси симметрии при $t = 0$ мгновенно выделяется энергия $2\pi E_0$, которая остается постоянной для всего объема движущегося газа, и справедливо равенство

$$
\int_0^\infty \rho\left(e + \tfrac{1}{2}u^2\right) x dx = E_0.
$$

Систему можно привести к тихоновской форме и далее искать асимптотику в том же виде, что и в первой главе диссертации.

Благодаря тому, что задача допускает интеграл энергии и интеграл адиабатичности, система для нахождения регулярной части разложения может быть сведена к одному уравнению.

Коэффициенты сингулярного разложения $\varPi X = \left(\varPi w, \varPi v\right)$ находятся из следующих систем для нулевого и k – го приближений:

$$
\frac{d\varPi_0 w}{d\eta} = \varPi_0 F, \frac{d\varPi_0 v}{d\eta} = 0, \quad \frac{d\varPi_k w}{d\eta} = \varPi_k F, \frac{d\varPi_k v}{d\eta} = \varPi_{k-1} f,
$$

при условии, что $\varPi_k^- X \to 0 \; при \; \eta \to -\infty, \varPi_k^+ X \to 0 \; при \; \eta \to \infty, k = 0,1,2,...$

Из условий сопряжения и условий Гюгонио определяются начальные данные для регулярной части разложения, а также величины $\left(\rho_k^l, u_k^l, p_k^l\right)$.

На первом шаге нулевая асимптотика определяется не полностью, так как остается неопределенным внутренний параметр V_0^l. Этот параметр находится далее при построении асимптотики первого порядка. В работе установлено условие для однозначного определения внутренних параметров V_l^{k-1} при $k = 1, 2, ..., n$:

$$I(\gamma) + 1 \neq 0,$$

где $I(\gamma) = \left(\gamma^2 - 1\right)\int_0^1 \frac{\Gamma(\bar{U}_0)}{\bar{\Delta}_0(U)\left(1 - \bar{U}_0\right)} J_0 y^3 dy$.

Это условие было проверено численно для различных значений параметра γ и было обнаружено, что оно выполняется для $\gamma \leq 3.1$ и для $\gamma \geq 3.2$.

Обоснование асимптотики проводится для краевой задачи в переменных (ρ, p), поскольку вырожденное решение, соответствующее этой задаче, является ограниченным на полуоси $0 \leq y < \infty$ по компонентам ρ и p.

Одновременно с обоснованием асимптотики с помощью применения метода последовательных приближений проводится доказательство теоремы существования и единственности решения задачи.

Аналогично тому, как это сделано в первой главе, находятся оценки пограничных функций и невязок вида $C\varepsilon^{n+1}$. Также показано, что решение может быть продолжено на бесконечность.

Теорема 2.

Пусть выполнено условие $I(\gamma) + 1 \neq 0$.

Тогда в окрестности вырожденного решения существует решение задачи, удовлетворяющее краевому условию с невязкой порядка $O(\varepsilon^{n+1})$ *и такое, что при достаточно малом* ε

$$\left\| X - \mathrm{X}_n \right\| \leq C\varepsilon^{n+1}, \ 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

где C *не зависит от* ε, *а* n *– любое.*

В приложении к диссертации собран и адаптирован теоретический материал, используемый при построении асимптотики решений исследуемых задач. Перечислены условия, при которых существует единственное решение $x(t, \mu)$ краевой задачи и имеет место неравенство $\|x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\le c\mu^{n+1}$ при $0\le t\le 1$.

Далее подробно объясняется понятие условной устойчивости. Также приведен алгоритм нахождения асимптотики общей краевой задачи вида

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t), \tag{1}$$

$$a\cdot z(0,\mu)+b\cdot z(1,\mu)=z^0, \tag{2a}$$

$$y(0,\mu)=y^0, \tag{3b}$$

где $F(z,y,t), f(z,y,t)$ определены на $D=D_z\times D_y\subset R_z^p\times R_y^q$ при $0\le t\le 1$, а постоянные диагональные матрицы a и b таковы, что $a=diag\{E_k,0\}, a+b=E_p$, и дано обоснование асимптотического разложения решения задачи.

Асимптотика решения краевой задачи (1)(2a)(2b) ищется в виде

$$X=\overline{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau_0,\mu)+Qx(\tau_1,\mu), \tag{3}$$

где $\overline{x}(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\overline{x}_k(t), \Pi x=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k x(\tau_0), Qx=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k Q_k x(\tau_1),$ причем $x=\begin{pmatrix} z\\ y\end{pmatrix}$.

Теорема 3.

Пусть выполнены условия А. Тогда при достаточно малом $0\le\mu\le\mu_0$ существует решение задачи (1), (2b), удовлетворяющее краевым условиям (2a) с ошибкой порядка $O(\mu^{n+1})$, и неравенству

$$\|x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\le C\mu^{n+1} \tag{4}$$

при $0\le t\le 1$, где константа С не зависит от μ, а $X_n(t,\mu)$ - частичная сумма разложения (3).

В завершение в приложении приведена теорема Хоппенстенда, в которой при определенных условиях доказано существование решения начальной задачи вида

$$\begin{aligned} &x' = f(t,x,y,\varepsilon), \quad x(t_0)=x_0, \\ &\varepsilon y' = g(t,x,y,\varepsilon), \quad y(t_0)=y_0, \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right) \end{aligned} \qquad (P_\varepsilon)$$

на полубесконечном интервале $t_0 \le t < \infty$, и сходимость этого решения к решению вырожденной системы ри $\varepsilon \to 0$ равномерна на всех замкнутых подмножествах из $t_0 \le t < \infty$.

На теоретические сведения, изложенные в приложении, мы опираемся при изучении поставленных в работе задач. Поскольку ранее этот материал был представлен в разрозненном виде, в том числе частично только в иностранной литературе, было решено переработать его, адаптировав под интересующие нас задачи, и изложить отдельно.

Основные результаты диссертации отражены в следующих публикациях:

1. Троянова И.М., Тупчиев В.А. Асимптотика автомодельного решения задачи о поршне по малым параметрам вязкости и теплопроводности. Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания. Тезисы докладов. – Обнинск, 2006, с.116-117

2. Троянова И.М., Тупчиев В.А. Асимптотика решения задачи о поршне по малым параметрам вязкости и теплопроводности. Труды Ш международной конференции «Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания». – Обнинск, 2006, с.39-46.

3. Tupchiev V.A., Troyanova I.M. The asymptotic of solution of the problem of sucker on small parameters of viscosity and conductivity. Тихонов и современная математика. Тезисы докладов секции Асимптотические методы. - Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова, 2006, с.90

4. Тупчиев В.А., Троянова И.М. Асимптотика решения задачи о точечном взрыве в случае цилиндрической симметрии. Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложение к

современным проблемам естествознания. Тезисы докладов. – Обнинск, 2008, с.80

5. Троянова И.М., Тупчиев В.А. Асимптотика решения задачи о точечном взрыве в случае цилиндрической симметрии// ЖВМ и МФ. -2009. - Т.49 - №7, с.1207-1222. (Troyanova I.M., Tupchiev V.A. Asymptotics of the solution to the point explosion problem in the case of cylindrical symmetry// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2009. – Vol.491 – No.7, pp.1151-1166)

6. Троянова И.М., Тупчиев В.А. Асимптотика автомодельного решения задачи о поршне в случае цилиндрической симметрии// ЖВМ и МФ. -2009. - Т.49 - №9, с. 1676-1689. (Troyanova I.M., Tupchiev V.A. Asymptotics of a self-similar solution to the piston problem in the case of cylindrical symmetry// Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2009. – Vol.49 – No.9, pp. 1601-1614)