

На правах рукописи

Жданова Наталья Сергеевна

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ
В КАНАЛАХ С ПРОДОЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2007

Работа выполнена в Московском инженерно-физическом институте
(государственном университете)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Брушлинский Константин Владимирович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Чечеткин Валерий Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
Курнаев Валерий Александрович

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт механики
МГУ им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится ____ _____ 2007 г. в ____ часов на
заседании диссертационного совета Д212.130.09 в Московском инженерно-
физическом институте по адресу: 115409, г. Москва, Каширское шоссе, д. 31.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского инженерно-
физического института.

Автореферат разослан ____ _____ 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор

Леонов А.С.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена математическому моделированию и численным исследованиям нелинейных плазмодинамических процессов в каналах с продольным магнитным полем.

Актуальность темы

Работа относится к области вычислительной плазмодинамики, включающей в себя постановки задач, математические модели, вычислительные алгоритмы и методы, связанные с исследованием сложных явлений физики плазмы.

Актуальность работ в данной области обусловлена множеством приложений физики плазмы к решению современных научно-технических проблем. Вычислительные модели плазменных явлений играют в них значительную роль, т. к. повышают качество и сокращают трудоемкость исследований, позволяют экономить на проведении дорогостоящих физических экспериментов, а в ряде случаев являются единственным источником информации.

Обширной областью применения вычислительной плазмодинамики являются проблемы управляемого термоядерного синтеза, в частности, задачи магнитного удержания горячей плазмы. Например, задача о Z-пинче, решению которой посвящена одна из первых в мире работ по расчетам МГД-течений плазмы [1].

Важное приложение вычислительной плазмодинамики - разработка плазменных ускорителей. Первоначально ориентированная на применение в электрореактивных двигателях, она привела впоследствии к созданию мощного многоцелевого квазистационарного сильноточного плазменного ускорителя (КСПУ) с рекордными параметрами ускорения (принцип действия ускорителей предложен А.И. Морозовым [2]).

Значительное место в этой разработке занимают работы по численному моделированию и расчетам течений плазмы в каналах ускорителей (например, [3], [4]). В них рассматриваются, в основном, течения в собственном поперечном магнитном поле. Задачи развития теории плазменных ускорителей, их совершенствования и расширения области применения требуют исследования течений плазмы в присутствии внешнего продольного магнитного поля.

Цель работы

Основная цель работы - разработка математической модели и исследование течений плазмы в каналах с продольным магнитным полем.

В работе применяются аналитические и численные методы математического моделирования.

Основные результаты работы

1. Разработана двумерная осесимметричная МГД-модель течения плазмы в каналах в присутствии внешнего продольного магнитного поля.

2. Сформулирована и аналитически решена в квазиодномерном (гидравлическом) приближении МГД-задача о течении плазмы в каналах с продольным магнитным полем. Проведена классификация стационарных течений, где выделены докритические и закритические течения (по отношению скорости плазмы к продольной альфвеновской скорости), дозвуковые, сверхзвуковые и трансзвуковые (по отношению скорости к быстрой и медленной скоростям магнитного звука). Установлены основные свойства и особенности течений выделенных типов. Показано, что закритические течения качественно отличаются от докритических перераспределением энергий (кинетической, тепловой и магнитной).

3. Разработан и реализован полностью двумерный (не требующий расщепления по направлениям) численный метод решения МГД-задач в

предположении осевой симметрии (на основе разностного алгоритма Залесака).

4. С использованием созданной вычислительной модели получены характеристики и определены закономерности двумерных стационарных течений плазмы во внешнем продольном магнитном поле. Установлено, в частности, что увеличение продольного поля приводит сначала к перераспределению плазмы в сторону внешнего электрода, а затем к возникновению областей течений закритического типа. Определено, что продольное магнитное поле ослабляет компрессию течений на оси канала за срезом центрального электрода.

Достоверность результатов

Достоверность численных результатов подтверждается внутренней сходимостью метода расчетов, их сопоставлением с решениями, полученными аналитически в квазиодномерном приближении. Модель проверена на хорошо изученных задачах о течении плазмы в собственном азимутальном магнитном поле.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми. Они дополняют и развивают результаты исследований течений плазмы в собственном поперечном поле.

Апробация и публикации

Основная часть работы выполнена в период с 2002 по 2006 год. Результаты работы докладывались и обсуждались на Научных сессиях МИФИ (2003, 2005 и 2006 гг.), Международной конференции “Тихонов и современная математика” (Москва, 2006 г.), IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006 г.), на научном семинаре кафедры “Прикладная математика” МИФИ, а также на

семинаре им. К.И. Бабенко Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Всего по теме диссертации опубликовано 7 печатных работ, две из них в реферируемых журналах - “Известия Академии Наук. Механика жидкости и газа”, “Журнал вычислительной математики и математической физики”, остальные - в сборниках трудов научных конференций.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из Введения, четырех глав и Заключения. В главах выделены разделы. Основные результаты и выводы работы представлены в Заключении. Материал диссертации изложен на 106 страницах, включает 22 рисунка и список литературы из 77 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** рассматриваются вопросы актуальности, определяются цели и методы работы, дается обзор предшествующих исследований. Кратко излагается содержание, представляются основные результаты диссертационной работы.

В **первой главе** формулируется постановка двумерной МГД-задачи о течении плазмы в коаксиальном канале плазменного ускорителя в присутствии внешнего продольного магнитного поля. Описывается принцип действия ускорителя. Ускорение плазмы в канале происходит за счет взаимодействия собственного азимутального магнитного поля с электрическим током радиального направления. Продольное поле, созданное внешними проводниками с током, приводит к вращению плазмы в азимутальном направлении. Задача ставится в цилиндрических координатах (z, r, φ) . Электроды, образующие канал, предполагаются непроницаемыми и эквипотенциальными. Плазма рассматривается как сплошная среда, состоящая из электронов и ионов с едиными макропараметрами.

Приводится система МГД-уравнений, описывающая течение плотной горячей плазмы, в общем случае, с конечной проводимостью. Определяются область решения, граничные и начальные условия. Выбираются единицы измерения и задача приводится к безразмерному виду. Выделяются параметры задачи, и указывается их физический смысл.

В решении задачи участвуют МГД-уравнения в консервативной форме. Осуществляется переход к новым координатам, в которых криволинейные границы расчетной области, соответствующие внешнему и внутреннему электроду, становятся координатными линиями. Это упрощает реализацию граничных условий при проведении численных расчетов.

Во **второй** главе МГД-задача решается в квазиодномерном (гидравлическом) приближении. Предполагается, что зазор между электродами мал и медленно меняется вдоль оси, средний радиус канала постоянен, а описывающие течение функции усредняются по поперечному сечению канала, которое присутствует в коэффициентах уравнений в виде функции от продольной координаты ($S(z)$).

Выводится система МГД-уравнений в этом приближении. Определяются граничные и начальные условия задачи.

В случае стационарных течений бесконечно проводящей плазмы $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \nu = 0\right)$ уравнения системы приводятся к разрешенному относительно первых производных виду:

$$\frac{du}{dz} = \frac{C_T^2(u^2 - C_A^2) + \frac{H_\phi^2 u^2}{\rho}}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \cdot \frac{u dS}{S dz}, \quad \frac{d\rho}{dz} = -\frac{(u^2 - C_A^2)}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \cdot \frac{\rho u^2 dS}{S dz},$$

$$\frac{dH_\phi}{dz} = \frac{-H_\phi u^4}{(u^2 - C_s^2)(u^2 - C_f^2)} \cdot \frac{1 dS}{S dz}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{H_z}{\rho u} \frac{dH_\phi}{dz}, \quad \frac{ds}{dz} = 0, \quad (1)$$

где $H^2 = H_\varphi^2 + H_z^2$;

$$C_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left(C_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(C_T^2 + \frac{H^2}{\rho} \right)^2 - 4C_T^2 C_A^2};$$

$$C_A^2 = \frac{H_z^2}{\rho}; \quad C_T^2 = \frac{\mathcal{P}}{\rho}.$$

Здесь C_s , C_f - скорости медленного и быстрого магнитного звука, а C_A - альфвеновская скорость, соответствующая продольному магнитному полю H_z .

Далее проводится анализ основных качественных закономерностей течений в присутствии продольного магнитного поля.

В отличие от аналогичных уравнений для течения плазмы только в поперечном магнитном поле (и уравнений газодинамики), правые части уравнений (1) имеют две особенности при $u^2 = C_s^2$ и $u^2 = C_f^2$. Это означает, что их гладкие решения описывают либо дозвуковые, либо сверхзвуковые (по отношению к каждой из скоростей магнитного звука C_s и C_f) течения.

Представляющие наибольший интерес трансзвуковые течения (с монотонным изменением скорости вдоль канала и переходом через любую из звуковых скоростей) существуют, когда любой из множителей в знаменателях уравнений может обратиться в нуль лишь одновременно с числителем. Переход через скорость звука может произойти, когда знаменатель обратиться в нуль одновременно с производной $\frac{dS}{dz}$, т.е. в минимальном сечении канала.

Еще одно специфическое свойство уравнений (1) связано с альфвеновской скоростью. Если разность $(u^2 - C_A^2)$ обратится в нуль хотя бы в одной точке, то она равна нулю тождественно по z , т.к. ее производная пропорциональна ей самой, при этом плотность плазмы постоянна (вытекает

из второго уравнения (1)). Тип течения при $u = C_A$ называется **критическим**, его основная особенность - постоянство плотности вдоль оси канала. Она в этом случае равна так называемому критическому значению $\rho_{cr}^2 = H_z^2 / u^2$.

Решения при $u \neq C_A$ описывают два существенно различных класса течений: **докритические** - при $u > C_A$, и **закритические** - при $u < C_A$.

На их существование впервые было обращено внимание в работе [5].

Поскольку $C_s < C_A < C_f$, докритические течения могут быть дозвуковыми, сверхзвуковыми или трансзвуковыми только по отношению к скорости быстрого магнитного звука C_f , а закритические – по отношению к скорости медленного магнитного звука C_s . В отсутствие продольного поля все течения – докритические.

Решения системы, описывающие возможные типы стационарных течений, находятся аналитически из первых интегралов системы уравнений (1). Все константы в них, кроме двух - C_1 и C_2 , определяются граничными условиями на входе в канал. Константа C_1 равна значению скорости втекающей плазмы, которое либо задается, либо определяется в процессе решения в зависимости от типа искомого решения и соответствующих ему граничных условий. Константа C_2 равна заданной величине продольного магнитного потока (относительно характерного поперечного магнитного поля).

Исключением из первых интегралов всех искомым величин, кроме плотности ρ , получено одно алгебраическое уравнение, определяющее ρ , как функцию от координаты z , и параметров задачи C_1 и C_2 :

$$F(\rho) = F_0(\rho) + F_1(\rho) = \frac{C_1^2}{2S^2(z)} \quad (2)$$

где

$$F_0(\rho) = \rho^2 \left(\frac{C_1^2}{2} + \frac{\beta\gamma}{2(\gamma-1)} + 1 - \frac{\beta\gamma}{2(\gamma-1)} \rho^{\gamma-1} - \rho \right),$$

$$F_1(\rho) = \frac{k^2 \rho^2 (1-\rho)}{(1-k^2 \rho)^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \rho - k^2 \rho^2 \right),$$

$$k^2 = \frac{C_2^2}{C_1^2}.$$

Все остальные неизвестные величины выражаются через плотность. В результате, основные функциональные зависимости, характеризующие течения идеальной проводящей плазмы, определяются, не прибегая к численному решению МГД-уравнений.

Классификация возможных типов решений задачи схематически представлена на рис. 1.

Течения типов 1 – 4 – докритические: тип 1 – сверхзвуковые, тип 2 – трансзвуковое (с монотонным убыванием скорости), тип 3 – трансзвуковое (с ускорением), тип 4 – дозвуковые относительно C_f . Течение типа 3 представляет интерес для теории плазменных ускорителей, в нем электромагнитная и тепловая энергия переходят в кинетическую. Течение типа 2 соответствует МГД-генератору, в нем кинетическая и тепловая энергии переходят в электромагнитную. Кривые 6-9 описывают закритические течения, которые аналогичным образом соотносятся со скоростью медленного магнитного звука C_s . Кривая 5 – соответствует течению критического типа с постоянной плотностью.

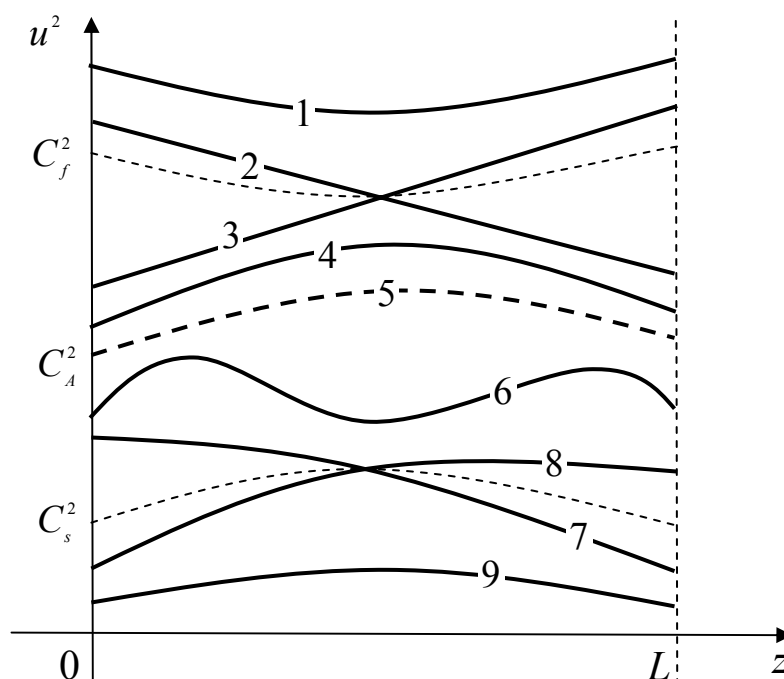


Рис. 1. Схематические графики величины $u^2(z)$ для различных типов стационарных течений

Решения задачи, соответствующие всем возможным типам течений, приводятся в работе в виде графиков основных физических величин.

Далее рассматриваются особенности закритических и докритических течений. Докритические течения обладают, преимущественно, теми же свойствами, что и течения в собственном поперечном поле. Параметры ускорения в трансзвуковом режиме незначительно уменьшаются за счет вращения плазмы в азимутальном направлении. Закритические течения соответствуют сильному продольному полю. Основное их отличие от докритических течений - в переходах разных видов энергии (кинетической, тепловой и электромагнитной) друг в друга. В закритическом трансзвуковом течении с замедлением кинетическая энергия преобразуется не в электрическую, а вместе с вложенной электромагнитной - в тепловую. В течениях с ускорением происходит обратный переход - тепловая энергия превращается в кинетическую и частично в электрическую. То есть, закритические течения в каналах-соплах не могут быть рабочим механизмом МГД-ускорителей и МГД-генераторов.

Различие докритических и закритических трансзвуковых течений проявляется также в их зависимости от величины разрядного тока. При возрастании тока скорость докритического течения растет, и энергия перераспределяется в сторону кинетической, а в закритическом - плазма отдает меньше тепла, уменьшая при этом параметры ускорения и генерируемого тока.

Третья глава содержит обоснование и описание метода численного решения двумерной МГД-задачи в криволинейных координатах. Метод основан на разностном алгоритме Залесака [6] и, с одной стороны, сохраняет относительно простую логику метода FCT [7], а с другой, в отличие от него, является полностью многомерным. (Термин “полностью многомерный” означает, что при решении многомерных задач не требуется расщепление алгоритма по направлениям.)

Расчеты проводятся в нестационарной модели, а представляющий интерес стационарный режим образуется в процессе установления.

Переход на следующий временной шаг осуществляется в три этапа.

На первом из них с помощью простой монотонной схемы первого порядка точности рассчитываются разностные потоки и используются в построении грубого варианта решения. Здесь применяется обобщение на двумерный случай диффузионного этапа метода FCT.

На втором этапе производится уточнение предыдущего результата до более высокого порядка точности. Для его реализации также используется логика метода FCT: вводятся “фениксные” антидиффузионные потоки, призванные нейтрализовать негативное влияние диффузии.

На третьем этапе антидиффузионные потоки корректируются и после этого участвуют в расчете решения на следующем временном слое. Коррекция осуществляется умножением антидиффузионных потоков на соответствующие корректирующие множители. Они подбираются таким образом, чтобы добавление антидиффузионных потоков не вызвало

образование новых, физически не обусловленных, экстремумов и не усилило уже имеющиеся максимумы и минимумы решения. Такой способ коррекции (в отличие от коррекции метода FCT) не требует расщепления по пространственным переменным, так как он оперирует одновременно с четырьмя антидиффузионными потоками, вносящими (или выносящими) искомую величину в окрестность расчетной точки из соседних ячеек. Это дает возможности эффективного распараллеливания вычислительного алгоритма для использования в расчетах на современных многопроцессорных вычислительных машинах.

Далее определяются способы разностной аппроксимации граничных и начальных условий. Предлагается метод расчета точек нижней границы области, соответствующей каналу с укороченным центральным электродом, где возникают проблемы, связанные с обращением в нуль координаты r .

В конце главы рассматриваются вопросы согласования разностных дифференциальных операторов, что обусловлено необходимостью обеспечить выполнение разностного аналога уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, которое неявно присутствует в системе МГД-уравнений.

В **четвертой** главе приводятся и анализируются результаты двумерных расчетов. (Программа расчетов реализована на языке C++ с использованием объектно-ориентированной методологии.)

В двумерном случае, полученная в квазиодномерной модели классификация течений, применяется к областям, ограниченными траекториями движения плазмы, т.е. к тонким трубкам тока. При этом показывается, что двумерные течения могут содержать области различных типов: докритических и закритических, до-, сверх- и трансзвуковых (по отношению к скоростям быстрого и медленного магнитного звука).

При сравнительно небольшой величине продольного поля во всем канале устанавливается докритический режим течения. Плотность плазмы, которая тяготеет к наружному электроду без внешнего поля, в его

присутствии перераспределяется в ту же сторону. Это объясняется тем, что продольное поле, взаимодействуя с радиальным электрическим током, вращает плазму вокруг оси системы и центробежная сила дополнительно прижимает ее к внешней границе. Величина продольной скорости монотонно возрастает вдоль каждой траектории и на выходе оказывается лишь незначительно меньшей, чем в течениях без продольного поля (что подтверждает и квазиодномерная модель). Указанные свойства способствуют организации регулярного течения в каналах сильноточных ускорителей в режиме переноса тока ионами.

Увеличение продольного поля приводит к возникновению вдоль внешнего электрода области критических течений, которая при дальнейшем его увеличении смещается к оси канала, а вблизи этого электрода образуются течения закритического типа. Таким образом, течение в присутствии продольного магнитного поля может включать одновременно области докритических и закритических течений. Возникновение закритических течений плазмы у внешнего электрода иллюстрирует рис. 2. С ростом величины продольного поля плотность сначала стремится к равномерному распределению (характерному для критического течения), а потом соответствует закритическому, сверхзвуковому относительно скорости медленного магнитного звука, течению.

Достаточно сильному продольному полю соответствуют полностью закритические течения. Их свойства исследованы на основании результатов нескольких серий расчетов. Установлено, что они могут содержать области течений различных типов относительно скорости медленного магнитного звука: например, у внешнего электрода – трансзвуковых с возрастанием скорости (тип 8 на рис. 1), а у внутреннего – трансзвуковых с убыванием (тип 7).

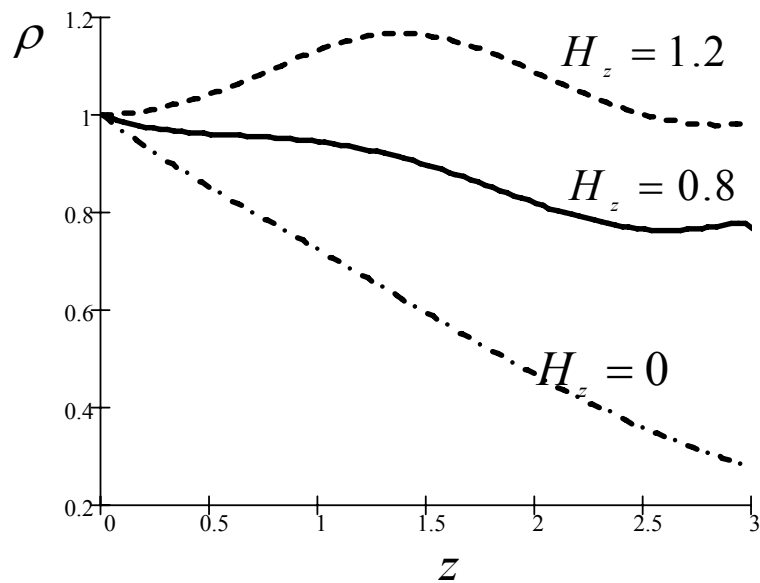


Рис. 2. Распределение плотности плазмы вдоль внешнего электрода при различных значениях величины продольного поля

Отличия докритических и закритических течений связаны, в основном, с тем, что в последних электрический ток в плазме течет в обратном направлении, т.е. вырабатывается системой. Это означает, что тепловая энергия плазмы переходит не только в кинетическую, как в случае докритических течений, но и в электромагнитную.

Зависимость течений от разрядного тока следующая. Его уменьшение ослабляет роль магнитного поля и, следовательно, влияние продольного поля при тех же качественных закономерностях оказывается менее заметным количественно. Увеличение разрядного тока усиливает влияние продольного поля и приводит к сужению диапазона его значений, при которых течения сохраняют докритический режим.

В заключение главы рассматриваются результаты численных исследований влияния продольного магнитного поля на компрессионные течения плазмы в канале с укороченным центральным электродом. Такие течения характеризуются возникновением конусообразной ударной волны, за фронтом которой плотность плазмы продолжает расти и на некотором расстоянии от оси симметрии системы образуется контактный разрыв,

определяемый уменьшением плотности и ростом температуры. Даже небольшое по величине продольное поле оказывает заметное воздействие на течение за срезом центрального электрода. Это объясняется тем, что в этой области при приближении к оси симметрии системы азимутальная компонента магнитного поля H_φ стремится к нулю и, следовательно, отношение продольной и азимутальной компонент стремится к бесконечности. Расчеты с учетом продольного магнитного поля показали, что в основной части канала характеристики течения практически не изменились, а влияние продольного поля проявилось преимущественно за срезом центрального электрода. Зона компрессии ослабла и сместилась в направлении внешнего электрода, вследствие чего ее полый характер, т.е. падение плотности на оси симметрии, проявился сильнее. Интенсивность ударной волны заметно уменьшилась.

В **заключении** диссертации представлены основные результаты и выводы работы.

Заключение

Кратко, результаты работы следующие.

1. Разработаны математическая и вычислительная модели течения плазмы в каналах с внешним продольным магнитным полем.
2. Получено аналитическое решение МГД-задачи о стационарном течении плазмы в квазиодномерном приближении, проведена классификация, установлены основные свойства и особенности течений.
3. Разработана методика численного моделирования двумерных МГД-течений.
4. С использованием созданной вычислительной модели определены характеристики и закономерности двумерных течений плазмы в продольном магнитном поле.

Основные результаты работы являются новыми.

Цитируемая в реферате литература

1. Брагинский С.И., Гельфанд И.М., Федоренко Р.П. Теория сжатия и пульсаций плазменного столба в мощном импульсном разряде // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций / Под ред. М.А. Леонтовича - Изд. АН СССР. 1958. Т. 1. С. 201.
2. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. - М.: Атомиздат, 1978. 326 с.
3. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. - М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 88-163.
4. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ // Физика плазмы. - 1990. Т. 16. Вып. 2. С. 147-157.
5. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. - М.: Атомиздат, 1974. Вып. 8. С. 3-87.
6. Zalesak S.T. Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids // Journ. of Computational Physics. 1979. V. 31. P. 335-362.
7. Оран Э., Борис Д. Численное моделирование реагирующих потоков. : Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. 660 с.

Основные публикации по теме диссертации

1. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. Квазиодномерная модель течения плазмы в канале с внешним продольным магнитным полем // Научная сессия МИФИ. - 2003. Сб. научных трудов. Т. 7. С. 84-85.
2. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. Стационарные МГД-течения в соплах с внешним продольным магнитным полем // Изв. АН. МЖГ. - 2004. № 3. С. 135-146.
3. Жданова Н.С. Явная разностная схема для расчетов двумерных МГД-течений в каналах // Научная сессия МИФИ. - 2005. Сб. научных трудов. Т. 7. С. 101-102.
4. Жданова Н.С. Двумерная модель течения плазмы в канале с внешним продольным магнитным полем // Научная сессия МИФИ. - 2006. Сб. научных трудов. Т. 7. С. 124-125.
5. Жданова Н.С. Расчет течений плазмы в каналах-соплах с внешним продольным магнитным полем // Тихонов и современная математика. Математическое моделирование. - 2006. Сб. трудов секции № 2. С. 197-198.
6. Брушлинский К.В., Жданова Н.С., Козлов А.Н. Численная модель МГД-ускорения в каналах-соплах с внешним продольным магнитным полем // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. - 2006. Сб. трудов. Т. II. С. 39.
7. Брушлинский К.В., Жданова Н.С. Расчет осесимметричных МГД-течений в канале с внешним продольным магнитным полем // ЖФМиМФ. - 2006. Т. 46. № 3. С. 548-557.