

539.1

В.85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике
2 сессия ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ
ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЯХ
(конспекты лекций)

В. М. КОЛЫБАСОВ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА
МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ
И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ
В ПРЯМЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

МОСКВА — 1971

539/
B.85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

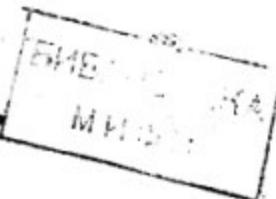
ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ ЭНЕРГИЯХ
(Конспекты лекций)

В.М.КОЛЫБАСОВ

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ
ЭФФЕКТЫ В ПРЯМЫХ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ

562509 - 562513 (5)

МОСКВА - 1971 г.



I. Введение

Частицы, участвующие в ядерных реакциях, как правило, обладают спинами. Это сразу усложняет исследование реакций, т.к. теперь каждая реакция описывается не одной, а несколькими скалярными амплитудами. Если в физике элементарных частиц редко встречаются спины выше $3/2$, то в ядерной физике высокие значения спинов совсем не редкое явление. Число же скалярных амплитуд, характеризующих процесс, быстро растет с увеличением спинов. Например, для упругого рассеяния ядер со спинами 2 и $1/2$ имеется 30 (тридцать!) независимых амплитуд.

Постановка почного опыта, из которого можно было бы получить тридцать функций, является сейчас нереальной задачей. Отсюда видны трудности определения механизма реакций по экспериментальным данным. Нетривиальной задачей является указание характеристик процесса, наиболее чувствительных к предположению о доминирующей роли того или иного механизма.

С другой стороны, наличие спинов приводит к новым физическим явлениям. Предсказания теории становятся богаче и проверяются не только при изучении угловых распределений и энергетических спектров частиц, но также и при изучении поляризации, квадрупольяризации, асимметрии и их связи для различных процессов. Информация, полученная при исследовании поляризационных эффектов, может оказаться решающей при определении механизма процесса.

Настоящий курс лекций посвящен описанию явлений, связанных с наличием у частиц спинов, причем наибольшее внимание будет уделено прямым ядерным реакциям.

Сначала мы получим разложение матрицы рассеяния по скалярным амплитудам для реакции с произвольным числом нерелятивистских частиц, каждая из которых может обладать любым спином. Это аналог хорошо известного представления $\alpha + \beta(\vec{r} \vec{n})$ для амплитуды упругого рассеяния частиц со спинами $1/2$ и 0 . В указанном разложении явно выделены множители "кинематического" происхождения, которые определяются не динамикой процесса, а лишь требованием инвариантности амплитуды относительно вращений системы отсчета и пространственной инверсии.

Затем будут изучены следствия инвариантности относительно обращения времени и ограничения, появляющиеся при наличии тождественных частиц.

В следующем разделе вводится поляризационная матрица плотности. Показано, как выражаются через нее всевозможные поляризационные эффекты.

Для нахождения поляризационной матрицы плотности требуется знание амплитуды реакции. Раздел 4 посвящен описанию современных представлений о прямых процессах. Кратко излагается формализм нерелятивистских фейнмановских диаграмм, который используется для нахождения амплитуд прямых ядерных реакций. Основное внимание обращается на плюсные и треугольные диаграммы, используемые в дальнейшем.

В разделе 5 рассматривается связь между различными поляризационными эффектами в бинарных реакциях (срыва, подхват, замещения). Показано, как весьма просто выводятся результаты, получаемые обычно путем громоздких выкладок в работах, использующих метод искаженных волн.

В следующем разделе изучаются поляризационные эффекты в реакциях выбивания при небольших импульсах остаточного ядра в предположении, что амплитуда дается суммой полюсной диаграммы и некоторого добавочного члена со сравнительно простой спиновой структурой.

Наконец, заключительный раздел посвящен в основном критерию Треймана-Янга для частиц со спином. Показано, что в широком классе случаев наличие спинов не меняет вывода об изотропности распределения по углу Треймана-Янга для реакций, в амплитуде которых доминирует полюсная диаграмма. Обсуждается характер такого распределения в других случаях и возможность использования критерия Треймана-Янга для идентификации механизма реакции.

В приложении кратко излагаются основные правила графической техники суммирования коэффициентов Клебша-Гордана.

Главная цель лекций - изложить основные моменты работы с поляризационными явлениями, скорее даже идеиную сторону, а не количественные результаты. Поэтому мы не всегда будем стремиться к предельной общности изложения, зачастую ограничиваясь рассмотрением таких частных случаев, на примере которых легче всего проследить характерные черты метода.

2. Следствия инвариантности матрицы рассеяния относительно преобразований систем отсчета

2а. Амплитуда реакции

Рассмотрим столкновение частиц I и 2 с образованием частиц 3, 4... n :



Определим амплитуду реакции $M_{\alpha\beta}$ через δ' -матричный элемент

$$\delta'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\underline{P}_{\alpha} - \underline{P}_{\beta}) M_{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

Индексы α и β относятся к начальному и конечному состояниям и включают в себя число и род участвующих в реакции частиц $1, 2, \dots, n$, а также характеристики их спинового состояния и состояния движения. В формуле (2.2) $\underline{P}_{\alpha} = (\varepsilon_{\alpha}, \vec{P}_{\alpha})$ и $\underline{P}_{\beta} = (\varepsilon_{\beta}, \vec{P}_{\beta})$ — 4-импульсы начального и конечного состояний.

При такой нормировке амплитуда $M_{\alpha\beta}$ в теории возмущений равна взятому с обратным знаком матричному элементу оператора энергии взаимодействия, вызывающего переход $\alpha \rightarrow \beta$.

В дальнейшем при развернутой характеристике начального и конечного состояний иногда будет использоваться дираковская форма записи матричных элементов $M_{\alpha\beta} \equiv \langle \beta | M | \alpha \rangle$.

Дифференциальное сечение реакции (2.1) равно

$$d\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{j_{12}} \frac{|M_{\alpha\beta}|^2}{(2\pi)^3 n!} \delta^{(4)}(\underline{P}_{\alpha} - \underline{P}_{\beta}) d^3 p_1 \dots d^3 p_n, \quad (2.3)$$

где

$$j_{12} = \sqrt{(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 - [\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2]^2} = \frac{\sqrt{(\underline{P}_1 \cdot \underline{P}_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

В случае бинарной реакции ($n = 4$) в с.ц.и.

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4}{W^2} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{|M_{\alpha\beta}|^2}{4\pi^2}; \quad W = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad (2.4)$$

ρ и ρ_0 - модули импульсов конечных и начальных частиц.

Если все участвующие в реакции частицы нерелятивистские, то

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{m_{12} m_{34}}{4\pi^2} \frac{\rho}{\rho_0} |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (2.5)$$

Здесь m_{ij} - приведенная масса частиц i и j . При упругом рассеянии ($m_{12} = m_{34} = m$)

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 |M_{\alpha\beta}|^2. \quad (2.6)$$

Амплитуда рассеяния в обычной квантовомеханической нормировке ($\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = |f_{\alpha\beta}|^2$) связана с $M_{\alpha\beta}$ равенством

$$f_{\alpha\beta} = \frac{m}{2\pi} M_{\alpha\beta}. \quad (2.7)$$

Для распада $I \rightarrow 2 + 3$ можно записать связь между его вероятностью в единицу времени и квадратом модуля амплитуды реакции (рассматриваем нерелятивистские частицы)

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{m_{23}\rho}{2\pi} |M_{\alpha\beta}|^2, \quad \rho = \sqrt{2m_{23}(m_1 - m_2 - m_3)}. \quad (2.8)$$

Релятивистски-инвариантной величиной является не $M_{\alpha\beta}$,

а $F_{\alpha\beta} = (2\varepsilon_1 \cdot 2\varepsilon_2 \cdots 2\varepsilon_n)^{\frac{1}{2}} M_{\alpha\beta}$. Нас, однако, в дальней-

шем будет обычно интересовать случай, когда все участвующие в реакции частицы обладают нерелятивистскими скоростями, так что можно положить $\varepsilon_i = m_i$. Тогда сама амплитуда реакции M_{ab} должна быть инвариантна относительно вращений и галилеевских преобразований.

26. Инвариантность относительно вращений.

Выделение спиновых переменных

Амплитуда реакции (2.1) зависит от 3n - 10 инвариантных мандельстамовских переменных

$$S_{ik} = (\underline{\rho}_i + \underline{\rho}_k)^2, \quad t_{kn} = (\underline{\rho}_k - \underline{\rho}_n)^2. \quad (2.9)$$

Заметим, что в нерелятивистском случае удобно выделить большие компоненты и перейти к величинам

$$\widetilde{S}_{ik} = S_{ik} - (m_i + m_k)^2 \approx -(\overrightarrow{\rho}_i + \overrightarrow{\rho}_k)^2 + 2(m_i + m_k)(E_i + E_k), \quad (2.10)$$

$$\widetilde{t}_{kn} = t_{kn} - (m_k - m_n)^2 \approx -(\overrightarrow{\rho}_k - \overrightarrow{\rho}_n)^2 + 2(m_k - m_n)(E_k - E_n).$$

\widetilde{S}_{ik} с точностью до коэффициента $2(m_i + m_k)$ равно кинетической энергии частиц i и k в с.ц.и. этих частиц, а \widetilde{t}_{kn} пропорционально квадрату импульса частицы n в системе покоя частицы k .

В случае частиц со спином переменными типа (2.10) не исчерпываются все величины, не меняющиеся при галилеевских преобразованиях и вращениях. Имеются галилеевски-инвариантные единичные вектора, направленные по относительным скоростям частиц

$$\vec{n}_{ik} = \frac{\vec{v}_i - \vec{v}_k}{|\vec{v}_i - \vec{v}_k|} . \quad (2.II)$$

Мы знаем, что в нерелятивистском случае при галилеевских преобразованиях не изменяются спиновые функции частиц. В соответствии с квантово-механическим принципом суперпозиции элементы матрицы реакции должны быть линейны по каждой из спиновых функций. Поэтому в выражение для амплитуды могут входить инвариантные относительно вращений комбинации векторов \vec{n}_{ik} и спиновых функций частиц, причём каждая спиновая функция входит линейным образом. Обобщая метод, использованный в работе [1], будем записывать амплитуду реакции (2.I) в таком виде, где явно выделены множители, зависящие от спинов, причем оставшиеся скалярные амплитуды (формфакторы) зависят только от инвариантных переменных $\tilde{\beta}_{ik}$ и $\tilde{\tau}_{ik}$. Задача по существу сводится к нахождению всех независимых скаляров, которые можно построить из векторов $\vec{n}_{12}, \vec{n}_{13}, \dots, \vec{n}_{n-1n}$ и спиновых функций частиц. Ниже мы решим эту задачу последовательно для трехвостки, бинарной реакции и затем в общем случае [2,3].

Сейчас полезно вспомнить некоторые свойства спиновых волновых функций. Волновую функцию ψ частицы со спином j можно разложить по собственным функциям

$$\psi = \sum_{\mu} \psi(\mu) \psi_{j\mu} . \quad (2.I2)$$

Здесь коэффициенты $\psi(\mu)$ представляют амплитуды вероятностей для различных значений μ . Они являются "компонентами" спиновой волновой функции (см. [4], стр. 242).

$\psi_{j,m}$ - собственные (или базисные) функции, отвечающие проекции спина на ось \vec{z} , равной m . Это столбцы с элементами $(\psi_{j,m})_c = \delta_{mc}$. Значение ψ в данной точке пространства не может зависеть от выбора системы координат, т.е. сумма $\sum_m \psi(m) \psi_{j,m}$ является скаляром. Отсюда следует, что $\psi(m)$ и $\psi_{j,m}$ преобразуются по сопряженным представлениям группы вращений.

Для нас в дальнейшем важно, что при j - целом $\psi_{j,m}$ преобразуется как Y_{jm} , т.е. $\psi'_{j,m}$ в повернутой системе координат также выражается через $\psi'_{j,m}$, как $Y_{jm}(\hat{g}\vec{n})$ через $Y_{j,m}(\vec{n})$. Поэтому скаляром является свертка $\psi_{j,m} Y_{j,m}^*(\vec{n}) = (-1)^{-m} \psi_{j,m} Y_{j,-m}(\vec{n})$. Соответственно, если j_1 и j_2 - полуцелые, то скаляр можно образовать так:

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{e_m} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} Y_{em}^*(\vec{n})$$

В свою очередь $\psi(m)$ преобразуются как Y_{jm}^* . Отметим еще, что величина

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_2 m_2} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}^* \quad (2.13)$$

преобразуется как ψ_{j_1, m_1}^* . Это легче всего увидеть, преобразовав ее, воспользовавшись свойствами коэффициентов Клебша-Гордана

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_2 m_2} \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2}^* =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2j_2+1}{2j_{12}+1}} (-1)^{j_1+j_2-j_{12}} (-1)^{j_1-m_1} C_{j_1-m_1, j_2, m_2}^{j_{12}, m_{12}} \Psi_{j_1, m_1} \Psi_{j_2, m_2}^* \stackrel{?}{=} \\
 &= \sqrt{\frac{2j_2+1}{2j_{12}+1}} (-1)^{j_2-j_{12}-j_1} C_{j_1, m_1, j_2, m_2}^{j_{12}, m_{12}} (-1)^{j_1-m_1} \Psi_{j_1, m_1} \Psi_{j_2, m_2}^* \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

и вспоминая, что $(-1)^{j_1-m_1} \Psi_{j_1, m_1}$ преобразуется как Ψ_{j_1, m_1}^* .

В случае упругого рассеяния частиц со спинами $1/2$ и 0 мы знаем представление через скалярные амплитуды

$$M_{\alpha\beta} = \Psi_\beta^+ [\alpha + \beta(\vec{\sigma}\vec{n})] \Psi_\alpha. \quad (2.15)$$

Здесь Ψ_α и Ψ_β описывают произвольные спиновые состояния частицы со спином $1/2$ в начале и в конце (не обязательно отвечающие определенным значениям проекции на ось Z). $\vec{\sigma}$ — простейший пример спин-тензора, т.е. оператора, построенного из спиновых функций частиц и обладающего определенными тензорными свойствами. Этот оператор можно построить из базисных функций $\Psi_{\frac{1}{2}, m_3}$ спинорной частицы в конце и $\Psi_{\frac{1}{2}, m_1}^+$ в начале, причем эти функции входят в виде прямого произведения

$$T^{IM} = C_{\frac{1}{2}, m_1, IM}^{\frac{1}{2}, m_3} \Psi_{\frac{1}{2}, m_3} \Psi_{\frac{1}{2}, m_1}^+, \quad (2.16)$$

то есть

$$\begin{aligned}
 T'' &= C_{\frac{1}{2}M_1, 11}^{\frac{1}{2}M_3} \Psi_{\frac{1}{2}M_3} \Psi_{\frac{1}{2}M_1}^+ = C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 11}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \Psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \Psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ = \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} (10)_3 (1)_1 \rightarrow -\sqrt{\frac{2}{3}} (0, 0), \quad (2.17) \\
 T'^{-1} &= C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1-1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \Psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \Psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^+ = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} (01)_3 (0)_1 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} (0, 0), \\
 T'^0 &= C_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 10}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} (10)_3 (0)_1 + C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 10}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} (01)_3 (1)_1 = \\
 &= \sqrt{\frac{1}{3}} [(10)_3 (0)_1 - (01)_3 (1)_1] \rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}} (1, 0).
 \end{aligned}$$

Вспомним, что в каноническом базисе

$$\begin{aligned}
 \sigma^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x - i\sigma_y) = -\sqrt{2} (0, 0), \\
 \sigma^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + i\sigma_y) = \sqrt{2} (0, 1), \quad (2.18) \\
 \sigma^0 &= \sigma_z = (1, 0), \quad \text{т.е. } T'^{IM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma^M.
 \end{aligned}$$

Нам было удобно использовать эрмитовски-сопряженные функции именно начальной частицы, т.к. при этом взятие оператора ($\vec{\sigma} \vec{n}$) в обкладки (2.15) эквивалентно использованию равенства

$$\Psi_{jm}^+ \Psi_{j'm'}^- = \delta_{mm'} \quad (2.19)$$

Аналогичное построение можно использовать и в общем случае. Сначала из базисных функций частиц $\Psi_{j_1 M_1}^+$, $\Psi_{j_2 M_2}^+$, $\Psi_{j_3 M_3}$, $\Psi_{j_4 M_4}$... $\Psi_{j_n M_n}$ образуются спин-тензоры

T_{LM}^Δ , преобразующиеся как шаровые ($2L + 1$) вектора (суммарный спин всех частиц, участвующих в реакции, обязательно целый). Затем они сворачиваются с ($2L + 1$)-векторами Φ_{LM}^δ , образованными из векторов \vec{n}_{ij} . Индекс δ нумерует различные Φ_{LM} с одинаковыми L и M , а индекс Δ - различные T_{LM}^Δ . После этого оператор амплитуды реакции можно разложить

$$\hat{F} = \sum_{\Delta \delta L} f(\Delta \delta L) \sum_M T_{LM}^\Delta \Phi_{LM}^{\delta *} \quad (2.20)$$

Величины $f(\Delta \delta L)$ не меняются при вращениях и могут зависеть только от инвариантных переменных (2.10). Они будут в дальнейшем называться скалярными амплитудами. Матричный элемент амплитуды реакции получается следующим образом

$$M_{\alpha\beta} = \Psi_\beta^+ \hat{F} \Psi_\alpha,$$

причем $\Psi_\beta = \Psi_3 \times \Psi_4 \times \dots \times \Psi_n$ - прямое произведение спиновых функций конечных частиц, а $\Psi_\alpha = \Psi_1 \times \Psi_2$ - то же самое для начальных частиц. Если ищется матричный элемент перехода между состояниями, характеризующими определенными проекциями всех частиц на ось \vec{z} , то $\Psi_\beta = \Psi_{j_3 M_3} \times \Psi_{j_4 M_4} \times \dots \times \Psi_{j_n M_n}$,

$\Psi_\alpha = \Psi_{j_1 M_1} \times \Psi_{j_2 M_2}$ и, используя (2.19), получаем

$$M_{M_1 M_2}^{M_3 M_4 \dots M_n} = \sum_{\Delta \delta L} f(\Delta \delta L) \sum_M \Phi_{LM}^{\delta *} (T_{LM}^\Delta)_{M_1 M_2}^{M_3 M_4 \dots M_n}, \quad (2.21)$$

если T_{LM}^Δ было образовано следующим образом

$$T_{LM}^\Delta = \sum (T_{LM}^\Delta)_{M_1 M_2}^{M_3 M_4 \dots M_n} \Psi_{j_3 M_3} \times \Psi_{j_4 M_4} \times \dots \times \Psi_{j_n M_n} \times \Psi_{j_1 M_1}^+ \times \Psi_{j_2 M_2}^+. \quad (2.22)$$

Конечно, к такому же результату можно прийти, не строя спин-тензорные матрицы T_{LM}^{Δ} , а непосредственно связывая волновые функции участвующих в реакции частиц $\Psi_j(m)$, но учитывая, что они преобразуются по представлению, сопряженно-му тому, по которому преобразуются базисные функции $\Psi_{j,M}$.

Структура инвариантов $\sum_M \Phi_{LM}^{\delta*} T_{LM}^{\Delta}$ определяется исключительно трансформационными свойствами спиновых функций начального и конечного состояний, т.е. числом частиц и их спинами. Отсюда ясно, что вся информация о динамике реакции сосредоточена в скалярных амплитудах $f(\Delta\delta_L)$. Поэтому выделение спиновых переменных и, следовательно, скалярных амплитуд из $M_{\alpha\beta}$ является необходимым предварительным этапом всякого теоретического исследования механизма реакции.

Ниже будет проведено конкретное построение величин Φ_{LM}^{δ} и T_{LM}^{Δ} и показано, как отобрать из них линейно-независимые. Будут также исследованы ограничения, налагаемые на вид этих величин требованиями инвариантности амплитуды реакции относительно инверсии пространства и обращения времени.

Мы ограничимся нерелятивистским случаем. Обобщение на релятивистский случай может быть проведено с использованием в значительной степени тех же идей [5,6], однако требует знакомства с довольно сложным аппаратом представлений группы Лоренца.

2в. Треххвостка

Рассмотрим амплитуду распада $I \rightarrow 2 + 3$. Строим спин-тензоры из $\Psi_{j_2 M_2}$, $\Psi_{j_3 M_3}$ и $\Psi_{j,M}^+$, соединяя сначала спины конечных частиц в суммарный спин j_{23} (т.е. используется представление спина канала), и затем прибавляя к нему



Рис. I $T_{j_{23}}^{jm} = C_{j_2 M_2 j_3 M_3}^{j_{23} M_{23}} C_{j_{23} M_{23}}^{j_1 M_1} Y_m \Psi_{j_2 M_2} \Psi_{j_3 M_3} \Psi_{j_1 M_1}^+$ (2.23)

Раньше мы показали (2.13), что именно так нужно соединять Ψ_{jm} и $\Psi_{j'm'}^+$. Здесь роль индекса Δ выполняет величина j_{23} . Выражение $T_{j_{23}}^{jm}$ по своим трансформационным свойствам эквивалентно Y_{jm}^* . Именно поэтому индексы J, M поставлены наверх (контравариантный вектор). $\Phi_{\Delta m}$ можно строить только из единственного галилеевски-инвариантного вектора, характеризующего процесс \vec{n}_{23} , т.е. это должна быть просто шаровая функция $Y_{\Delta m}(\vec{n}_{23})$. Если обозначить скалярные амплитуды треххвостки буквой Γ , то получим

$$\hat{\Gamma} = \sum_{j_{23} \ell_{23}} \Gamma(j_{23}, \ell_{23}) \sum_{M_{23} m_{23}} C_{j_2 M_2 j_3 M_3}^{j_{23} M_{23}} C_{j_{23} M_{23} \ell_{23} m_{23}}^{j_1 M_1} \times \\ \times Y_{\ell_{23} m_{23}}(\vec{n}_{23}) \Psi_{j_2 M_2} \Psi_{j_3 M_3} \Psi_{j_1 M_1}^+. \quad (2.24)$$

Переходя с помощью (2.21) к матричным элементам, получим

$$M_{M_1}^{M_2 M_3} = \sum_{j_{23} \ell_{23}} \Gamma(j_{23}, \ell_{23}) \sum_{M_{23} m_{23}} C_{j_2 M_2 j_3 M_3}^{j_{23} M_{23}} C_{j_{23} M_{23} \ell_{23} m_{23}}^{j_1 M_1} Y_{\ell_{23} m_{23}}(\vec{n}_{23}) \quad (2.25)$$

Если все три частицы 1, 2, 3 - реальные, т.е. $\underline{P}_i^2 = m_i^2$ ($i=1, 2, 3$), то амплитуды $\Gamma(j_{23}, \ell_{23})$ являются константами. В общем случае они зависят от трех величин \underline{P}_1^2 , \underline{P}_2^2 и \underline{P}_3^2 . Каждый формфактор $\Gamma(j_{23}, \ell_{23})$ отвечает определенным спину канала

j_{23} и орбитальному моменту частиц 2 и 3 ℓ_{23} . При малых импульсах \vec{K} относительного движения частиц 2 и 3 $\Gamma \sim |\vec{K}|^{\ell_{23}}$.

В силу сохранения пространственной четности должно выполняться условие

$$(-1)^{\ell_{23}} = \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3 \equiv \bar{\pi}, \quad (2.26)$$

где $\bar{\pi}_i$ — внутренняя четность частицы i . Таким образом в (2.25) входят только ℓ_{23} одной четности. Если $\bar{\pi} = I$, то все ℓ_{23} четны и, наоборот, если $\bar{\pi} = -I$, все ℓ_{23} нечетны.

В ряде случаев более удобно использовать представление перекрестного канала, в котором сначала связываются спины частиц 1 и 2:

$$M_{\mu_1}^{M_2 M_3} = \sum_{j_{12} \ell_{23}} \bar{\Gamma}(j_{12} \ell_{23}) \sum_{M_{12} m_{23}} C_{j_{12} M_2 j_{12} M_{12}}^{j_{12} M_1} C_{j_{12} M_2 j_{12} M_{12}}^{j_{12} M_{12}} \times \sum_{\ell_{23} m_{23}} Y_{\ell_{23} m_{23}}(\vec{n}_{23}). \quad (2.27)$$

Новые формфакторы $\bar{\Gamma}(j_{12} \ell_{23})$ являются линейными комбинациями $\Gamma(j_{12} \ell_{23})$. Действительно, можно показать (см. Приложение), что

$$C_{j_{12} M_2 j_{12} M_3}^{j_{12} M_{12}} C_{j_{12} M_2 j_{12} M_{12}}^{j_{12} M_1} = \sum_{j_{12}} \alpha_{j_{12} j_{12}} C_{j_{12} M_2 j_{12} M_{12}}^{j_{12} M_1} C_{j_{12} M_2 j_{12} M_{12}}^{j_{12} M_{12}} \quad (2.28)$$

и вычислить коэффициенты $\alpha_{j_{12} j_{12}}$, которые входят также в

соотношение

$$\bar{F}(j_{12} \ell_{23}) = \sum_{j_{23}} \alpha_{j_{12} j_{23}} F(j_{23} \ell_{23})$$

Получается следующая связь

$$\begin{aligned} \bar{F}(j_{12} \ell_{23}) &= \sqrt{2j_{12} + 1} (-i)^{j_1 + j_2 + j_3 + \ell_{23}} \times \\ &\quad \times \sum_{j_{23}} \sqrt{2j_{23} + 1} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 & j_{12} \\ \ell_{23} & j_3 & j_{23} \end{matrix} \right\} F(j_{23} \ell_{23}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Число независимых скалярных амплитуд не зависит, конечно, от того, какое из представлений (2.25) и (2.27) используется. Подсчитаем это число в представлении канала реакции, не учитывая пока сохранения четности. Возможные значения

j_{23} ограничены условием $|j_2 - j_3| \leq j_{23} \leq j_2 + j_3$, а при фиксированном j_{23} имеем $|j_{23} - j_1| \leq \ell_{23} \leq j_{23} + j_1$. Пусть $j_2 < j_3$. Рассмотрим сначала случай $j_3 - j_2 \geq j_1$. Это значит, что разрешены $j_{23} = j_3 - j_2, j_3 - j_2 + 1, \dots, j_3 + j_2$, причем всегда $j_{23} \geq j_1$, т.е. при любом значении j_{23} величина ℓ_{23} пробегает $2j_1 + 1$ значений $j_{23} - j_1$, $j_{23} - j_1 + 1, \dots, j_{23} + j_1$. Таким образом, число различных пар (j_{23}, ℓ_{23}) , а, следовательно, и число независимых форм-факторов, равно $(2j_2 + 1)(2j_1 + 1)$. Аналогично можно рассмотреть случаи $j_2 + j_3 \geq j_1 \geq j_3 - j_2$ и $j_2 + j_3 \leq j_1$. Результат таков

$$N = \begin{cases} (2j_1+1)(2j_2+1), & j_1 \leq j_3 - j_2 \\ (2j_1+1)(j_2+j_3-j_1+1) + (j_2-j_3+j_1)(j_1-j_2+j_3) = \\ = 1 + (j_1+j_2+j_3) - (j_1^2 + j_2^2 + j_3^2) + 2(j_1j_2 + j_1j_3 + j_2j_3), j_2+j_3 \geq j_1 \geq j_3-j_2 \\ (2j_2+1)(2j_3+1), & j_2+j_3 \leq j_1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Всегда $N < (2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1)$, за исключением случая нулевых спинов. Инвариантность относительно вращений уменьшает число характеризующих трехвостку независимых динамических величин по сравнению с размерностью матрицы F (2.24).

Подсчет числа независимых формфакторов при учете сохранения четности показывает, что $N_{\text{п}} = \frac{1}{2} N$ для четных N . Для N - нечетных

$$N_{\text{п}} = \frac{1}{2} [N + \pi(-1)^{j_1+j_2+j_3}] \quad (2.31)$$

Если частицы 2 и 3 тождественны, то амплитуда должна быть симметрична или антисимметрична относительно перестановки этих частиц в зависимости от того, являются ли они бозонами или фермионами. При перестановке $2 \leftrightarrow 3$

$$C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_2}^{j_2 \mu_3 j_3 \mu_3} \rightarrow C_{j_2 \mu_2 j_3 \mu_3}^{j_2 \mu_1 j_1 \mu_1} = (-1)^{2j_2 - j_2 j_3} C_{j_2 \mu_2 j_2 \mu_3}^{j_2 \mu_3 j_2 \mu_2},$$

$$\bar{n}_{23} \rightarrow -\bar{n}_{23}, Y_{e_{23} m_{23}}(\bar{n}_{23}) \rightarrow Y_{e_{23} m_{23}}(-\bar{n}_{23}) = (-1)^{e_{23}} Y_{e_{23} m_{23}}(\bar{n}_{23})$$

Таким образом, появляется условие $(-1)^{2j_2 - j_2 j_3 + e_{23}} = (-1)^{2j_2}$.

т.е. $(-I)^{j_{23}} = (-I)^{\ell_{23}}$. С учетом правила отбора по четности $(-I)^{\ell_{23}} = \overline{I}$ получаем

$$(-I)^{j_{23}} = \overline{I} \quad (2.32)$$

Это соотношение дополнительно ограничивает число возможных значений j_{23} , т.е. уменьшает число скалярных амплитуд.

Рассмотрим два простых примера. Пусть $j_1 = j_2 = I/2$, $j_3 = 0$ и $\overline{I} = -I$. Тогда единственное возможное значение $\ell = I$ и

$$M_{\mu_1}^{M_2} = \Gamma(j_{23} = \frac{1}{2}; \ell_{23} = 1) C_{\frac{1}{2}, \mu_1, M}^{\frac{1}{2}, \mu_2} Y_{1, M}(\vec{n}_{23})$$

Если учесть, что

$$C_{\frac{1}{2}, \mu_1, M}^{\frac{1}{2}, \mu_2} = \sqrt{3} (\delta_M)_{\mu_1, \mu_2} = \sqrt{3} (\delta^M)_{\mu_2, \mu_1}, \quad Y_{1, M}(\vec{n}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_M,$$

получим $\frac{3}{\sqrt{4\pi}} \Gamma(\delta^M \vec{n}_{23})_{\mu_2, \mu_1}$. Это значит, что амплитуду процесса можно записать в виде

$$M = \frac{3 \Gamma}{\sqrt{4\pi}} \Psi_2^+ (\delta^M \vec{n}_{23}) \Psi_1. \quad (2.33)$$

(Напомним связь компонент вектора в каноническом и декартовом базисах

$$n_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (n_x + i n_y), \quad n_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}} (n_x - i n_y), \quad n_0 = n_z, \\ n^M = (-1)^M n_{-M}, \text{ т.е. } n^{\pm 1} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (n_x \mp i n_y), \quad n^0 = n_z. \quad (2.34)$$

$$n^M = (-1)^M n_{-M}, \text{ т.е. } n^{\pm 1} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} (n_x \mp i n_y), \quad n^0 = n_z. \quad (2.34)$$

В качестве второго примера рассмотрим распад бессиневой частицы на две частицы со спином $I/2$ ($j_1 = 0$,

$j_2 = j_3 = I/2$ причем $\sqrt{I} = I$. Тогда $C_{j_{23}} = 0$ и получим

$$M^{j_2 j_3} = \frac{\Gamma(j_{23}=0, C_{j_{23}}=0)}{\sqrt{4\pi}} C_{\frac{1}{2} j_2 \frac{1}{2} j_3}^{00} =$$

$$= \frac{\Gamma}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{\frac{1}{2}-j_2} \frac{i}{\sqrt{2}} \delta_{j_2, -j_2} = - \frac{i}{\sqrt{8\pi}} (\Gamma_4)_{j_3 j_2}.$$

Таким образом

$$M = - \frac{i}{\sqrt{8\pi}} \tilde{\Psi}_3 \tilde{\Psi}_2 \Psi_2. \quad (2.35)$$

2г. Четыреххвостка

Рассмотрим амплитуду бинарной реакции

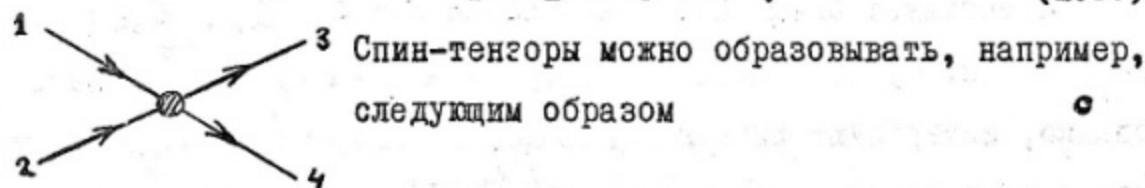


Рис. 2

$$T_{LM}(j_{12}, j_{34}) = C_{j_{1M_1} j_{2M_2}}^{j_{12} \mu_{12}} C_{j_{3M_3} j_{4M_4}}^{j_{34} \mu_{34}} \quad (2.37)$$

$$\times C_{j_{12} \mu_{12} LM}^{j_{34} \mu_{34}} \Psi_{j_1 M_1}^+ \Psi_{j_2 M_2}^+ \Psi_{j_3 M_3}^- \Psi_{j_4 M_4}^-$$

j_{12} и j_{34} — спины входного и выходного каналов:

$$|j_1 - j_2| \leq j_{12} \leq j_1 + j_2, \quad |j_3 - j_4| \leq j_{34} \leq j_3 + j_4, \quad (2.38)$$

$$|j_{12} - j_{34}| \leq L \leq j_{12} + j_{34}.$$

При написании третьего коэффициента Клебша-Гордана в (2.37) учтено, что T_{LM} строится из базисных спиновых функций ко-

нечных частиц и эрмитовски-сопряженных спиновых функций начальных частиц. Роль индекса Δ выполняет совокупность величин j_{12} и j_{34} .

Тензоры $\Phi_{LM}^{e_{12} e_{34}}$ могут теперь строиться из двух галилеевских-инвариантных векторов, в качестве которых выберем \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} — единичные вектора по направлению импульсов начальных и конечных частиц в с.ц.и.

$$\Phi_{LM}^{e_{12} e_{34}} = \sum_{m_{12} m_{34}} C_{e_{12} m_{12} e_{34} m_{34}}^{LM} Y_{e_{12} m_{12}}(\vec{n}_{12}) Y_{e_{34} m_{34}}(\vec{n}_{34}) \quad (2.39)$$

При данном L

$$|e_{12} - e_{34}| \leq L \leq e_{12} + e_{34} \quad (2.40)$$

Существует бесконечное множество пар (e_{12}, e_{34}) , т.к. условие (2.40) не ограничивает сумму $e_{12} + e_{34}$ сверху. Нас, однако, интересуют лишь линейно-независимые тензоры. Поэтому достаточно рассматривать лишь $\Phi_{LM}^{e_{12} e_{34}}$ с $e_{12} + e_{34} = L$ и с $e_{12} + e_{34} = L+1$. Подробно это будет показано в разделе, посвященном амплитуде произвольной многочастичной реакции. Здесь же ограничимся лишь следующими замечаниями. При фиксированном значении $e_{12} + e_{34}$ все тензоры, отвечающие разным парам (e_{12}, e_{34}) , независимы вследствие независимости шаровых функций с разными e и e' . Нет линейной зависимости и среди тензоров с различающимися на I суммами $e_{12} + e_{34}$, т.к. эти тензоры имеют разную четность.

$$\Phi_{LM}^{e_{12} e_{34}}(-\vec{n}_{12}, -\vec{n}_{34}) = (-1)^{e_{12} + e_{34}} \Phi_{LM}^{e_{12} e_{34}}(\vec{n}_{12}, \vec{n}_{34}) \quad (2.41)$$

Т.к. число линейно независимых тензоров $\Phi_{LM}^{e_1 e_3 e_4}$ не может быть больше размерности тензора $2L + 1$, то $\Phi_{LM}^{e_1 e_3 e_4}$. с $e_{12} + e_{34} = L$ ($L+1$ тензор) и с $e_{12} + e_{34} = L+1$ (L тензоров) уже образуют полную систему, и все остальные являются их линейными комбинациями со скалярными множителями типа $\text{const} \cdot (\vec{n}_{12} \vec{n}_{34})^K$.

Сохранение четности дает $(-1)^{e_{12} + e_{34}} = \sqrt{L} \equiv \sqrt{L}_1 \sqrt{L}_2 \sqrt{L}_3 \sqrt{L}_4$.

Таким образом

$$e_{12} + e_{34} = \begin{cases} L, & \text{если } \sqrt{L}(-1)^L = 1 \\ L+1, & \text{если } \sqrt{L}(-1)^L = -1. \end{cases}$$

Вместо e_{12} и e_{34} удобно ввести их полусумму и полуразность

$$\tau = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{34}), \quad \lambda = \frac{1}{2}(e_{34} - e_{12}).$$

Тогда, если $\sqrt{L} = I$

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{2}L, & \text{если } L \text{ четно} \\ \frac{1}{2}(L+1), & \text{если } L \text{ нечетно} \end{cases} \quad (2.4Ia)$$

В случае $\sqrt{L} = -I$

$$\tau = \begin{cases} \frac{1}{2}(L+1) & \text{если } L \text{ четно} \\ \frac{1}{2}L & \text{если } L \text{ нечетно} \end{cases} \quad (2.4Ib)$$

λ пробегает все целые (если τ целое) или полуцелые (если τ полуцелое) значения, при которых тройка $\tau - \lambda$, $\tau + \lambda$, L образует треугольник. Таким образом вместо индекса δ в (2.20) стоит набор λ, τ или λ, L .

В результате получаем следующее представление для амплитуды реакции (2.36):

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{\mu_3 \mu_4} = \sum_{j_1, j_3, L, \lambda} f(j_1, j_3, L, \lambda) \sum_{\substack{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \\ m_{12}, m_{34}, M}} C_{j_1, \mu_1, j_3, \mu_2}^{j_1, \mu_1, j_3, \mu_2} C_{j_3, \mu_3, j_4, \mu_4}^{j_3, \mu_3, j_4, \mu_4} \times \\ \times C_{j_1, \mu_1, j_2, \mu_2, LM}^{j_3, \mu_3, j_4, \mu_4} C_{\tau - \lambda, m_{12}, \tau + \lambda, m_{34}}^{LM} Y_{\tau - \lambda, m_{12}}^*(\vec{n}_{12}) Y_{\tau + \lambda, m_{34}}^*(\vec{n}_{34}) \quad (2.42)$$

$\tau - \lambda$ и $\tau + \lambda$ не имеют смысла полных орбитальных моментов начальных и конечных частиц, т.к. угловая зависимость содержится и в скалярных амплитудах.

Число скалярных амплитуд легко подсчитывается без учета сохранения четности. Спины частиц j_1, j_2, j_3, j_4 соединяются в суммарный спин L , причем для каждого L существует $2L + 1$ разных скалярных амплитуды. Задача формально аналогично подсчету различных спиновых состояний частиц 1, 2, 3, 4, если эти состояния задаются не величинами $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, а величинами j_1, j_2, j_3, j_4, L и M . Ясно, что результатом будет

$$N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)(2j_3 + 1)(2j_4 + 1). \quad (2.43)$$

С учетом сохранения четности [1]

$$N_{\pi} = \begin{cases} \frac{1}{2} N, & \text{если } N \text{ четно} \\ \frac{1}{2} [N + \sqrt{L}(-1)^{j_1 + j_2 + j_3 + j_4}] & \text{если } N \text{ нечетно} \end{cases} \quad (2.45a)$$

В случае, когда либо начальные, либо конечные частицы тождественны, получаются условия, связывающие амплитуды f при

угле рассеяния θ и $(\pi - \theta)$. Например, если тождественны частицы 3 и 4, то

$$f(j_{12} j_{34} L \lambda; \vec{n}_{12} \vec{n}_{34}) = (-1)^{j_{34} + \tau + \lambda} f(j_{12} j_{34} L \lambda; -\vec{n}_{12} \vec{n}_{34}) \quad (2.44)$$

Используя (2.42), можно выразить поляризацию продуктов реакции и другие величины через скалярные формфакторы [1, 5, 7]. Приведем здесь выражение для квадрата амплитуды, просуммированного по спиновым состояниям входящих и выходящих частиц, которое входит в дифференциальное сечение реакции

$$\sum_{M_1 M_2 M_3 M_4} |M_{M_1 M_2 M_3 M_4}|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{j_{12} j_{34} L \lambda \lambda'} (2j_{34}+1) [(2\tau-2\lambda+1)(2\tau-2\lambda'+1)(2\tau+2\lambda+1) \times \\ \times (2\tau+2\lambda'+1)]^{\frac{1}{2}} (-1)^{\lambda-\lambda+L} f(j_{12} j_{34} L \lambda) f^*(j_{12} j_{34} L \lambda') \times \\ \times \sum_{\alpha} C_{\tau-\lambda' 0 \tau-\lambda 0}^{00} C_{\tau+\lambda' 0 \tau+\lambda 0}^{00} \left\{ \begin{matrix} \tau-\lambda' & \tau-\lambda & \alpha \\ \tau+\lambda & \tau+\lambda' & L \end{matrix} \right\} P_{\alpha}(\cos \theta), \quad (2.45)$$

где θ — угол между \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} .

Для четыреххвостки часто более удобным оказывается представление перекрестного канала. Это в особенности относится к упругому рассеянию, когда начальные частицы тождественны конечным, вследствие чего матрицы $T_{LM}^{\delta} \Phi_{LM}^{\Delta*}$ в представлении перекрестного канала можно рассматривать как прямое произведение операторов, действующих на спиновые переменные сталкивающихся частиц

○

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{j_3 j_4} = \sum_{j_{13} j_{24} L \lambda} \bar{f}(j_{13} j_{24} L \lambda) \sum_{\substack{\mu_{13} \mu_{24} \\ m_{12} m_{34} M}} C_{j_{13} \mu_{13} j_{24} \mu_{24}}^{j_3 \mu_3} C_{j_{12} \mu_2 j_{24} \mu_{24}}^{j_4 \mu_4} \times$$

$$\times C_{j_{13} \mu_{13} j_{24} \mu_{24}}^{LM} C_{\substack{\mu_{13} \\ \mu_{24} \\ M}}^{LM} Y_{\substack{\mu_{13} \\ \mu_{24}}}^*(\vec{n}_n) Y_{\substack{\mu_{13} \\ \mu_{24}}}^*(\vec{n}_{34}), \quad (2.46)$$

$$|j_1 - j_3| \leq j_{13} \leq j_1 + j_3, \quad |j_2 - j_4| \leq j_{24} \leq j_2 + j_4,$$

$$|j_{13} - j_{24}| \leq L \leq j_{13} + j_{24}.$$

Скалярные амплитуды $\bar{f}(j_{13} j_{24} L \lambda)$ с помощью соответствующих g_j -коэффициентов выражаются в виде линейной комбинации введенных ранее амплитуд $f(j_{12} j_{34} L \lambda)$:

$$\begin{aligned} \bar{f}(j_{13} j_{24} L \lambda) &= (2j_{13}+1)(2j_{24}+1)[(2j_3+1)(2j_4+1)(2L+1)]^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\sum_{j_{12} j_{34}} (2j_{34}+1) \sqrt{2j_{12}+1} \left\{ \begin{array}{c} j_1 \quad j_3 \quad j_{13} \\ j_{12} \quad j_{34} \quad L \\ j_2 \quad j_4 \quad j_{24} \end{array} \right\} f(j_{12} j_{34} L \lambda). \end{aligned} \quad (2.47)$$

При упругом рассеянии число независимых скалярных амплитуд уменьшается при учете инвариантности относительно обращения времени. Остановимся на этом вопросе подробнее.

2д. T-инвариантность

Обычно условие T-инвариантности связывает амплитуды разных процессов (т.к. обычно прямая и обратная реакции не совпадают) и в этом смысле не интересно. Поэтому мы не вспоминали о нем при изучении треххвостки. Использование T-инвариантности там не позволяло делать, как правило, каких-либо выводов о скалярных амплитудах. (исключение составляет случай, когда ток, ответственный за переход $I \rightarrow 2 + 3$, эрмитов. Тогда T-инвариантность вместе с эрмитовостью матрицы реакции позволяет сделать определенные заключения о фазах скалярных амплитуд).

Упругое рассеяние является для обращения времени особым случаем. Прямая и обратная реакции совпадают, и T-инвариантность накладывает ограничения на амплитуду рассеяния.

При обращении знака времени $t' = -t$ обращается и последовательность процессов. Поэтому начальное и конечное состояния меняются местами. Инвариантность амплитуд относительно обращения времени выражается равенством

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta'\alpha'} \quad (2.48)$$

Штрихами обозначено изменение величин, характеризующих начальные и конечные частицы, при обращении времени. Подчеркнем, что в правой части равенства индексы α и β переставлены местами.

Найдем закон преобразования волновой функции Ψ , исходя из инвариантности уравнения Шредингера

$$H\Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.49)$$

относительно обращения времени, считая, что гамильтониан H не зависит от времени явно, как это имеет место для изолированной системы. Легко видеть, что преобразование, не меняющее знак энергии, требует комплексного сопряжения волновой функции, т.е. в общем случае выглядит так

$$\psi'(\vec{x}, t') = U_t \psi^*(\vec{x}, t) \quad (2.50)$$

Здесь U_t — некоторая унитарная матрица, причем

$$U_t H^* U_t^* = H$$

Обращение времени коммутирует с любым вращением системы отсчета

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \omega)(U_t \psi^*) = U_t (\mathcal{D}(\hat{n}, \omega)\psi)^*, \quad (2.51)$$

т.е.

$$U_t \mathcal{D}^*(\hat{n}, \omega) U_t^* = \mathcal{D}(\hat{n}, \omega) \quad (2.52)$$

Здесь через $\mathcal{D}(\hat{n}, \omega)$ обозначена матрица, преобразующая спиновую функцию при вращении на угол ω вокруг направления \hat{n} . Применяя формулу (2.52) в случае бесконечно-малых поворотов, когда $\mathcal{D} = 1 - i\omega \hat{n} \vec{S}$ (\vec{S} — оператор спина), получим

$$U_t \vec{S}^* U_t^* = - \vec{S} \quad (2.53)$$

Но таким свойством обладает матрица поворота за угол 180° вокруг оси Y . Поэтому с точностью до фазового множителя U_t совпадает с $\mathcal{D}(n_y, \pi)$. Без ограничения общности этот множитель можно положить равным единице. Тогда

$$(U_T)_{\mu, \mu'} = (-1)^{j+\mu} \delta_{\mu, -\mu'} \quad (2.54)$$

Таким образом, при обращении времени

$$\psi_j(\mu) \rightarrow (-1)^{j+\mu} \psi_j^*(-\mu),$$

т.е. проекция спина на ось \vec{z} меняет знак и появляется фазовый множитель $(-1)^{j+\mu}$. Очевидно, что меняет знак и импульс частицы: $\vec{P}' = -\vec{P}$. Отсюда вытекает, что условие (2.48) для бинарной реакции имеет вид

$$\langle \mu_3 \mu_4 | M(\vec{n}_{12}, \vec{n}_{34}) | \mu_1 \mu_2 \rangle = \quad (2.55)$$

$$= \tilde{\xi}_T \langle -\mu_1 - \mu_2 | \tilde{M}(-\vec{n}_{34}, -\vec{n}_{12}) | -\mu_3 - \mu_4 \rangle,$$

где через \tilde{M} обозначена амплитуда обратной реакции, а $\tilde{\xi}_T = (-1)^{\sum_{i=1}^4 (j_i + \mu_i)}$.

Если рассматривается упругое рассеяние, M и \tilde{M} совпадают и наложение требования (2.55) на выражения (2.42) и (2.46) приводит к следующей связи между скалярными амплитудами:

$$f(j j' L \lambda) = (-1)^{j-j'} \sqrt{\frac{2j+1}{2j'+1}} f(j' j L -\lambda), \quad (2.56)$$

$$\bar{f}(j_1 j_2 L \lambda) = (-1)^{L+j_{12}+j_{24}} \bar{f}(j_1 j_2 L -\lambda). \quad (2.57)$$

Соотношения (2.56) и (2.57) связывают между собой скалярные амплитуды с индексами λ и $-\lambda$. Это объясняется тем, что при обращении времени $\vec{n}_{12} \rightarrow -\vec{n}_{34}$, $\vec{n}_{34} \rightarrow -\vec{n}_{12}$, и шаровые функции в (2.46) (или в (2.42)) меняются местами.

Нетрудно построить такое представление для амплитуды, в котором из требования Т-инвариантности сразу же следовало бы просто обращение части формфакторов в нуль. Оно оказывается особенно удобным при исследовании рассеяния тождественных частиц. Введем единичные вектора $\vec{\ell}$ и \vec{m} , направленные по сумме импульсов конечных и начальных частиц $\vec{P}_1 + \vec{P}_3$ в с.д.и. и по их разности:

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{n}_{12} + \vec{n}_{34}}{|\vec{n}_{12} + \vec{n}_{34}|}, \quad \vec{m} = \frac{\vec{n}_{12} - \vec{n}_{34}}{|\vec{n}_{12} - \vec{n}_{34}|} \quad (2.58)$$

При обращении времени

$$\vec{\ell} \rightarrow -\vec{\ell}, \quad \vec{m} \rightarrow \vec{m} \quad (2.59)$$

Будем строить величины Φ_{LM} из шаровых функций от векторов $\vec{\ell}$ и \vec{m} . Считая идентичными частицы I и 3 и частицы 2 и 4, напишем ^{вместо} (2.46),

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'_1 \mu'_2} = \sum_{\bar{j}_1 \bar{j}_2 \bar{\ell} \lambda} \bar{f}(\bar{j}_1 \bar{j}_2 \bar{\ell} \lambda) \sum C_{\bar{j}_1 \mu_1 \bar{j}_1 \bar{\mu}_1}^{j_1 \mu'_1} C_{\bar{j}_2 \mu_2 \bar{j}_2 \bar{\mu}_2}^{j_2 \mu'_2} \quad (2.60)$$

$$* C_{\bar{j}_1 \bar{\mu}_1 \bar{j}_2 \bar{\mu}_2}^{LM} C_{r_{-\lambda m} r_{+\lambda m}}^{LM} Y_{r_{-\lambda m}}^*(\vec{\ell}) Y_{r_{+\lambda m}}^*(\vec{m}).$$

Из (2.55) следует, что

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'_1 \mu'_2} = \sum_T M_{-\mu'_1 - \mu'_2}^{-\mu_1 - \mu_2} (-\vec{z}, \vec{m}) \quad (2.61)$$

Замена $\mu_i \leftrightarrow -\mu'_i$, $\mu_2 \leftrightarrow -\mu'_2$, $\vec{z} \rightarrow -\vec{z}$ приводит к множителю $(-1)^{\bar{\gamma}_1 + \bar{\mu}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\mu}_2 + \tau - \lambda}$, который вместе с \sum_T дает

$$\bar{f}'(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_2, \lambda) = (-1)^{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \tau - \lambda} f'(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_2, \lambda). \quad (2.62)$$

Таким образом, отличными от нуля могут быть лишь те скалярные амплитуды $f'(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_2, \lambda)$, для которых

$$(-1)^{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \tau - \lambda} = 1. \quad (2.63)$$

Число независимых скалярных амплитуд $N_{\pi T}$ с учетом Т-инвариантности и сохранения четности дается формулой

$$N_{\pi T} = \frac{[(2\gamma_1+1)(2\gamma_2+1)+1]^2 - \delta}{4}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \gamma_1 \text{ и } \gamma_2 \text{ целые} \\ 1, & \text{если } \gamma_1 \text{ или } \gamma_2 \text{ полуцелые} \end{cases} \quad (2.64)$$

либо, что то же самое

$$N_{\pi T} = \frac{1}{2} N_{\pi} + \frac{1}{2} (2\gamma_1+1)(2\gamma_2+1)$$

Пользуясь выражением (2.60), легко найти дополнительные ограничения, появляющиеся при упругом рассеянии тождественных частиц. Амплитуда должна обладать одинаковой симметрией относительно перестановки частиц во входном и выходном каналах. Рассмотрим одновременную перестановку частиц в обоих

каналах. При этом $\vec{e} \rightarrow -\vec{e}, \vec{m} \rightarrow -\vec{m}$. Учитывая то, что амплитуда не меняется при одновременном изменении знаков у \vec{e} и \vec{m} (т.к. при упругом рассеянии $(-I)^{\mu_1 \mu_2} = I$), получим

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{\mu'_1 \mu'_2} (\vec{e}, \vec{m}) = M_{\mu_2 \mu_1}^{\mu'_2 \mu'_1} (\vec{e}, \vec{m}). \quad (2.65)$$

откуда

$$\bar{f}'(\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 L \lambda) = \bar{f}'(\bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_1 L \lambda), \quad (2.66)$$

т.е. скалярные амплитуды должны быть симметричны относительно перестановки индексов $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$. Условие (2.65) приводит к дальнейшему уменьшению числа независимых скалярных амплитуд, т.к. число независимых амплитуд с $\bar{\gamma}_1 \neq \bar{\gamma}_2$ становится вдвое меньше. Подсчитаем число амплитуд при учете тождественности (назовем его $N_{\pi T}^{(c)}$), исходя из известной формулы (2.64) для $N_{\pi T}$.

Сначала вычислим число скалярных амплитуд с $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma}$ пробегает все значения в интервале $0 \leq \bar{\gamma} \leq 2j$ (j - спин рассеивающихся частиц). При фиксированном $\bar{\gamma}$ величина L принимает ($\bar{\gamma} + 1$) четное значение $0, 2, \dots, 2\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}$ нечетных значений $1, 3, \dots, 2\bar{\gamma} + 1$. Заметим, что $\bar{\gamma}$ обязательно целое, поэтому $2\bar{\gamma}$ - четное число, и соотношение (2.63) дает $(-I)^{\bar{\gamma}-L} = I$. Поэтому при четном L имеется $(\frac{L}{2} + 1)$ скалярных амплитуд, при нечетном L $\frac{L-1}{2}$ амплитуд. Отсюда следует, что при заданном $\bar{\gamma}$ число различных амплитуд $f'(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}, L \lambda)$ есть

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2\bar{\gamma}} L + (L+1) - \frac{1}{2} \bar{\gamma} = \bar{\gamma}^2 + \bar{\gamma} + 1$$

Полное число амплитуд с $\bar{J}_1 = \bar{J}_2$ получается суммированием по всем возможным значениям J и дается выражением.

$$N' = \sum_{j=0}^{2j} (j^2 + j + 1) = \frac{1}{3} (2j+1)(4j^2 + 4j + 1). \quad (2.67)$$

Отсюда

$$N_{\pi\tau}^{(2)} = \frac{N_{\pi\tau} - N'}{2} + N' = \frac{1}{2} N_{\pi\tau} + \frac{1}{6} (2j+1)(4j^2 + 4j + 3). \quad (2.68)$$

Формулы (2.43), (2.43а), (2.64) и (2.68) позволяют подсчитать число независимых скалярных амплитуд в случае произвольной четырехвостки. Это число быстро увеличивается с ростом спинов участвующих в реакции частиц.

2e. Примеры четырехвостки

Для реакций, в которых участвуют частицы с небольшими спинами ($0, 1/2, 1$), амплитуду записывают обычно в виде разложения по инвариантам, составленным из спиновых матриц и векторов типа $\vec{\kappa}_{12}$ и $\vec{\kappa}_{34}$. Коэффициенты такого разложения, естественно, простым образом связаны с формфакторами $f(j_1 j_2 j_3 j_4)$ [2]. Проиллюстрируем это двумя простыми примерами.

Сначала рассмотрим упругое рассеяние частицы со спином $1/2$ на бесспиновой частице. Пусть $j_1 = j_3 = 1/2, j_2 = j_4 = 0$. Используем представление спина какала (2.42), вводя обозначения

$$f_1 = f(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00), \quad f_2 = f(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 10). \quad (2.69)$$

Формула (2.42) принимает вид

$$M_{\mu_1}^{\mu_3} = f_1 \frac{1}{4\pi} \delta_{\mu_1 \mu_3} + f_2 C_{\frac{1}{2} \mu_1 M}^{\frac{1}{2} \mu_3} C_{i m_{12} i m_{34}}^{i M} Y_{i m_{12}}^* (\vec{n}_{12}) Y_{i m_{34}}^* (\vec{n}_{34}), \quad (2.70)$$

Учтем, что

$$C_{i m_{12} i m_{34}}^{i M} Y_{i m_{12}}^* (\vec{n}_{12}) Y_{i m_{34}}^* (\vec{n}_{34}) = -i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta Y_{i M}^* (\vec{n}), \quad (2.71)$$

где

$$\vec{n} = \frac{[\vec{n}_{12} \vec{n}_{34}]}{[(\vec{n}_{12} \vec{n}_{34})]} \quad (2.72)$$

- нормаль к плоскости реакции, а также то, что $Y_{i M}^* (\vec{n}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n^i$
 $C_{\frac{1}{2} \mu_1 i M}^{\frac{1}{2} \mu_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta_{\mu_1 \mu_3})_{\mu_3 \mu_1}$. Поэтому из (2.70) следует

$$F = \frac{1}{4\pi} [f_1 - i \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta f_2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{n})], \quad (2.73)$$

θ - угол между \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} , т.е. угол рассеяния в с.п.и.

В качестве второго примера рассмотрим рассеяние частицы со спином $I/2$ на частице со спином $I/2$. Пользуясь инвариантностью относительно вращений и сохранением четности, можно записать амплитуду в форме

$$\begin{aligned} \hat{F} = & \alpha + \beta (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + \gamma (\vec{n} [\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2]) + \delta \vec{n} (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) + \epsilon \vec{n} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + \\ & g \{ (\vec{e} \vec{\sigma}_1) (\vec{m} \vec{\sigma}_2) + (\vec{m} \vec{\sigma}_1) (\vec{e} \vec{\sigma}_2) \} + f (\vec{e} \vec{\sigma}_1) (\vec{e} \vec{\sigma}_2) + h (\vec{m} \vec{\sigma}_1) (\vec{m} \vec{\sigma}_2), \end{aligned} \quad (2.74)$$

Здесь \vec{e} и \vec{m} даются соотношением (2.58), \vec{n} - их векторное произведение, совпадающее с (2.72). При обращении времени

$$\vec{\sigma}_1 \rightarrow -\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2 \rightarrow -\vec{\sigma}_2, \vec{n} \rightarrow -\vec{n}, \vec{e} \rightarrow -\vec{e}, \vec{m} \rightarrow -\vec{m}.$$

Поэтому требование Т-инвариантности приводит к условию $C = 0$,

$g = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \alpha + b(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + d \vec{n} (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) + e \vec{n} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + \\ & + f (\vec{e} \vec{\sigma}_1) (\vec{e} \vec{\sigma}_2) + h (\vec{m} \vec{\sigma}_1) (\vec{m} \vec{\sigma}_2). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Если рассеиваются тождественные частицы, то при их перестановке в обеих каналах

$$\vec{\sigma}_1 \leftrightarrow \vec{\sigma}_2, \vec{n} \rightarrow \vec{n}, \vec{e} \rightarrow -\vec{e}, \vec{m} \rightarrow -\vec{m}.$$

Отсюда следует, что $d = 0$.

Покажем, как выражение (2.74), (2.75) и требование $d = 0$ получаются из общих соотношений (2.60), (2.62) и (2.66). Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 0, \bar{\gamma}_2 = 0, L = 0, \tau = 0, \lambda = 0), \\ f_2 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 1, \bar{\gamma}_2 = 0, L = 1, \tau = 1, \lambda = 0), \\ f_3 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 0, \bar{\gamma}_2 = 1, L = 1, \tau = 1, \lambda = 0), \\ f_4 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 1, \bar{\gamma}_2 = 1, L = 0, \tau = 0, \lambda = 0), \\ f_5 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 1, \bar{\gamma}_2 = 1, L = 1, \tau = 1, \lambda = 0), \\ f_6 &= \bar{f}^1(\bar{\gamma}_1 = 1, \bar{\gamma}_2 = 1, L = 2, \tau = 1, \lambda = -1), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$f_7 = \bar{f}'(\bar{\gamma}_1=1, \bar{\gamma}_2=1, L=2, \tau=1, \lambda=0),$$

$$f_8 = \bar{f}'(\bar{\gamma}_1=1, \bar{\gamma}_2=1, L=2, \tau=1, \lambda=1).$$

Члены с f_1 , f_2 и f_3 полностью аналогичны разобранному в предыдущем примере и дают вклад в амплитуду (с учетом ортогональности \vec{e} и \vec{m})

$$\hat{F} = \frac{1}{4\pi} \left\{ f_1 - i\sqrt{\frac{3}{2}} f_2 (\vec{e}, \vec{m}) - i\sqrt{\frac{3}{2}} f_3 (\vec{e}, \vec{m}) \right\}.$$

Член с f_4 имеет вид

$$\begin{aligned} & f_4 \sum C_{\frac{1}{2}M_1, \bar{M}_1}^{\frac{1}{2}M'_1} C_{\frac{1}{2}M_2, \bar{M}_2}^{\frac{1}{2}M'_2} C_{1, \bar{M}_1, \bar{M}_2}^{00} \frac{1}{4\pi} = \\ &= \frac{f_4}{4\pi} \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_{\bar{M}_1})_{M'_1 M_1} (\bar{\sigma}_{\bar{M}_2})_{M'_2 M_2} \delta_{\bar{M}_1, -\bar{M}_2} \frac{1}{\sqrt{3}} (-1)^{1-\bar{M}_2} = \\ &= - \frac{f_4}{3\sqrt{3}4\pi} (\vec{\sigma}_{M'_1 M_1}, \vec{\sigma}_{M'_2 M_2}), \end{aligned}$$

т.е. вклад в амплитуду $\hat{F} = - \frac{f_4}{3\sqrt{3}4\pi} (\vec{e}, \vec{m})$. Член с f_5

$$\begin{aligned} & f_5 \sum C_{\frac{1}{2}M_1, \bar{M}_1}^{\frac{1}{2}M'_1} C_{\frac{1}{2}M_2, \bar{M}_2}^{\frac{1}{2}M'_2} C_{1, \bar{M}_1, \bar{M}_2}^{IM} \cdot \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{3}{4\pi} n^M = \\ &= \frac{-i f_5}{4\pi \sqrt{2}} \sum (\bar{\sigma}_{\bar{M}_1})_{M'_1 M_1} (\bar{\sigma}_{\bar{M}_2})_{M'_2 M_2} n^M C_{1, \bar{M}_1, \bar{M}_2}^{IM} \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением

$$[\vec{a} \vec{b}]_M = -i\sqrt{2} C_{imjn}^{(M)} a_m b_n, \quad (2.77)$$

получим

$$\frac{f_5}{8\pi} (\vec{n} [\vec{\sigma}_{m_1 m_1} \vec{\sigma}_{m_2 m_2}]), \text{ m.e. } F = \frac{f_5}{8\pi} (\vec{n} [\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2]).$$

Аналогичным образом получаем вклад членов с f_6, f_7, f_8

$$\hat{F} = f_6 \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{6}} \{ (\vec{\sigma}_1 \vec{e}) (\vec{\sigma}_2 \vec{e}) - \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \}$$

$$+ f_8 \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{6}} \{ (\vec{\sigma}_1 \vec{m}) (\vec{\sigma}_2 \vec{m}) - \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \}$$

$$+ f_7 \frac{1}{8\pi} \{ (\vec{\sigma}_1 \vec{e}) (\vec{\sigma}_2 \vec{m}) + (\vec{\sigma}_1 \vec{m}) (\vec{\sigma}_2 \vec{e}) \}.$$

Собирая все вместе, получаем действительно формулу (2.74), причем

$$a = \frac{1}{4\pi} f_1, \quad b = -\frac{1}{12\sqrt{3}\pi} f_4 - \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{5}{6}} (f_6 + f_8),$$

$$c = \frac{f_5}{8\pi}, \quad d = -\frac{i}{8\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} (f_2 - f_3), \quad e = -\frac{i}{8\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} (f_2 + f_3), \quad (2.78)$$

$$f = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{6}} f_6, \quad h = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{5}{6}} f_8, \quad g = \frac{1}{8\pi} f_7.$$

Учет Т-инвариантности (2.62) дает $f_5 = 0$, $f_4 = 0$, т.е., как и нужно, $C = 0$, $\gamma = 0$. При рассеянии тождественных частиц условие (2.66) приводит к равенству $f_2 = f_3$, откуда следует, что $d = 0$. Таким образом поставленная задача полностью выполнена.

2 з. Амплитуда произвольной многохвостки

Перейдем к амплитуде произвольной многочастичной реакции (2.1) [3]. Полную систему спин-тензорных операторов можно построить из базисных спиновых функций частиц $\Psi_{j_1 m_1}^+$, $\Psi_{j_2 m_2}^+$, $\Psi_{j_3 m_3}$, $\Psi_{j_4 m_4}$, ..., $\Psi_{j_n m_n}$, соединяя их по какой-либо схеме связи с помощью коэффициентов Клебша-Гордана. Выбор схемы связи несущественен, т.к. спин-тензоры, построенные по двум различным схемам связи, линейным образом выражаются друг через друга. В целях более компактной записи связем сначала спины конечных частиц по некоторой схеме, которую обозначим $(j_3 j_4 \dots j_n)^A$, в суммарный спин j при помощи обобщенного коэффициента Клебша-Гордана [8]

$$\langle (j_3 j_4 \dots j_n)^A \rho j M | j_{3m_3} j_{4m_4} \dots j_{nm_n} \rangle \quad (\text{т.е. просто последовательно связывал спины с помощью обычных коэффициентов Клебша-Гордана}).$$

Здесь через ρ обозначена совокупность всех промежуточных суммарных спинов $j_{34}, \dots, j_{34 \dots (n-1)}$. Спин-тензорные операторы запишем в виде

$$T_{lm}(j_m \rho j) = \langle (j_3 j_4 \dots j_n)^A \rho j M | j_{3m_3} j_{4m_4} \dots j_{nm_n} \rangle \times \quad (2.79)$$

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_1 m_1 l M}^{j M} \Psi_{j_3 m_3} \Psi_{j_4 m_4} \dots \Psi_{j_n m_n} \Psi_{j_1 m_1}^+ \Psi_{j_2 m_2}^+$$

Роль индекса Δ (см. (2.20)) выполняет набор j_{12}, j_3, ρ . $T_{LM}(j_{12}, \rho j)$ преобразуются по неприводимому представлению группы вращений веса $(2L + 1)$. Пользуясь условием ортонормируемости обобщенных коэффициентов Клебса-Гордана

$$\sum_{M_3 M_4 \dots M_n} \langle (j_3 j_4 \dots j_n)^A \rho j | j_3 M_3 j_4 M_4 \dots j_n M_n \rangle \times \\ \times \langle (j_3 j_4 \dots j_n)^{A'} \rho' j' | j_3 M_3 j_4 M_4 \dots j_n M_n \rangle = \\ = \delta(\rho, \rho') \delta(j, j') \delta(M, M'), \quad (2.80)$$

легко видеть, что при выбранной нормировке

$$S_p(T_{LM}^*(j_{12}, \rho j) T_{L'M'}(j_n', \rho' j')) = \\ = \frac{2j+1}{2L+1} \delta(j_{12}, j_n') \delta(\rho, \rho') \delta(j, j') \delta(L, L') \delta(M, M'). \quad (2.81)$$

При построении величин Φ_{LM}^δ мы будем действовать в основном так же, как в разделе 2г, с той только разницей, что теперь при заданном L пригодны комбинации как с $\ell_{12} + \ell_{34} = L$, так и с $\ell_{12} + \ell_{34} = L + 1$ независимо от произведения внутренних четностей всех частиц

$\vec{n} = \vec{n}_1 \vec{n}_2 \vec{n}_3 \dots \vec{n}_n$. Дело в том, что если $n > 5$, то имеется не менее трех независимых векторов, характеризующих реакцию, например \vec{n}_{12} , \vec{n}_{34} , \vec{n}_{45} , из которых можно образовать псевдоскаляр $(\vec{n}_{12} [\vec{n}_{34} \vec{n}_{45}])$. Если комбинация Φ_{LM}^δ имеет неправильное поведение при инверсии пространства, ее легко "исправить", просто умножая на такой псевдоскаляр. Отсюда видно, что пространственная четность не при-

водит к уменьшению числа скалярных амплитуд.

Любой вектор в трехмерном пространстве можно разложить по трем заданным (некомпланарным) векторам, например, по \vec{n} , \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} (2.72) (\vec{n} - псевдовектор, и коэффициент при нем является псевдоскаляром, что учитывается ниже введением множителя β). Таким образом, все независимые Φ_{LM}^{δ} можно построить, пользуясь только этими тремя векторами.

Известно, что представление группы вращений веса $2L+I$ реализуется полностью симметричными тензорами L -ного ранга со всеми равными нулю шпурами. Обозначим такой тензор ранга L , элементы которого образуются из компонент векторов \vec{n} , \vec{m} , ..., \vec{e} , значком $\{nm\dots e\}$. Например

$$\begin{aligned}\{nm\}_{ik} &= n_i m_k + n_k m_i - \frac{2}{3}(\vec{n} \cdot \vec{m}) \delta_{ik}, \\ \{nmp\}_{i\kappa e} &= n_i m_k p_e + n_k m_i p_e + n_k m_e p_i + \\ &+ n_i m_e p_k + n_e m_i p_k + n_e m_k p_i - \\ &- \frac{2}{5}(\vec{n} \cdot \vec{m})(\delta_{ik} p_e + \delta_{ke} p_i + \delta_{ie} p_k) \\ &- \frac{2}{5}(\vec{n} \cdot \vec{p})(\delta_{ik} m_e + \delta_{ke} m_i + \delta_{ie} m_k) \\ &- \frac{2}{5}(\vec{m} \cdot \vec{p})(\delta_{ik} n_e + \delta_{ke} n_i + \delta_{ie} n_k).\end{aligned}\quad (2.82)$$

Если компоненты какого-либо вектора, например \vec{n} , входят K раз, будем отмечать это как $[n]^K$, например, $\{nnnm\} = [n]^3 m$ и т.д. Из векторов \vec{n}_{12} , \vec{n}_{34} и \vec{n} можно построить $(L+I)$ тензор вида

$$\{[n_{12}]^L\}, \{[n_{12}]^{L-1}n_{34}\}, \{[n_{12}]^{L-2}[n_{34}]^2\}, \dots \{[n_{34}]^L\}, \quad (2.83)$$

и L тензоров вида

$$\{[n_{12}]^{L-1}n\}, \{[n_{12}]^{L-2}n_{34}n\}, \{[n_{12}]^{L-3}[n_{34}]^2n\}, \dots \{[n_{34}]^{L-1}n\}. \quad (2.84)$$

В силу соотношения

$$\sin^2 \theta \cdot n_k n_e = \sin^2 \theta \delta_{ke} + [(\vec{n}_{12} \vec{n}_{34}) - 1] (n_{12}^k n_{34}^e + n_{12}^e n_{34}^k), \quad (2.85)$$

где θ - угол между \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} , тензоры, в которые \vec{n} входит более одного раза, выражаются в виде линейной комбинации тензоров (2.83) и (2.84). Таким образом, при данном L имеется $(2L+1)$ независимых тензоров (2.83), (2.84). Их линейными комбинациями являются величины $\hat{\Phi}_{LM}^{e_1 e_2}$ (2.39), причем $e_1 + e_2 = L$ (что отвечает (2.83)) и $e_1 + e_2 = L+1$ (что отвечает (2.84)).

Окончательно матричный элемент реакции (2.1) записывается в виде

$$M_{\mu_1 \mu_2}^{m_3 m_4 \dots m_n} = \sum_{j_{12} j_{34} \rho L, e_1 + e_2 = L, L+1} f(j_{12} j_{34} \rho L e_1 e_2) \beta(e_1 + e_2) \\ \times \sum_{\mu_{j_{12}} \mu_{j_{34}} m_{e_1} m_{e_2}} \langle (j_3 j_4 \dots j_n)^{\rho} j_M | j_{12} m_{e_1} m_{e_2} \dots j_{34} m_{e_2} \rangle C_{j_{12} \mu_{j_{12}}, j_{34} \mu_{j_{34}}}^{j_{12} m_{e_1}} \\ \times C_{j_{12} \mu_{j_{12}}, \mu_M}^{j_M} C_{e_1 m_1, e_2 m_2}^{L M} Y_{e_1 m_1}^*(\vec{n}_{12}) Y_{e_2 m_2}^*(\vec{n}_{34}). \quad (2.86)$$

Множитель $\beta(\ell_1 + \ell_2)$ введем для того, чтобы формфакторы $f(j_{12}j_{34}P_L \ell_1, \ell_2)$ являлись скалярными величинами. Если $\sqrt{L} = I$, то $\beta(\ell_1 + \ell_2) = 1$, если $\ell_1 + \ell_2$ - четное число. При нечетной сумме $\ell_1 + \ell_2$ величина $\beta(\ell_1 + \ell_2)$ равна какому-либо псевдоскаляру, образованному из векторов $\vec{n}_{12}, \vec{n}_{34}$... $\vec{n}_{n-1,n}$, например $(\vec{n}_{12} [\vec{n}_{34} \vec{n}_{45}])$. Если же $\sqrt{L} = -I$, то, наоборот, при четной сумме $\ell_1 + \ell_2$ величина $\beta(\ell_1 + \ell_2)$ равна этому псевдоскаляру и $\beta(\ell_1 + \ell_2) = 1$ при нечетной сумме $\ell_1 + \ell_2$.

Число скалярных амплитуд $f(j_{12}j_{34}P_L \ell_1, \ell_2)$ равно $(2j_1+1)(2j_2+1)\dots(2j_n+1)$. В случае бинарной реакции, как мы видели выше, сохранение четности уменьшает это число примерно вдвое. Причина состоит в том, что из двух векторов \vec{n}_{12} и \vec{n}_{34} , характеризующих процесс (2.36), нельзя построить псевдоскаляра, и в соответствующих случаях $\beta(\ell_1 + \ell_2) = 0$, т.е. остается либо комбинации с тензорами (2.83), либо, наоборот, комбинации с тензорами (2.84).

Хотя в рассуждениях, приведших к формуле (2.86), за основные вектора брались n_{12} и n_{34} , вместо них можно было бы использовать любые два галилеевски-инвариантных вектора, составленные из скоростей частиц, участвующих в реакции (2.1).

Приведенный здесь способ разложения амплитуды реакции по скалярным амплитудам, конечно, не является единственным. Можно было бы, например, разбить частицы на такие группы, чтобы в каждой было четное число частиц с полуцелыми спинами и связывать только спины частиц внутри каждой группы, замыкая их потом на комбинации типа Φ_{lm} , причем эти последние для каждой группы могут строиться из разных векторов \vec{n}_{ik} . Однако каким бы способом мы не выделяли скалярные амплитуды,

они будут линейными комбинациями амплитуд $f(j_1, j_2; e_1, e_2)$, введенных выше.

3. Поляризационная матрица плотности

3-а. Основные свойства

Состояния системы со спином j описываются поляризационной матрицей плотности $\rho_{\mu\mu'} (-j \leq \mu, \mu' \leq j)$, с помощью которой можно найти среднее значение любого оператора A :

$$\langle A \rangle = Sp(A\rho) .$$

При вращениях $\rho_{\mu\mu'}$ преобразуется как

$$\psi_j(\mu) \psi_j^*(\mu') .$$

Напомним основные свойства матрицы плотности:

$$Sp \rho = 1 \quad (3.1)$$

$$\rho^+ = \rho, \text{ т.е. } \rho_{\mu\mu'}^* = \rho_{\mu'\mu} \quad (3.2)$$

$$x^+ \rho x \geq 0 \text{ для любого } j \text{ вектора } x \quad (3.3)$$

т.е. форма $\sum_{n,m} \rho_{nm} x_n^* x_m$ должна быть неотрицательной при произвольных комплексных числах x_n [4]. Последнее соотношение носит название положительности (точнее неотрицательности) матрицы плотности. Оно накладывает на величину $\rho_{\mu\mu'}$ известные из теории квадратичных форм условия [9]. Подробное рассмотрение этого вопроса проведено в работах [10, II]. Мы остановимся лишь на простейших следствиях формул (3.1)-(3.3).

Из (3.3) и (3.1) вытекает, что

$$1 \geq \rho_{\mu\mu} \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\rho_{mm} \rho_{nn} \geq |\rho_{mn}|^2 \quad (3.5)$$

Как известно, для случая $j = \frac{1}{2}$ матрица плотности выражается через поляризацию \vec{P} в виде

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{P}\vec{\sigma}) \quad (3.6)$$

Из (3.2) следует действительность вектора \vec{P} , а из (3.3) условие $|\vec{P}| \leq 1$.

Приведем еще одно простое следствие из (3.1) и (3.3):

$$\frac{1}{2j+1} \leq S_P \rho^2 \leq 1 \quad (3.7)$$

Для доказательства нужно диагонализовать матрицу ρ . Так как все собственные значения положительны, то $S_P \rho^2$ максимальен, если одно собственное значение равно 1, а остальные нули (т.е. для чистого поляризационного состояния). Тогда $S_P \rho^2 = 1$. Минимум $S_P \rho^2$ достигается, когда все собственные значения равны $\frac{1}{2j+1}$. Это полностью неполяризованное состояние.

Для него $S_P \rho^2 = \frac{1}{2j+1}$.

3 б. Поляризационные моменты

Матрица плотности частицы со спином j может быть разложена по поляризационным моментам $T^{(u)m}[I2]$:

$$\rho_{mm} = \sum_{l=0}^{2j} C_{jm'mm}^{jlm} \frac{2l+1}{2j+1} T^{(u)m} \quad (3.8)$$

$$T^{(u)m} = \rho_{mm} C_{jm'mm}^{jlm} \quad (3.9)$$

Величины $T^{(u)m}$ преобразуются при вращениях как Y_{um}^* , причем

$$T^{(u)} = 1, \quad \vec{T}^{(u)} = \sqrt{\frac{j}{j+1}} \vec{P}, \quad (3.10)$$

\vec{P} - поляризация частицы, определяемая как $\frac{1}{j} \langle \vec{j} \rangle$, где $\langle \vec{j} \rangle$ - среднее значение вектора спина.

Поляризационный момент $T^{(2)}$ пропорционален среднему тензору квадрупольного момента. В декартовых компонентах он имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{3\bar{j}_\alpha\bar{j}_\beta - \bar{j}(j+1)\delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{j(j+1)(2j-1)(2j+1)}}.$$

Задание всех моментов $T^{(L)M}$, очевидно, эквивалентно заданию матрицы плотности. Условия (3.1)-(3.3) приводят к определенным соотношениям между поляризационными моментами [10]. Из (3.2) вытекает, что

$$T^{(L)M} = (-1)^M (T^{(L-M)})^* \quad (3.11)$$

Неравенствам (3.7) соответствует

$$1 \leq \sum_{l=0}^{2j} \sum_{M=-l}^l (2L+1) |T^{(L)M}|^2 \leq 2j+1. \quad (3.12)$$

Приведем еще в качестве иллюстрации неравенство для вектора поляризации в случае, когда все высшие поляризационные моменты равны нулю. Условие (3.4) запишется тогда в виде

$$1 \geq 1 + 3 C_{j, \mu, 10}^{jm} \sqrt{\frac{j}{j+1}} P^2 \geq 0 \quad (3.13)$$

Учитывая, что $C_{j, \mu, 10}^{jm} = \frac{M}{\sqrt{j(j+1)}}$, т.е. пробегает значения от $-\sqrt{\frac{j}{j+1}}$ до $\sqrt{\frac{j}{j+1}}$, получим

$$|\vec{P}| \leq \frac{1}{3} (1 + \frac{1}{j}), \quad (3.14)$$

$$\text{т.е. } |\langle \vec{j} \rangle| \leq \frac{1}{3} j(1 + \frac{1}{j}). \quad (3.15)$$

Исходя из неравенства (3.7), нетрудно доказать, что в общем случае

$$|\vec{\rho}| \leq 1 \quad (3.16)$$

(см., например, [13], стр. 269).

3в. Выражения для поляризационных явлений

Спиновая матрица плотности системы нескольких частиц является прямым произведением матриц плотности отдельных частиц. Так, для реакции (2.1)

$$\begin{aligned} \rho^i &= \rho^1 \times \rho^2 \\ \rho^f &= \rho^3 \times \rho^4 \times \dots \times \rho^n \end{aligned} \quad (3.17)$$

В случае полностью неполяризованных начальных частиц

$$\rho_0^i = \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (3.18)$$

Матрица плотности системы в конечном состоянии определяется через амплитуду рассеяния как

$$\rho^f = M \rho^i M^+ / S_p(M \rho^i M^+). \quad (3.19)$$

Знаменатель здесь появляется для того, чтобы обеспечить условие (3.1) ^{**})

^{**}) Отметим, что зачастую в литературе принимают нормировку $S_p \rho^f$ не на единицу, а на величину дифференциального сечения, т.е. полагают $S_p \rho^f = \frac{d\sigma}{d\Omega}$. Мы придерживаемся нормировки (3.1).

Для полностью неполяризованного начального состояния

$$Sp(M\rho^i M^+) = \overline{|M|^2} = \frac{1}{(2j_1+1)(2j_2+1)} \sum_{m_1, m_2} |M_{m_1, m_2}^{m_3 m_4 \dots m_n}|^2$$

(3.20)

Величина $\overline{|M|^2}$ входит в выражение для дифференциального сечения реакции с неполяризованными начальными частицами, если не измеряется поляризация продуктов реакции. Соответствующие формулы имеют вид (2.3) и (2.5), но только с заменой $|M_{\alpha\beta}|^2 \rightarrow \overline{|M|^2}$. Соотношение (3.19) принимает форму

$$\rho_*^f = \frac{1}{\overline{|M|^2}} M \rho^i M^+ \quad (3.21)$$

В дальнейшем нас будут интересовать реакции с двумя или тремя частицами в конечном состоянии. Изменим систему индексов. Будем записывать бинарную реакцию в виде



а трехчастичную в виде



где A и B обозначают начальное и конечное ядра, X - налетающую частицу, Y и Z - вылетающие (обычно у нас x, y, z будут быстрыми частицами).

Рассмотрим последовательно различные поляризационные явления.

I. Поляризацию и квадрупольюизацию какой-либо из конечных частиц, например частицы B, в реакции на неполяризованной мишени можно определить из матрицы плотности ρ^3 , которая

с учетом (3.18) и (3.21) есть

$$\rho_{\mu_8 \mu_8^1}^8 = [\overline{|M|^2} (2j_A+1)(2j_x+1)]^{-1} \sum_{\substack{\mu_A \mu_x \\ \mu_8 \mu_8^1}} M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_8^1} M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_8^1} \left(M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_8^1} \right)^* \quad (3.24)$$

Поляризационные моменты находятся из соотношения (3.9)

$$T_A^{(L)M} = [\overline{|M|^2} (2j_A+1)(2j_K+1)]^{-1} \sum_{\substack{\mu_A \mu_K \mu_x \\ \mu_8 \mu_8^1}} C_{j_A \mu_A^1 LM}^{j_A \mu_A} M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_8^1} \times \left(M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_8^1} \right)^* \quad (3.25)$$

Аналогичные соотношения, конечно, имеют место и для поляризационных моментов частиц γ и \bar{e} .

Формулы (3.24) и (3.25) написаны для реакции (3.23). Для бинарной реакции (3.22) они выглядят точно так же, только следует везде опустить индекс $\mu_{\bar{e}}$.

2. Угловое распределение частиц γ в реакции (3.22) на поляризованной мишени A. Начальная матрица плотности имеет вид

$$\rho^i = \frac{1}{2j_x+1} \delta_{\mu_x \mu_x^1} \times \sum_{l=0}^{2j_A} C_{j_A \mu_A^1 LM}^{j_A \mu_A} \frac{2l+1}{2j_A+1} T_A^{(L)M} \quad (3.26)$$

$T_A^{(L)M}$ - поляризационные моменты ядра A. Угловое распределение $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A$ частиц γ определяется формулой вида (2.5), в которую вместо $|M_{\alpha\beta}|^2$ нужно подставить $M \rho^i M^*$. С другой стороны, как уже говорилось, в случае неполяризованной мишени

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{m_A m_B}{4\pi c^2} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{|M|^2}. \quad (3.27)$$

Поэтому

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A \Bigg/ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{M \rho^i M^+}{|M|^2}. \quad (3.28)$$

Если ρ^i дается выражением (3.26), то

$$M \rho^i M^+ = \frac{1}{(2j_x+1)(2j_A+1)} \sum_{\substack{M_A M_A' \\ M_B M_X M_Y}} M_{M_A M_X}^{M_B M_Y} (M_{M_A' M_X}^{M_B M_Y})^* \sum_{l=0}^{2j_A} C_{j_A M_A' LM}^{j_A M_A} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & \times (2L+1) T_A^{(L)M} = \overline{|M|^2} + \frac{1}{(2j_x+1)(2j_A+1)} \sum_{\substack{M_A M_A' \\ M_B M_X M_Y}} M_{M_A M_X}^{M_B M_Y} (M_{M_A' M_X}^{M_B M_Y})^* \times \\ & \times \sum_{l=1}^{2j_A} C_{j_A M_A' LM}^{j_A M_A} (2L+1) T_A^{(L)M}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 + \frac{1}{(2j_x+1)(2j_y+1)\overline{|M|^2}} \sum_{l=1}^{2j_A} T_A^{(L)M} A_A^{LM} \right), \quad (3.30)$$

где

$$A_A^{LM} = (2L+1) \sum_{\substack{M_A M_A' M_B \\ M_X M_Y}} C_{j_A M_A' LM}^{j_A M_A} M_{M_A M_X}^{M_B M_Y} (M_{M_A' M_X}^{M_B M_Y})^*. \quad (B.BI)$$

Аналогично угловое распределение частиц y в бинарной реакции (3.22) с поляризованными частицами x , которое мы обозначим как $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_x$, можно представить в виде

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_x = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 + \frac{1}{(2j_x+1)(2j_A+1)|M|^2} \sum_{L=1}^{2j_x} T_x^{(L)M} A_x^{LM}\right), \quad (3.32)$$

причем

$$A_x^{LM} = (2L+1) \sum_{\substack{M_x M_y \\ M_A M_B}} C_{LM_x LM}^{j_x M_x} M_{MA M_x}^{M_B M_y} \left(M_{MA M_x}^{M_B M_y}\right)^*. \quad (3.33)$$

Если рассматривается реакция



обратная (3.22), то пользуясь формулой (2.55), которая выражает связь между амплитудой M реакции (3.22) и амплитудой \tilde{M} реакции (3.34), следующую из Т-инвариантности, нетрудно установить, что

$$\tilde{T}_x^{(L)M} |\tilde{M}|^2 \sim A_x^{L-M}, \quad T_A^{(L)M} |\tilde{M}|^2 \sim A_A^{L-M}, \quad \tilde{A}_y \sim T_y^{(L)M} |\tilde{M}|^2 \quad (3.35)$$

$$\tilde{A}_B \sim T_B^{(L-M)} |\tilde{M}|^2, \quad (2j_x+1)(2j_A+1) |\tilde{M}|^2 = (2j_y+1)(2j_B+1) |\tilde{M}|^2.$$

Поэтому все соотношения, которые будут получены далее для поляризационных явлений в реакции $A(x, y)B$, легко переносятся на реакцию $B(y, x)A$ [I4].

3. Введем понятие асимметрии \mathcal{A} в реакции на поляри-

зованной мишени. Фиксируем кинематику реакции, т.е. взаимную ориентацию и величины импульсов всех частиц. Обозначим через $|M|_r^2$ и $|M|_t^2$ квадрат модуля матричного элемента реакции (3.23), просуммированный по спиновым состояниям частиц θ, ψ, π и усредненный по спиновым состояниям частицы X для случаев, в которых поляризация ядер мишени есть \vec{P}_A и $-\vec{P}_A$. Под асимметрией будем понимать величину.

$$\mathcal{A} = \frac{|M|_r^2 - |M|_t^2}{2\overline{|M|^2}} \quad (3.36)$$

Здесь вместо $|M|_r^2$, $|M|_t^2$, $\overline{|M|^2}$ можно писать соответствующие дифференциальные сечения, т.к. множитель, происходящий из-за фазового объема, во всех трех случаях один и тот же. Отметим, что при данном определении асимметрия \mathcal{A} не обязательно меньше единицы, т.к. в знаменателе формулы (3.36) стоит не $(|M|_r^2 + |M|_t^2)$, а $2\overline{|M|^2}$.

Для $|M|_r^2$ и $|M|_t^2$ справедливо соотношение

$$|M|_r^2 = \frac{1}{2j_A+1} \sum M_{MA, M_A}^{MB, MB} (M_{MA, M_A}^{MB, MB})^* \rho_{MA, M_A}, \quad (3.37)$$

где

$$\rho_{MA, M_A} = \frac{1}{2j_A+1} (\delta_{MA, M_A} + 3 C_{j_A M_A / IM}^{j_A M_A} T_A^{IM} + \dots). \quad (3.38)$$

Вклад в асимметрию от поляризационного момента первого порядка (т.е. от поляризации \vec{P}_A частиц A) равен

$$f = \frac{3 M_{\text{нам}}^{M_1 M_2} (M_{\text{нам}}^{M_1 M_2})^* C_{j_A j_M}^{j_A j_M} T_A^{(1)M}}{(2j_x + 1)(2j_A + 1) |M|^2}$$

(3.89)

Вклад в асимметрию могут давать также поляризационные моменты частицы A более высоких нечетных порядков $T_A^{(3)M}$, $T_A^{(5)M}$ и т.д.

4. Амплитуда прямых процессов и нерелятивистские фейнмановские диаграммы

4а. Прямые процессы

Итак, мы научились рассчитывать различные поляризационные эффекты, если известна амплитуда реакции. Теперь встает вопрос: как определить амплитуду прямого процесса?

Давайте сначала вспомним, что прямыми реакциями принято называть такие реакции, в которых преимущественная часть энергии и импульса передаются одному нуклону или сравнительно небольшой группе нуклонов. Их характерными особенностями являются:

а) Резко асимметричное угловое распределение в системе ц.и., слабо зависящие от энергии. Обычно наблюдается максимум при малых углах, что отвечает малым переданным импульсам. Иногда сечение имеет максимум при углах, больших 90° .

б) Энергетический спектр вылетающих частиц сильно отличается от испарительного. Число частиц с энергией, много большей температуры соответствующего составного ядра, в десятки раз превышает интенсивность, предсказываемую максвелловским распределением при этих энергиях.

в) Протоны и сложные частицы проявляют себя во многих прямых процессах одинаковым образом. Примером служат реакции выбивания типа $(p, p\alpha)$, $(p, p\alpha)$, $(\alpha, 2\alpha)$, кинематическая картина в которых близка к столкновению свободных частиц и ничем не отличается от процесса $(p, 2p)$ или (p, pn) . Положение таково, как если бы частицы типа α, t, ω и т.п. реально существовали в ядре. Однако подобное представление неверно, т.к. нет соответствующего адиабатического приближения и зачастую энергия отделения частицы от ядра оказывается больше энергии связи самой частицы.

Современные представления о природе прямых процессов сводятся вкратце к следующему [15,16]:

Ядро является динамической системой, виртуально испускающей и поглощающей обратно всевозможные частицы. Эти виртуальные частицы, испускаемые на очень короткое время (порядка времени прямой реакции), образуют периферию ядра, подобно тому, как виртуальные π -мезоны составляют периферию нуклона, причем наименее связанные с ядром частицы являются наиболее "периферийными". Прямой процесс является результатом столкновения налетающей частицы с одной или несколькими виртуальными частицами. Это столкновение вызывает ядерную реакцию, часть продуктов которой может быть захвачена с образованием остаточного ядра, а другая вылетает наружу.

Формализмом, отвечающим такому представлению о процессах с передачей энергии и импульса одному или нескольким нуклонам, является формализм фейнмановских диаграмм, в который с самого начала нуклоны и более сложные образования типа α, t, ω входят равноправным образом. На языке диаграмм прямым процессам отвечают графики с небольшим числом внутрен-

них линий (т.е. виртуальных частиц). При этом понятие механизма реакции приобретает точный смысл указанием диаграммы, дающей доминирующий вклад в быстро меняющуюся часть амплитуды реакции.

Расчеты, которые проводились до диаграммной методики, обычно отвечают учету одной, реже двух диаграмм (импульсное приближение), причем зачастую в таких областях, где эти диаграммы ничем не выделены среди прочих.

Для одной и той же реакции можно указать бесконечное количество Фейнмановских диаграмм. Однако и в современной теории ядерных реакций учитываются, как правило, одна или несколько диаграмм, в лучшем случае — сумма избранного бесконечного ряда диаграмм. Но эти диаграммы специальным образом отбираются. Отбираются диаграммы, которые дают наибольший вклад в быстроменяющуюся часть амплитуды. Таким образом, мы рассматриваем какую-либо диаграмму только в той области, где она выделена по сравнению с остальными, т.е. в области, лежащей вблизи особенности данной диаграммы.

Например, полюсные диаграммы рис. 3, 4 обычно имеют самую близкую особенность по переменной $\tilde{\tau}_{AB}$, расположенную при $\tilde{\tau}_{AB} = \tilde{\tau}_{A\bar{B}}^0 = 2m_i(m_B + m_i - m_A)$. Поэтому в области малых импульсов остаточного ядра В амплитуду реакции $A(x, y)B$ или $A(x, y \bar{z})B$ можно представить в виде суммы соответствующей полюсной диаграммы и медленно меняющегося (как функция P_0) члена. Этот добавочный член можно приближенно заменить константой. При этом нельзя забывать, что амплитуда реакции должна обладать правильной спи-

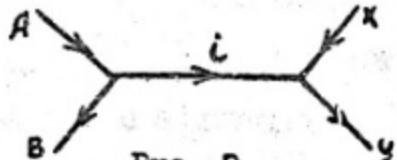


Рис. 3

импульсов остаточного ядра В амплитуду реакции $A(x, y)B$ или $A(x, y \bar{z})B$ можно представить в

виде суммы соответствующей полюсной диаграммы и медленно меняющегося (как функция P_0) члена. Этот добавочный член можно приближенно заменить константой. При этом нельзя забывать, что амплитуда реакции должна обладать правильной спи-

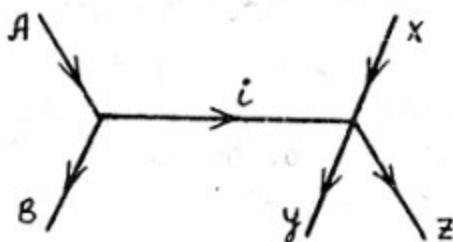


Рис. 4

новой структурой, вследствие чего константами можно считать лишь скалярные амплитуды в разложении типа (2.42) или (2.86) для добавочного члена.

4б. Правила вычисления фейнмановских диаграмм

Пользуясь тем, что на прошлогодней сессии школы читался курс, специально посвященный нерелятивистским фейнмановским диаграммам [17], мы здесь только кратко перечислим правила, с помощью которых каждому фейнмановскому графику сопоставляется определенное математическое выражение.

Пусть диаграмма имеет V вершин, т.е. V виртуальных процессов с амплитудами M_1, M_2, \dots, M_V , и n внутренних линий. С учетом того, что в каждой вершине имеет место закон сохранения 4-импульса, число ℓ независимых 4-импульсов виртуальных частиц дается соотношением

$$\ell = n - V + 1 \quad (4.1)$$

Амплитуда процесса, отвечающая рассматриваемой диаграмме, имеет вид

$$M = N \int_M \frac{M_1 M_2 \dots M_V d^4 k_1 dE_1 \dots d^4 k_n dE_n}{(k_1^2 - 2m_1 E_1 - i\eta) \dots (k_n^2 - 2m_n E_n - i\eta)}, \quad (4.2)$$

$$N = \frac{(-i)^{\ell} 2^{n-4\ell}}{2\pi^2} m_1 m_2 \dots m_n \quad (4.3)$$

$\eta > 0$ является бесконечно малой добавкой, указывающей правило обхода полюсов при интегрировании. Под знаком интеграла вы-

полняется суммирование по проекциям спинов всех виртуальных частиц.

В настоящих лекциях мы не будем касаться аналитических свойств диаграмм, а также правил нахождения особенностей, ограничиваясь ссылкой на обзоры [16, 17].

При исследовании связи между различными поляризационными явлениями обычно достаточно знать лишь общую спиновую структуру той или иной диаграммы. Рассмотрим несколько примеров

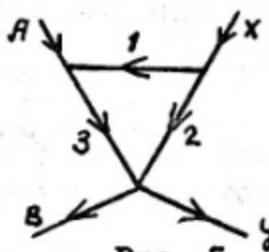


Рис. 5

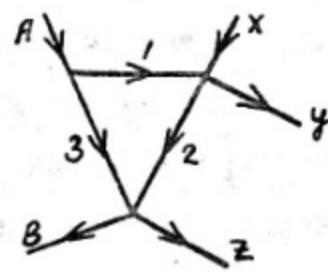


Рис. 6

Амплитуда полюсной диаграммы рис. 4 записывается с учетом (4.2) и (4.3) следующим образом:

$$M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_y \mu_z} = \frac{2m_i}{k_i^2 - 2m_i E_i - i\eta} \sum_{m_i} M_{\mu_A}^{\mu_8 m_i} M_{\mu_x}^{\mu_y \mu_z} \quad (4.4)$$

Амплитуда треугольной диаграммы рис. 5 есть

$$M_{\mu_A \mu_x}^{\mu_8 \mu_y} = -i \frac{m_1 m_2 m_3}{2\pi^4} \int d\vec{k}_1 dE_1 \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} M_{\mu_A \mu_1}^{\mu_3} M_{\mu_x}^{\mu_1 \mu_2} M_{\mu_2 \mu_3}^{\mu_8 \mu_y} \quad (4.5)$$

причем \vec{k}_2 , \vec{k}_3 , E_2 , E_3 выражаются через \vec{k}_1 , E_1 и импульсы внешних частиц. Важно, что в лаб. системе имеется только одно выделенное направление, характеризующее интегрирование (4.5) — направление \vec{p}_x , появляющееся из-за связи \vec{k}_1 и \vec{k}_2 (амплитуда $M_{\mu_2 \mu_3}^{\mu_8 \mu_y}$ может, конечно, содержать и другие

выделенные направления, например, \vec{n}_{By}).

В дальнейшем нам понадобится спиновая структура такой диаграммы в случае, когда амплитуда виртуального распада $X \rightarrow 1+2$ определяется одним скалярным формфактором с орбитальным моментом относительного движения $\ell_{12} = 0$:

$$M_{\mu_x}^{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Gamma(j_x, 0) C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_2}^{j_x \mu_x} \quad (4.6)$$

(см. (2.25)). Будем считать процесс $2 + 3 \rightarrow B + Y$ упругим рассеянием и пренебрежем в нем спин-орбитальным и спин-спиновым взаимодействием (учитываем лишь центральный потенциал), т.е. полагаем

$$M_{\mu_2 \mu_3}^{\mu_B \mu_Y} = F_{BY} \delta_{\mu_B \mu_3} \delta_{\mu_2 \mu_Y} \quad (4.7)$$

Для процесса $A + 1 \rightarrow B$ используем представление $\Psi_{\text{вн}}$ (2.25). Тогда

$$M_{\mu_A \mu_X}^{\mu_B \mu_Y} = - \frac{i m_1 m_2 m_3}{(2\pi)^4 \sqrt{4\pi}} \sum_{J, \ell} C_{j_A \mu_A j_1 \mu_1}^{j_M} C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_Y}^{j_X \mu_X} C_{j_2 \mu_Y j_M \mu_B}^{j_B \mu_B} \quad (4.8)$$

$$\times \int \frac{\Gamma(\gamma e) \Gamma(j_X 0) F_{BY}^* (\vec{n}_{A1}) d\vec{k}_1 dE_1}{(k_1^2 - 2m_1 E_1 - i\eta)(k_2^2 - 2m_2 E_2 - i\eta)(k_3^2 - 2m_3 E_3 - i\eta)},$$

причем в лаб.системе ($\vec{p}_A = 0$)

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1, \vec{k}_2 = \vec{p}_X - \vec{k}_1.$$

Как уже отмечалось, при интегрировании имеется всего одно выделенное направление \vec{p}_X ($= \vec{p}_B + \vec{p}_Y$) и

$Y_{cm}^*(\vec{n}_A) \rightarrow Y_{cm}^*(\hat{\vec{p}}_x)$. Таким образом с точностью до коэффициентов A_{je} , которые определяются интегралом (4.8) и зависят от кинематических инвариантов реакции $A(x, y)B$, получается сравнительно простая спиновая структура

$$M_{MAm_x}^{M_Bm_y} = \sum_{je} A_{je} C_{j_A m_A j_M}^{j_M} C_{j_x m_x j_y m_y}^{j_x m_x} C_{j_M m_M}^{j_B m_B} Y_{cm}^*(\hat{\vec{p}}_x). \quad (4.9)$$

Выше молчаливо подразумевалось, что мы пренебрегаем зависимостью амплитуды рассеяния $2 + 3 \rightarrow B + Y F$ (4.7) от переданного импульса $\hat{\vec{t}}_{2y}$. Если такого пренебрежения не делать, то появится еще одно выделенное направление $\hat{\vec{p}}_y$, и тогда можно утверждать только то, что

$$M_{MAm_x}^{M_Bm_y} = \sum_{je} A_{je} C_{j_A m_A j_M}^{j_M} C_{j_x m_x j_y m_y}^{j_x m_x} C_{j_M m_M}^{j_B m_B} \Phi_{cm}^* \quad (4.9a)$$

где Φ_{cm} - некоторая величина, построенная из векторов $\hat{\vec{p}}_x$ и $\hat{\vec{p}}_y$ и преобразующаяся при вращениях как $(2\ell + 1)$ вектор.

В качестве второго примера рассмотрим спиновую структуру треугольной диаграммы рис. 6 для реакции $(p, 2p)$. Частицы $1, 2, X, Y, Z$ - протоны. Используем для вершин

$A \rightarrow 1+3$ представление вида (2.25), ограничиваясь для простоты одним значением орбитального момента ℓ_{13} (в случае легких ядер обычно $\ell_{13} = 0$ или 1). Оставляем только центральное взаимодействие в вершине $2+3 \rightarrow B + Z$, т.е. полагаем

$$M_{\mu_2 \mu_3}^{\mu_0 \mu_2} = F_{\mu_2} \delta_{\mu_2 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_3}. \quad (4.10)$$

В разложении амплитуды упругого PP -рассеяния $1+X \rightarrow 2+Y$ по скалярным амплитудам (2.42) учтем лишь амплитуды $f_1 = f(0,0,0,0)$ и $f_5 = f(1,1,1,0)$ (мы придерживаемся обозначений работы [2]), которые, как оказывается [18], в области энергий 150–400 Мэв в несколько раз больше других скалярных амплитуд. При этом амплитуда PP -рассеяния имеет вид

$$\hat{F} = \frac{1}{16\pi} [f_1(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + 3 \cos \theta f_5 \vec{n}'(\vec{n}_1 + \vec{n}_2)], \quad (4.11)$$

\vec{n}' – нормаль к плоскости реакции $1+X \rightarrow 2+Y$.

Формула для диаграммы рис.6 подобна (4.5) и также содержит интегрирование по импульсу \vec{K}_1 частицы 1. В пропагаторы частиц 2 и 3 входит угол между векторами \vec{K}_1 и

$$\vec{K} = \vec{P}_B + \vec{P}_Z = \vec{P}_X - \vec{P}_Y \quad (4.12)$$

(\vec{P}_B , \vec{P}_Z , \vec{P}_X , \vec{P}_Y – импульсы в лаб.системе). Аргументом шаровой функции в вершине $A \rightarrow 1+3$ является $\vec{n}_{13} = \vec{K}_1 / |\vec{K}_1|$. Поэтому, если рассматривается первый член в (4.11), единственным выражением, в которое при интегрировании может перейти $Y_{em}(\vec{n}_{13})$, является $Y_{em}(\vec{n}_k)$, т.е. амплитуда треугольной диаграммы имеет вид

$$AC_{j_B \mu_B \frac{1}{2}-\mu_X}^{j_{13} \mu_{13}} C_{j_{13} \mu_{13} e_{13} \mu_{13}}^{j_{A \mu_A}} Y_{e_{13} \mu_{13}}(\vec{n}_k) \delta_{\mu_Z - \mu_Y}, \quad (4.13)$$

$$\vec{n}_K = \frac{\vec{P}_B + \vec{P}_Z}{|\vec{P}_B + \vec{P}_Z|} . \quad (4.14)$$

Выражение, получающееся при учете второго члена в (4.II) несколько сложнее. Прежде всего заметим, что если $m_1 = m_2 = m_x = m_y$, то

$$\begin{aligned} \vec{n}' &= \frac{[(\vec{P}_x - \vec{K}_1)(\vec{P}_y - \vec{K}_2)]}{|[(\vec{P}_x - \vec{K}_1)(\vec{P}_y - \vec{K}_2)]|} = \frac{[(\vec{P}_x - \vec{K}_1)(2\vec{P}_y - \vec{P}_x - \vec{K}_1)]}{|[(\vec{P}_x - \vec{K}_1)(2\vec{P}_y - \vec{P}_x - \vec{K}_1)]|} = \\ &= \frac{[\vec{P}_x \vec{P}_y] + [\vec{K}_1 \vec{K}_2]}{|[\vec{P}_x \vec{P}_y] + [\vec{K}_1 \vec{K}_2]|} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Важно, что сюда \vec{P}_x и \vec{P}_y входят только в комбинациях $\vec{K} = \vec{P}_x - \vec{P}_y$ и $[\vec{P}_x \vec{P}_y]$. Поэтому имеется только два выделенных внешних вектора: \vec{n}_K и

$$\vec{n} = \frac{[\vec{P}_x \vec{P}_y]}{|[\vec{P}_x \vec{P}_y]|} . \quad (4.16)$$

Единственное псевдовекторное направление, в которое может перейти \vec{n}' при интегрировании по \vec{K}_1 , есть \vec{n} , т.к. вторая псевдовекторная комбинация $\vec{n}_K (\vec{n}_K \vec{n})$ равна нулю вследствие ортогональности векторов \vec{n}_K и \vec{n} . Поэтому амплитуда будет содержать член

$$BC_{j_B M_B \frac{1}{2} M_1}^{j_B M_B M_3} C_{j_B M_B M_3}^{\delta \Delta M_A} C_{\frac{1}{2} M_1 \frac{1}{2} M_X}^{1 M_X} C_{\frac{1}{2} M_2 \frac{1}{2} M_Y}^{1 M_2 Y} C_{1 M_X 1 M}^{1 M_2 Y} Y_{(n_K)} Y_{1 M}^* \quad (4.17)$$

Вся амплитуда представится как сумма (4.13) и (4.17), причем коэффициенты А и В определяются зависимостью формфакторов процессов $A \rightarrow 1+3$, $1+x \rightarrow 2+y$ и $2+3 \rightarrow 8+y$ от своих кинематических переменных.

При интегрировании по направлениям \vec{K}_i произведения $\vec{n}' Y_{cm}(\vec{n}_{13})$ с учетом пропагаторов могут, вообще говоря, появиться и более сложные комбинации. Например для $\ell = 1$ в амплитуду может входить с некоторым новым коэффициентом С выражение вида (4.15), но с переставленными аргументами шаровых функций, т.е. с $Y_{lm}(\vec{n}) Y_{l'm'}(\vec{n}_\kappa)$

5. Поляризационные эффекты в реакциях срыва, подхвата и замещения

5а. Связь поляризационных явлений в реакциях срыва

Сейчас мы получим ряд соотношений, связывающих поляризационные эффекты в реакциях срыва, пользуясь лишь некоторыми общими свойствами спиновой структуры амплитуды реакции. Обычно эти соотношения получают при помощи весьма громоздких выкладок, основанных на методе искаженных волн.

Будет исследована связь между поляризацией вылетающих частиц \vec{P}_y и остаточных ядер \vec{P}_e и векторами чувствительности реакции к поляризации падающих частиц $\vec{P}_x(\theta)$ и ядер мишени $\vec{P}_A(\theta)$. Вектор чувствительности к поляризации – это величина, входящая в выражение для дифференциального сечения реакции на поляризованных частицах

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_A = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 + \vec{P}_A \vec{P}_A(\theta) + \dots), \quad (5.1)$$

где многоточием обозначены члены, зависящие от высших поляризационных моментов. $P_i(\theta)$ и $P_A(\theta)$ связаны с введенными ранее величинами A_i^{IM} и A_A^{IM} (см. (3.81) и (3.83)).

Наше основное предположение состоит в том, что главный вклад в амплитуду реакции дает полюсная диаграмма (рис. 7а) и диаграммы, спиновая структура которых такая же, как у треугольных диаграмм, соответствующих взаимодействию в начальном и конечном состояниях (рис. 7б-7г).

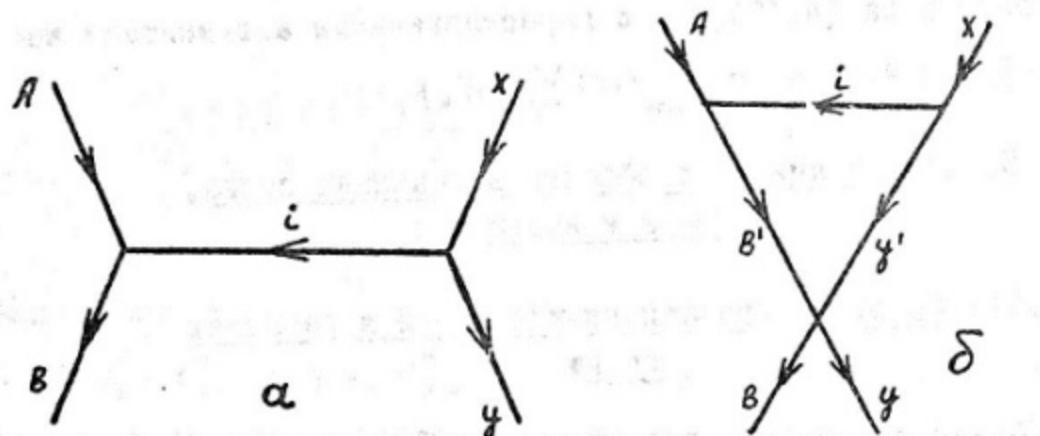
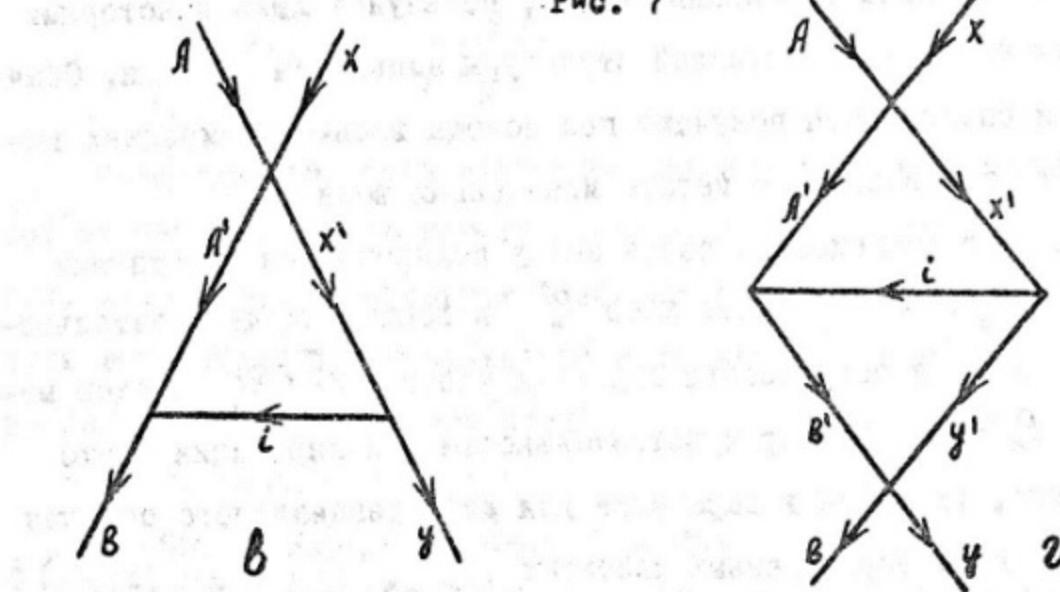


Рис. 7



Частица i в реакциях (d, ρ) , (t, d) , (d, n) - это нейтрон или протон, т.е. обычно $j_i = 1/2$. Имея в виду та-

кие реакции, будем считать, что в распаде $X \rightarrow i + y$ отлична от нуля лишь амплитуда с $\ell_{iy} = 0$, т.е. справедливо соотношение (4.6). Обозначим орбитальные моменты частиц i и A через ℓ_n , а их суммарный спин через j_n .

Тогда

$$M_{\chi_A M_i}^{M_B} = \sum_{\ell_n j_n} \tilde{\Gamma}(j_n \ell_n) C_{j_A M_A \ell_i M_i}^{\delta j_n \ell_n} C_{j_B M_B \ell_n m_n}^{\delta \chi M_B} Y_{\ell_n m_n}^*(\vec{n}_{\pm B}) \quad (5.2)$$

Амплитуда, отвечающая полюсной диаграмме рис. 7а, имеет вид

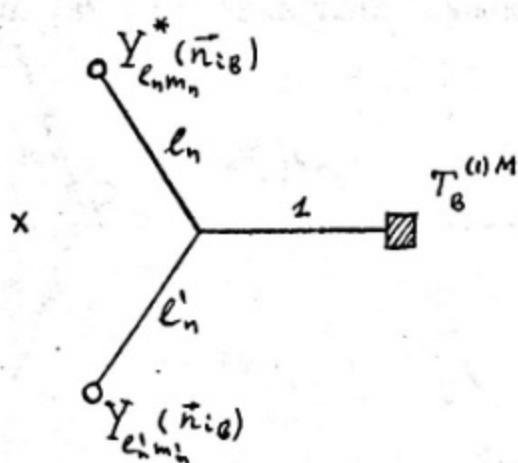
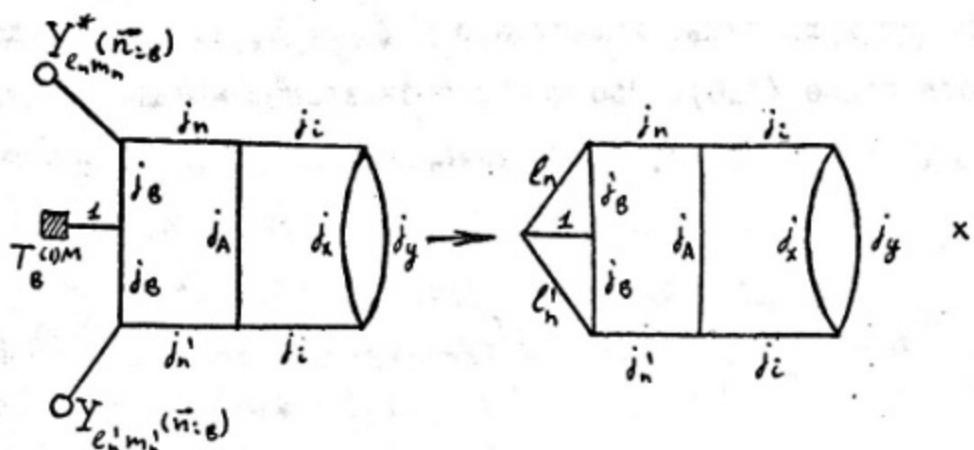
$$(M_{\text{пол}})_{\chi_A M_i}^{M_B M_y} = \sum_{j_n \ell_n} C_{j_A M_A \ell_i M_i}^{\delta j_n \ell_n} C_{j_B M_B \ell_n m_n}^{\delta \chi M_B} C_{j_B M_B \ell_i M_i}^{\delta x M_x} \Phi_{\ell_n m_n}^{(0)}(j_n), \quad (5.3)$$

где

$$\Phi_{\ell_n m_n}^{(0)}(j_n) = \frac{2m}{\sqrt{4\pi}} \frac{\Gamma(\ell_n, 0) \tilde{\Gamma}(j_n \ell_n)}{k_i^2 - 2m_i E_i} Y_{\ell_n m_n}^*(\vec{n}_{\pm B}) \quad (5.4)$$

Нетрудно видеть, что если бы вся амплитуда лавалась по полюсной диаграммой, то и поляризация конечных частиц, и чувствительность к поляризации начальных частиц были бы равны нулю. Действительно, например, при вычислении поляризации ядер В (см. (3.25)) войдет следующая сумма коэффициентов Вигнера

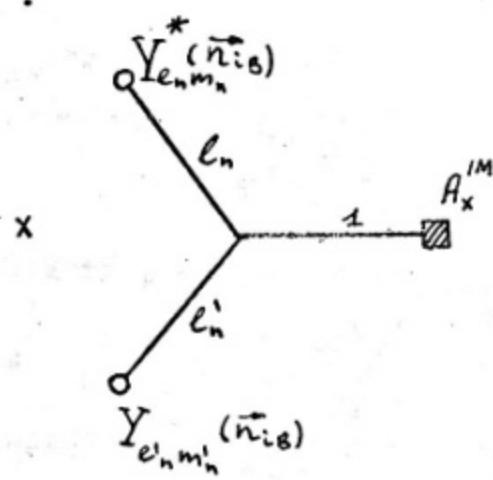
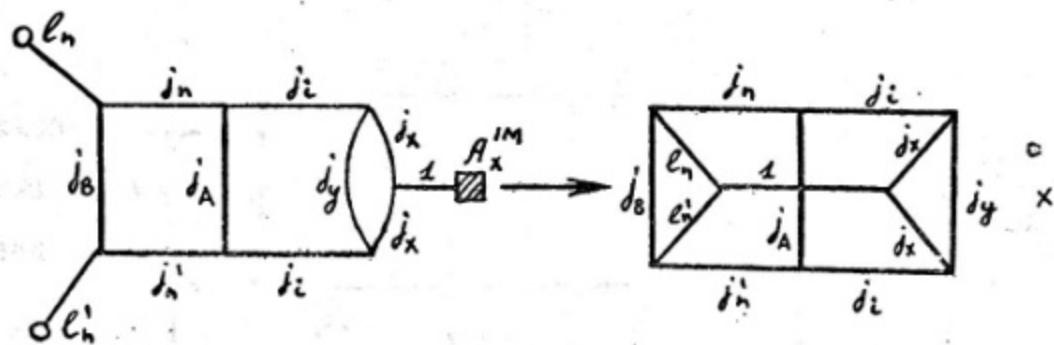
*). В дальнейшем мы пользуемся диаграммами сумм коэффициентов Вигнера, основные правила действия с которыми описаны в приложении.



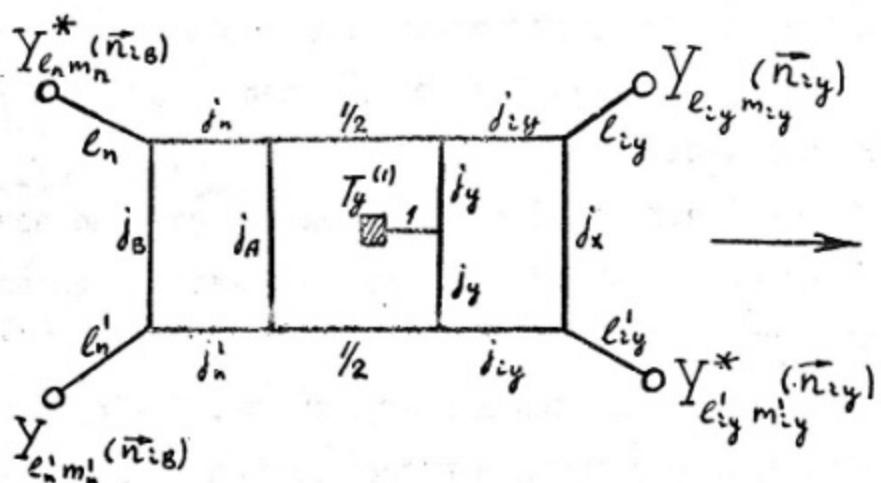
В представление (5.3) входят ℓ_n одной четности. Если учесть, что произведение двух шаровых функций от одного аргумента $\vec{n}; \vec{v}$ с четной суммой орбитальных моментов разлагается по шаровым функциям $Y_{LM}(\vec{n}; \vec{v})$ только с четными L , то становится понятным, что нарисованная сумма равна нулю.

Отметим, что поляризационные моменты частицы в четных порядков отличны от нуля и пропорциональны аналогичным величинам при захвате $A+i \rightarrow B$.

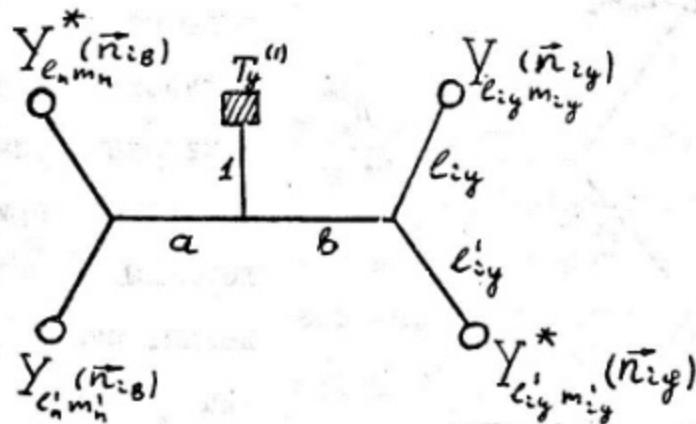
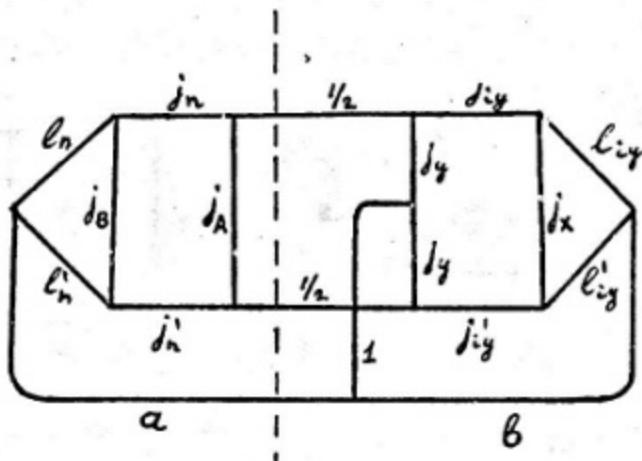
Аналогичная ситуация осуществляется при вычислении чувствительности к поляризации. Например, при расчете A_x^{IM} имеем картинку



Заметим, что вывод о равенстве нулю поляризации конечных частиц и чувствительности к поляризации начальных остается при $j_i = I/2$ справедлив при произвольном виде вершины $X \rightarrow i + y$. При вычислении, скажем, поляризации частиц y имеем



$$\longrightarrow \sum_{\alpha, \beta} (2\alpha+1)(2\beta+1) \times$$



При разрезании по пунктирной линии видно, что "а" может быть равно только 0 и 1. С другой стороны, "а" обязательно четное, т.к. получается при разложении $Y_{e_n m_n}(\bar{n}_{i_B}) Y_{e'_n m'_n}(\bar{n}_{i_B})$ и $\ell_n + \ell'_n$ четное. Таким образом единственное возможное значение "а" есть нуль, и т.к. "в" обязательно четное, весь график равен нулю.

Учтем теперь вклад диаграмм рис. 7б-7г, оставляя лишь центральный потенциал в процессах упругого рассеяния

$$A+x \rightarrow A'+x' \quad \text{и} \quad B'+y' \rightarrow B+y$$

Диаграмма рис. 7б была разобрана в предыдущем разделе. Аналогично проводится рассмотрение диаграмм рис. 7в и 7г, и результат может быть записан в виде (5.3), но с некоторыми другими

величинами $\Phi_{e_n m_n}^{(1)}$, которые преобразуются при вращениях как шаровые ($2\ell_n + 1$) векторы и определяются интегралами, возникающими при записи треугольных диаграмм. Их конкретный вид нам в дальнейшем не понадобится.

Итак, результат сложения диаграмм рис. 7 записывается в виде

$$M_{M_A M_B}^{M_C M_D} = \sum_{j_n \ell_n} C_{j_n M_A j_n M_B}^{j_n M_C} C_{j_n M_B \ell_n m_n}^{j_n M_D} C_{j_n m_n \ell_n M_D}^{j_n M_C} \times \\ \times (\Phi_{e_n m_n}^{(1)}(j_n) + \Phi_{e_n m_n}^{(1)}(-j_n)). \quad (5.5)$$

Заметим, что в разложении произведений вида $\Phi_{e_n m_n}^{(1)} \Phi_{e_n m_n}^{(1)}$ и $\Phi_{e_n m_n}^{(1)} \Phi_{e_n m_n}^{(1)}$, в отличие от $\Phi_{e_n m_n}^{(0)} \Phi_{e_n m_n}^{(0)}$, присутствуют $(2L + 1)$ вектора как с четными, так и с нечетными L . Поэтому теперь поляризационные эффекты будут отличны от нуля.

Для нахождения связи между различными поляризационными явлениями в реакциях $A(x, y)B$ достаточно знать соотношение (5.5).

В целях упрощения выкладок предположим, что ядерная вершина $A \rightarrow B + C$ определяется только одним формфактором в разложении (5.2) с определенными ℓ_n и j_n , т.е. что в сумме (5.5) на самом деле отличен от нуля только один член. В действительности ряд формул, например соотношение между $T_y^{(LM)}$ и A_x^{LM} , получаются и без такого предположения.

Тогда

$$\overline{|M|^2} = \sum_{m_n m_n^*} \left(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 \right) \Phi_{e_n m_n} \Phi_{e_n m_n^*}^* \quad (5.6)$$

$$\sim \{ e_n j_1 j_2 \} \{ j_3 j_4 j_5 \} \{ j_1 j_2 j_3 \} \sum | \Phi_{e_n m_n} |^2.$$

Здесь через $\Phi_{e_n m_n}$ обозначена сумма $\Phi_{e_n m_n}^{(0)}(j_n) + \Phi_{e_n m_n}^{(1)}(j_n)$.

В (5.6) выполнено суммирование по проекциям спинов всех внешних частиц. Как мы уже видели, если ищется поляризационный момент $T_k^{(L)M}$ К-ой частицы или, наоборот, чувствительность к поляризационному моменту L -ного порядка одной из начальных частиц, это на схеме суммирования коэффициентов Вигнера отвечает присоединению к линии К-ой частицы еще одной линии с моментом L

$$j_n \longrightarrow j_n \begin{array}{c} L \\ \square \end{array} T_k^{(L)M} \text{ или } A_k^{(L)M}$$

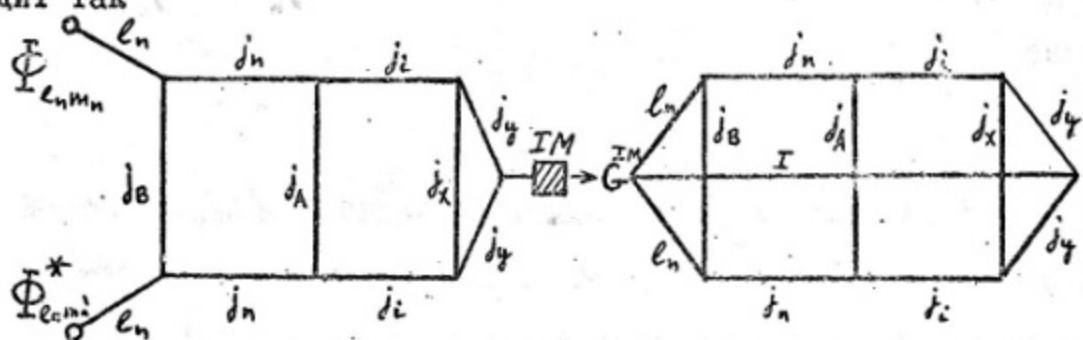
Получившееся выражение дает либо искомый поляризационный момент, либо чувствительность.

Основная идея [14] состоит в том, что с точностью до некоторого числа (j - символа) все такие выражения сводятся одно к другому, т.к. в них входит лишь одна нетривиальная комбинация

$$\begin{aligned}
 G^{LM} &= \sum_{m_1 m_2} c_{l_1 m_1} e_{l_1 m_1} \Phi_{l_1 m_1} \Phi_{l_1 m_1}^* = \\
 &= \sum_{m_1 m_2} (-1)^{m_1} \binom{l_1 l_1 L}{m_1 - m_1 M} \Phi_{l_1 m_1} \Phi_{l_1 m_1}^*.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Поэтому схема расчета такова: выписываем выражение для интересующей нас величины с помощью формул (3.25), (3.31), (3.33), (5.5), сводим входящую туда сумму коэффициентов Клебша-Гордона с помощью (П.1) и (П.2) к сумме коэффициентов Вигнера, после чего, пользуясь правилами замыкания j_m -коэффициентов (см. Приложение), преобразуем получившееся выражение к произведению соответствующего j -символа на величину (5.7). Связь между различными поляризационными явлениями будет даваться просто отношением получающихся в различных случаях j -коэффициентов.

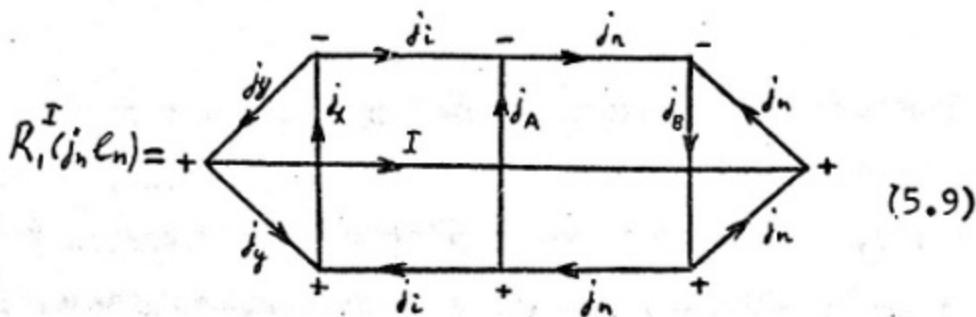
Рассмотрим поляризацию частиц γ в реакции с неполяризованными начальными частицами. Соответствующая схема выглядит так



Если посчитать все коэффициенты, то

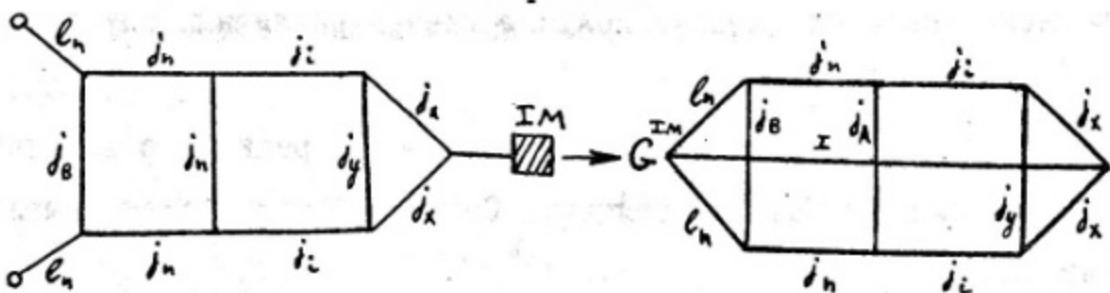
$$T^{(I)M} = \frac{1}{|M|^2} (-1)^{I+2j_A+2j_n+\ell_n^1} (2j_B+1)(2j_X+1)^{3/2} (2j_A+1)^{-1/2} (2j_n+1) \times \\ \times R_1^I(j_n, \ell_n) G^{IM}. \quad (5.8)$$

где



Коэффициент $R_1^I(j_n, \ell_n)$ представлен в Приложении через произведение трех $6j$ -коэффициентов.

При вычислении чувствительности к поляризационным моментам частицы X возникает картинка

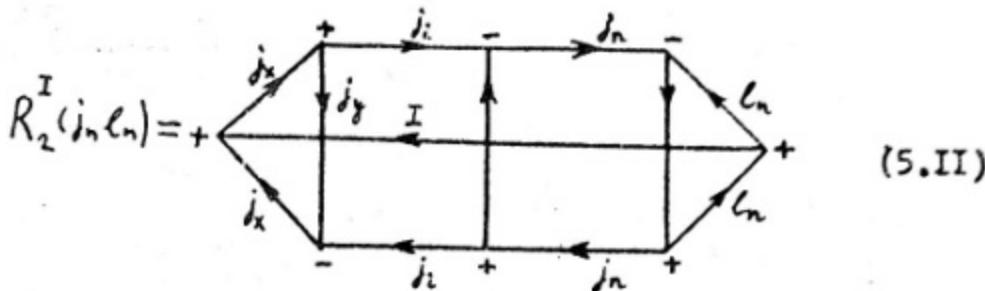


Точнее

$$A_X^{IM} = (-1)^M (-1)^{2j_Y+2j_A+2j_n+\ell_n^1} (2j_B+1)(2j_X+1)^{3/2} (2j_A+1)(2j_n+1) \times \\ \times R_2^I(j_n, \ell_n) G^{IM} \quad (5.10)$$

$$\times R_2^I(j_n, \ell_n) G^{IM}$$

где



Величина $R_2^I(j_n l_n)$ может быть два раза разрезана по трем линиям и представлена в виде произведения трех $6j$ -коэффициентов. Сравнивая R_1^I и R_2^I , без труда находим

$$A_x^{IM} = (-1)^{I+M} (2I+1)(2j_x+1)(2j_A+1) \overline{|M|^2} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{c} j_x \ j_x \ I \\ j_z \ j_z \ j_y \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_y \ j_y \ I \\ j_z \ j_z \ j_x \end{array} \right\}^{-1} T_y^{(I)-M} \quad (5.II)$$

Отметим, что коэффициенты R_1^I и R_2^I , а вместе с ними и $T_y^{(I)M}$, A_x^{IM} отличны от нуля только при $I \leq 2j$.

Аналогично находится связь и между другими величинами. Угловое распределение $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A$ продуктов реакции на поляризованной мишени имеет вид

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left\{ 1 + \beta^1 \cdot \vec{P}_A \cdot \vec{P}_y + \dots \right\}. \quad (5.III)$$

Многоточием обозначены члены, зависящие от более высоких поляризационных моментов ядра A , \vec{P}_A - поляризация мишени A ; \vec{P}_y - поляризация вылетающих частиц y в реакции на неполяризованной мишени,

$$\beta^1 = (-1)^{j_x+j_y+j} \frac{3}{2j+1} \left[\frac{j_A (2j_A+1) j_y}{(j_A+1)(j_y+1)(2j_y+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \begin{array}{c} j_A \ j_A \ I \\ j_n \ j_n \ j \end{array} \right\} \left(\left\{ \begin{array}{c} j_y \ j_y \ I \\ j_z \ j_z \ j_x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_z \ j_z \ I \\ j_n \ j_n \ j_A \end{array} \right\} \right)^{-1} \quad (5.14)$$

Не представляет труда установить также связь между поляризационными моментами частиц γ и остаточных ядер B

$$T_B^{(I)M} = \gamma(I) T_\gamma^{(I)M}, \quad (5.15)$$

$$\gamma(I) = (-1)^{j_x+j_y-j_A-j_n} \sqrt{\frac{2j_B+1}{2j_y+1}} [(2j_z+1)(2j_A+1)]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} j_B \ j_B \ I \\ \ell_n \ \ell_n \ j_n \end{array} \right\} \times \left(\left\{ \begin{array}{c} j_z \ j_y \ I \\ j_z \ j_z \ j_x \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_z \ j_z \ I \\ j_z \ j_n \ j_A \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_n \ j_n \ I \\ \ell_n \ \ell_n \ j_B \end{array} \right\} \right)^{-1} \quad (5.16)$$

В таблице I приведены численные соотношения для ряда простых реакций (таблица взята из [I4]).

Отметим, что если $\ell_n = 0$, то обращается в нуль величина G_{LM} (5.7) и соответственно

$$T_\gamma^{(I)M} = 0, \quad T_B^{(I)M} = 0 \text{ (если } I \neq 0) \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_A = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{IA} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0, \quad (5.18)$$

т.е. в случае $\ell_n = 0$ при сделанных выше предположениях поляризационные эффекты в реакциях срыва отсутствуют.

Таблица I

Поляризация поляризации		$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_x / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_y / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$
(d, p)	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_y = -3\beta \vec{P}_y$ $T_y^{(a)} \neq 0$	$1 + 3\vec{P}_y \vec{P}_x$
(d, n) $j_1 = \frac{1}{2}$	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_y = \frac{3}{2}\beta \vec{P}_y$ $T_y^{(a)} \neq 0$	$1 - \frac{9}{4}\gamma \vec{P}_A \vec{P}_y +$ члены, зависящие от квадрупольизации
(He^3, d) (t, d) $j_1 = \frac{1}{2}$	$\vec{P}_y \neq 0$ $T_y^{(a)M} \equiv 0$	$\vec{P}_y = 2\beta \vec{P}_y$ $T_y^{(a)} \neq 0$	$1 - \vec{P}_y \vec{P}_x$
(He^3, p) (t, n) $j_1 = 1$	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_y = 2\beta \vec{P}_y$ $T_y^{(a)} \neq 0$	$1 - 3\gamma \vec{P}_A \vec{P}_y +$ члены, зависящие от квадрупольизации

$$\text{III}) \quad \beta = \frac{j_n(j_n+1)}{j_3[j_n(j_n+1) + j_3(j_3+1) - j_A(j_A+1)]} \quad \gamma = \frac{\epsilon_n(\ell_n+1) + j_3(j_3+1) - j_n(j_n+1)}{\epsilon_n(\ell_n+1) + j_n(j_n+1) - j_A(j_A+1)}$$

56. Реакции срыва δ^+ - нейтронов

Действительно, в реакциях срыва δ -нейтронов поляризационные эффекты обычно меньше, но не равны нулю. Попытаемся объяснить наблюдаемую на опыте поляризацию вылетающих частиц, учитывая спин-орбитальное взаимодействие в упругом рассеянии начальных ($A + x \rightarrow A' + x'$) или конечных ($B' + y' \rightarrow B + y$) частиц.

В соответствии с предположениями, которые делаются обычно в методе искаженных волн, будем учитывать полюсную диаграмму (рис. 7а) и ее интерференцию с треугольными диаграммами (рис. 7б и 7в). При этом введем лишь взаимодействие спина частицы $X(y)$ с орбитальным моментом, а спиновое состояние ядра $A(B)$ в процессе упругого рассеяния будем считать неизменным (т.е. $\mu_A = \mu'_A$, $\mu_B = \mu'_B$). Поэтому амплитуда упругого рассеяния записется как

$$(f(\vec{n}_{xA}, \vec{n}_{x'A'}))_{\mu_x \mu_A}^{m_x m_A} = \delta_{\mu_A \mu'_A} \sum_{j_{xx'}, \lambda} \bar{f}(j_{xx'}, 0, j_{x'A'}, \lambda) \quad (5.19)$$

$$\frac{j_{xx'} m_x}{j_{xx'} j_{x'A'} m_{x'A'}} C_{z-1 m_{xA} z+1 m_{x'A'}}^{j_{xx'} m_{x'A'}} Y_{z-1 m_{xA}}^*(\vec{n}_{xA}) Y_{z+1 m_{x'A'}}^*(\vec{n}_{x'A'})$$

аналогично для процесса $B'(y', y) B$.

Выражение (5.19) содержит не только линейные спин-орбитальные члены вида $\vec{\delta} \cdot \vec{n}$ (им отвечает $j_{xx'} = 1$), но и квадратичные и т.д., так как спин частицы S_x или S_y может быть больше $1/2$.

Амплитуду реакции $A(x, y)B$ представим в виде суммы трех членов

$$M_{MA, M_x}^{MB, M_y} = (M_0 + M_1 + M_2)_{MA, M_x}^{MB, M_y}, \quad (5.20)$$

где M_0 , M_1 и M_2 соответствуют диаграммам рис. 7а, 7б, 7в. Их можно записать в виде

$$(M_0)_{MA, M_x}^{MB, M_y} = C_{j_y, M_y, j_z, M_z}^{\delta x, M_x} C_{j_A, M_A, j_z, M_z}^{\delta x, M_x} \Phi^{(0)}, \quad (5.21)$$

$$(M_1)_{MA, M_x}^{MB, M_y} = \sum_{\delta y, y'} C_{j_y, M_y, j_z, M_z}^{\delta x, M_x} C_{j_y, M_y, j_y', M_y'}^{\delta y, M_y} C_{j_A, M_A, j_z, M_z}^{\delta x, M_x}$$

$$\times F_{j_y, y', M_y, y'}^{(1)}, \quad (5.22)$$

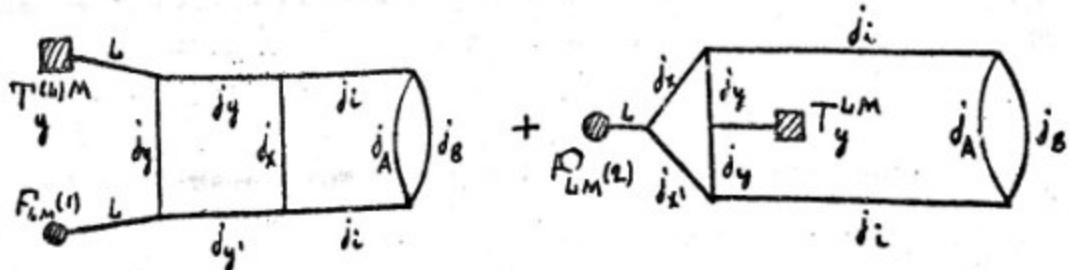
$$(M_2)_{MA, M_x}^{MB, M_y} = \sum_{j_{xx}} C_{j_{xx}, M_{xx}, j_{xx}, M_{xx}}^{\delta x, M_x} C_{j_y, M_y, j_z, M_z}^{\delta x, M_x} C_{j_A, M_A, j_z, M_z}^{\delta x, M_x}$$

$$\times F_{j_{xx}, M_{xx}}^{(2)}, \quad (1)$$

$\Phi^{(0)}$ - скалярная величина; явный вид $\Phi^{(0)}$, $F_{j_y, y', M_y, y'}^{(1)}$ и

$F_{j_{xx}, M_{xx}}^{(2)}$ нам в дальнейшем не понадобится.

Теперь картинки суммирования коэффициентов Вигнера будут следующими. При вычислении $T_y^{(4)M}$



$T_y^{(4)M}$ определяется величинами $F_{LM}(1)$ и $F_{LM}(2)$, которые в свою очередь получаются из инвариантных амплитуд $f(L, o, L, \lambda)$. Таким образом в принятых предположениях поляризация определяется членами, линейными по спин-орбитально-му взаимодействию, квадрупольяризация - членами, квадратичными по этому взаимодействию и т.д. При вычислении чувствительности к поляризационным моментам $T_x^{(4)M}$ частицы X возникают похожие картинки, но там уже величины $F_{LM}(1)$ и $F_{LM}(2)$ входят с другими относительными весами. Поэтому, если учитывать и взаимодействие в начальном состоянии, и взаимодействие в конечном состоянии, то, вообще говоря, прямой пропорциональности между $T_y^{(4)M}$ и $A_x^{(4)-M}$ не будет. Если же ограничиться учетом спиновых эффектов только в выходном канале, получим

$$A_x^{(4)M} = (-1)^M \alpha_1 T_y^{(4)-M} \quad (5.24)$$

где

$$\alpha_1 = -(-1)^{j_x + j_y + j} (2j_A + 1)(2j_x + 1)^{3/2} (2j_y + 1)^{1/2} / (2j_z + 1) \left\{ \begin{matrix} j_x & j_x + 1 \\ j_y & j_y + 1 \\ j_z & j_z + 1 \end{matrix} \right\} \quad (5.25)$$

Аналогично можно найти связь между $A_A^{(4)M}$ и $T_y^{(4)-M}$ и между $T_B^{(4)M}$ и $A_x^{(4)M}$. Мы не будем выписывать здесь соответствующих коэффициентов, ограничившись ссылкой на работу [14].

Если бы мы, наоборот, учитывали только спиновые эффекты во входном канале, соотношение (5.24) сохранило бы свой вид, но с другим коэффициентом α_1 .

Приведем результаты для некоторых конкретных реакций.

а) Учитывается взаимодействие в конечном состоянии

Реакция	Поляризация	Поляризация ядер В	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$	$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$
(d, p)	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_B = \frac{1}{3} \beta \vec{P}_y$	$1 + \vec{P}_y \vec{P}_x^*$	$1 - \frac{1}{3} \gamma \vec{P}_y \vec{P}_A^*$
(d, n)		$T_B^{(2)} \equiv 0$		
$d_i = \frac{1}{2}$				
(He^3, p)	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_B^{*} = -\frac{1}{6} \beta \vec{P}_y$	$1 - \frac{1}{3} \vec{P}_y \vec{P}_x^*$	$1 + \frac{1}{2} \gamma \vec{P}_y \vec{P}_A^*$
(t, n)		$T_B^{(2)} \neq 0$		
$d_i = 1$				

б) Учитывается взаимодействие в начальном состоянии

(d, p)	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_B = \frac{1}{3} \beta \vec{P}_y$	$1 + \frac{3}{2} \vec{P}_x \vec{P}_y^* +$ члены, зависящие от квадрупольных зазоров	$1 - \gamma \vec{P}_y \vec{P}_A^*$
(d, n)		$T_B^{(2)} \equiv 0$		
$d_i = \frac{1}{2}$				
(He^3, p)	$\vec{P}_y \neq 0$	$\vec{P}_B^{*} = -\frac{1}{2} \beta \vec{P}_y$	$1 - 3 \vec{P}_x \vec{P}_y^*$	$1 + \frac{3}{2} \gamma \vec{P}_y \vec{P}_A^*$
(t, n)		$T_B^{(2)} \equiv 0$		
$d_i = 1$				

$$\text{Здесь } \beta = \frac{j_i(j_i+1) + j_B(j_B+1) - j_A(j_A+1)}{j_B}$$

$$\gamma = \frac{j_i(j_i+1) + j_A(j_A+1) - j_B(j_B+1)}{j_A+1}$$

Соотношения, приведенные в таблице, остаются в силе, если рассмотреть все диаграммы рис. 7а - 7г, но учитывать спиновые эффекты в амплитуде упругого рассеяния лишь в одном канале: либо во входном, либо в выходном. Во-вторых, если учитывать только члены, линейные по спин-орбитальному взаимодействию в амплитуде упругого рассеяния, т.е. представлять ее в виде $f = a + b(\vec{s} \cdot \vec{n})$, то при учете диаграмм рис. 7а - 7г, сохраняя спиновую зависимость лишь в одном канале, мы получаем те же соотношения, не ограничиваясь интерференцией между полюсной и другими диаграммами. Учет других диаграмм приведет к изменению поляризационных моментов высших порядков, но не изменит выражений для первого порядка.

5в. Поляризация и асимметрия в реакции $\text{He}^3(d, p)\text{He}^4$.

Для реакции $\text{He}^3(d, p)\text{He}^4$ $\ell_n = 0$ и из таблицы видно, что

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_d = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 (1 + 2 \vec{P}_p \cdot \vec{P}_d), \quad (5.26)$$

где \vec{P}_d - поляризация падающих дейtronов, \vec{P}_p - поляризация протонов в той же реакции $\text{He}^3(d, p)\text{He}^4$, то с неполяризованными начальными частицами. $L = 3/2$ и I в зависимости от того, учитывается ли спиновая структура соответственно во входном или выходном канале. Экспериментально наблюдается другое соотношение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_A = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 - \frac{3}{2} \vec{P}_p \vec{P}_A\right) \quad (5.27)$$

и

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_B = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left(1 - \vec{P}_p \vec{P}_B\right). \quad (5.28)$$

Начнем с феноменологического анализа реакции $^{19}/I$.

Напишем для амплитуды разложение в представлении спина перекретного канала (2.46). Спины начальных частиц $I/2$ и I , конечных 0 и $I/2$. Имеется шесть скалярных амплитуд

$\bar{f}(j_{x_4}, j_A, L, \lambda)$:

$$f_1 = \bar{f}(1/2, 1/2, 0, 0), \quad f_2 = \bar{f}(1/2, 1/2, 1, 0), \quad f_3 = \bar{f}(3/2, 1/2, 1, 0), \quad (5.29)$$

$$f_4 = \bar{f}(3/2, 1/2, 2, -1), \quad f_5 = \bar{f}(3/2, 1/2, 2, 0), \quad f_6 = \bar{f}(3/2, 1/2, 2, 1).$$

Мы можем, пользуясь общими формулами для поляризационных эффектов, приведенными в разделе 3, выразить их все через указанные шесть амплитуд. Оказывается, что для того, чтобы выполнялись соотношения (5.27) и (5.28), достаточно обращения в нуль двух скалярных амплитуд:

$$f_2 = \bar{f}(1/2, 1/2, 1, 0) \equiv 0, \quad f_3 = \bar{f}(3/2, 1/2, 1, 0) \equiv 0 \quad (5.30)$$

Интересно то обстоятельство, что вклад в поляризацию конечных протонов и в чувствительность к поляризации начальных частиц дают вклад только амплитуды f_4, f_5, f_6 . Амплитуда f_1 туда не входит. Например, если $f_2 = 0, f_3 = 0,$

$$T_p^{(1)M} = -\frac{1}{|M|^2} \frac{1}{24\pi^3 h} Y_{IM}^*([\vec{n}_{x_A} \vec{n}_{y_B}]) \times$$

(5.31)

$$\cdot \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{2}} (f_4 f_5^* + f_5 f_6^*) + \frac{5}{8} f_4 f_6^* (\vec{n}_{x_A} \vec{n}_{y_B}) \right\}.$$

Полюсная диаграмма дает вклад лишь в скалярную амплитуду $f(I/2, I/2, 0, 0)$. Таким образом, угловое распределение реакции $\text{He}^3(d, p)\text{He}^4$ при малых углах определяется, по-видимому, ближайшей к физической области особенностью амплитуды — полюсом по переданному импульсу (диаграмма рис. 7а), в то время как $P \frac{d\sigma}{d\Omega}$ определяется другой (или совокупностью других) диаграммой.

Считая величины f_4, f_5, f_6 константами, можно так подобрать соотношение между ними, чтобы правильно передать угловой ход $P \frac{d\sigma}{d\Omega} [14]$.

Нетрудно понять, что треугольные диаграммы рис. 7б, 7в, если в них учитываются лишь члены, линейные по спин-орбитально му взаимодействию (а именно так делается в методе искаженных волн) не могут дать соотношений, согласующихся с экспериментом. Причина заключается в том, что эти диаграммы вносят вклад в амплитуды f_1, f_2, f_3 , а в нужные амплитуды f_4, f_5, f_6 вклада не дают.

Можно показать, что в общем случае, если записать все члены в амплитудах упругого рассеяния, треугольная диаграмма рис. 7б, отвечающая взаимодействию в начальном состоянии, дает вклад во все амплитуды (5.29), а диаграмма рис. 7в (взаимодействие в конечном состоянии) вносит вклад только в $f_1, f_2, f_3 [20]$. Таким образом, если надеяться на то, что

все же удается описать спиновые эффекты в реакции $\text{He}^3(d, p)\text{He}^4$ набором диаграмм рис. 7, то с учетом (5.30) отсюда следует, что основную роль играет взаимодействие в начальном состоянии.

Исследование энергетического хода поляризации показывает [20], что при определенных предположениях о тензорных силах в упругом рассеянии $d - \text{He}^3$ такая надежда не лишена оснований.

5г. Реакции замещения

Перейдем к обсуждению поляризационных эффектов в реакциях, амплитуда которых дается диаграммами типа рис. 8



Рис. 8

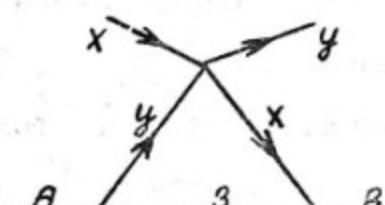


Рис. 9

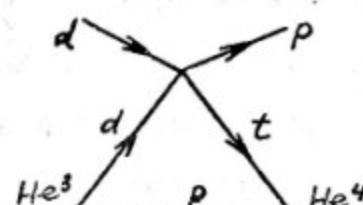


Рис. 10

Если в таком процессе в ядре как бы происходит замещение частицы Y на частицу X , то он так и называется реакцией "замещения" (см. рис. 9).

Для диаграммы рис. 8 общего вида с $\ell_{13} \neq 0$ и $\ell_{23} \neq 0$ соотношения между поляризационными явлениями весьма громоздки и, главное, малоинформационны, т.к. отсутствует простая связь между скалярными амплитудами всей реакции и скалярными амплитудами реакции



Ограничимся поэтому простым случаем, когда орбитальные моменты частиц в обеих ядерных вершинах (ℓ_{13} и ℓ_{23}) равны нулю. При этом выражение сильно упрощается, т.к. в треугольное

интегрирование не входят вектора \vec{n}_{13} и \vec{n}_{23} . Правда, указанное упрощение возникает лишь при выполнении еще одного условия. Будем считать, что импульсы частиц x и y много больше характерных импульсов внутриядерного движения частиц 1 и 2 и амплитуду $F_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y}$ реакции (5.32) можно вынести за знак интеграла в точке, отвечающей, скажем, $\vec{k}_1 = 0$ (в лаб. системе).

Тогда

$$M_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y} = g(\tilde{t}_{xy}) \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} C_{j_1, j_3, \mu_3}^{j_{\mu_1} M_A} C_{j_2, j_3, \mu_3}^{j_{\mu_2} M_B} F_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y}, \quad (5.33)$$

причем функция $g(\tilde{t}_{xy})$ определяется тем интегралом, который остается после вынесения $F_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y}$. Заметим, что этот интеграл совпадает с выражением для треугольной диаграммы рис. 8 с бесспиновыми частицами, если вершина $\overset{1+x \rightarrow 2+y}{\text{равна единице}}$, а в ядерных вершинах поставлены соответствующие скалярные формфакторы, отвечающие $\ell_{12} = 0$ и $\ell_{23} = 0$. Символически можно так представить равенство (5.33):

The diagram shows two parts. On the left, a horizontal rectangle with internal horizontal lines represents the amplitude $M_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y} = g(\tilde{t}_{xy})$. It has external lines labeled $j_{x \mu_x}$, $j_{y \mu_y}$, j_1 , j_2 , j_3 , $j_{\mu_1} M_A$, and $j_{\mu_2} M_B$. On the right, a triangular Feynman diagram represents the function $F_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y} = g \sum_{\lambda} f(j_{12} j_{xy} \lambda)$. It has vertices labeled j_1 , j_2 , j_{xy} , j_k , j_3 , $j_{\mu_1} M_A$, $j_{\mu_2} M_B$, and a circular vertex labeled Φ_{LM}^{λ} .

$$M_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y} = g(\tilde{t}_{xy}) \quad F_{\mu_1 \mu_x}^{\mu_2 \mu_y} = g \sum_{\lambda} f(j_{12} j_{xy} \lambda) \quad (5.34)$$

Здесь использовано разложение амплитуды F вида (2.46)

$$F_{j_{12} j_{xy}}^{M_2 M_4} = \sum_{j_{12} j_{xy} L \lambda} \bar{f}(j_{12} j_{xy} L \lambda) C_{j_{12} M_2}^{j_{12} M_2} C_{j_{xy} M_4}^{j_{xy} M_4} \times \\ \times C_{j_{12} M_2 j_{xy} M_4}^{LM} \Phi_{LM}^{\lambda} \quad (5.35)$$

$$\Phi_{LM}^{\lambda} = C_{z-\lambda m_{1x} z+\lambda m_{2y}}^{LM} Y_{z-\lambda m_{1x}}^*(\tilde{n}_{1x}) Y_{z+\lambda m_{2y}}^*(\tilde{n}_{2y}) \quad (5.35a)$$

Записав аналогичное представление для $M_{M_2 M_4}^{M_2 M_4}$, обозначая его скалярные амплитуды как $\bar{\varphi}(j_{AB} j_{xy} L \lambda)$, нетрудно установить, пользуясь (5.33), что

$$\bar{\varphi}(j_{AB} j_{xy} L \lambda) = g(\tilde{E}_{xy}) (-1)^{j_2 + j_3 - j_{AB} - j_A + 2j_B} \sqrt{(2j_A+1)(2j_2+1)} \times \\ \times \left\{ \begin{array}{c} j_A \ j_B \ j_{AB} \\ j_2 \ j_1 \ j_3 \end{array} \right\} \bar{f}(j_{12} = j_{AB}, j_{xy}, L, \lambda), \quad (5.36)$$

если в разложении (5.35) амплитуды реакции (5.32) имеется член с $j_{12} = j_{AB}$ и такими же L и λ . В противном случае

$$\bar{\varphi}(j_{AB} j_{xy} L \lambda) = 0.$$

Видно, что существует простая связь между скалярными амплитудами реакций $A(x, y)B$ и $1+x \rightarrow 2+y$. Они пропорциональны друг другу. В этом смысле динамика процесса не запутывает дело. Однако важно то, что коэффициент пропорциональности зависит от j_{12} и поэтому отношение амплитуд

$\bar{\varphi}(j_{AB} j_{xy} L \lambda)$ с разными j_{AB} не равно просто тому же отношению величин $\bar{f}(j_{12} = j_{AB}, j_{xy}, L, \lambda)$.

Если известны все амплитуды \bar{f} , то, используя соотно-

шение (5.36), можно было бы определить все $\bar{\varphi}$ и, следовательно, поляризационную матрицу плотности для реакции $A(x,y)B$, причем условие $Spp = 1$ позволило бы исключить трудновычисляемую величину $\bar{g}(\tilde{t}_{xy})$. Однако реально бывают известны не скалярные амплитуды \bar{f} , а некоторые их комбинации, выражющиеся через поляризацию или угловое распределение в реакции (5.32). Тогда, вообще говоря, мы не можем по таким ограниченным данным определить поляризационные эффекты в процессе $A(x,y)B$. Это можно сделать лишь в некоторых случаях, причем непременным условием является то, чтобы были отличны от нуля только амплитуды $\bar{f}(j_{12}, j_{xy}, \lambda)$ с каким-то одним (или максимум с двумя) значениями j_{12} (это лишь необходимое условие).

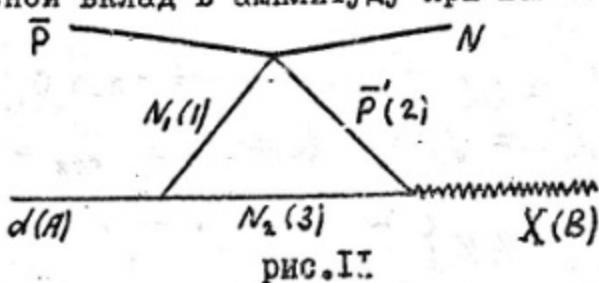
Легко видеть, что если отличны от нуля $\bar{f}(j_{12}, j_{xy}, \lambda)$ только с одним значением j_{12} , причем для реакции $A(x,y)B$ разрешено значение $j_{Ag} = j_{12}$, то амплитуды φ и f с точностью до постоянного множителя совпадают. Отсюда следует, что поляризация вылетающих частиц y и выражение сечения на поляризованных начальных частицах X через сечение на неполяризованных (т.е. величины \bar{P}_y и $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_x / (\frac{d\sigma}{d\Omega})_0$) одинаково для реакций $A(x,y)B$ и $1+x \rightarrow 2+y$.

Экспериментальные данные по поляризации протонов $\bar{P}_p(\theta)$ в реакции $d(\alpha, p)t$ и в реакции $He^3(\alpha, p)He^4 (\bar{P}_p(\theta))$ показывают, что при энергии $E_\alpha = 10$ Мэв угловые зависимости $\bar{P}_p(\theta)$ и $P_p(\theta)$ подобны. Было высказано предположение (Н.И.Заика, О.Ф.Немец, А.М.Ясногородский), что основной вклад в амплитуду реакции $He^3(\alpha, p)He^4$ дает диаграмма рис. 10, т.к., казалось бы, в этом случае реакция $d(\alpha, p)t$,

происходящая в четырехлучевой вершине, должна в основных чертах определять поляризацию протонов в реакции $\text{He}^3(d,p)\text{He}^4$.

Анализ, проведенный нами выше, показывает, что положение сложнее. В разложении амплитуды процесса $d + d \rightarrow t + p$ имеется 18 скалярных амплитуд с $j_{dc} = 1/2$ и $3/2$. Так как спин He^4 равен нулю, то в реакции $\text{He}^3(d,p)\text{He}^4$ возможно только единственное значение $j_{\text{av}} = j_{\text{He}^3} = 1/2$. Поэтому простое соотношение между $\tilde{P}_p(\theta)$ и $P_p(\theta)$ может осуществляться только если в амплитуде реакции $d(d,p)t$ из 18 скалярных амплитуд реально отличны от нуля лишь шесть с $j_{dt} = 1/2$. Тогда просто $\tilde{P}_p(\theta) = P_p(\theta)$. Указанное ограничение на амплитуду реакции $d(d,p)t$ представляется весьма искусственным, хотя, учитывая бедность экспериментальной информации об этом процессе, совсем исключить такую возможность нельзя. Встает, впрочем, еще дополнительный вопрос о законности вынесения амплитуды процесса $d(d,p)t$ за знак интеграла при расчете диаграммы рис. II. Мы не будем его обсуждать, ограничиваясь ссылкой на работу [19].

Перейдем к рассмотрению "треугольного" механизма образования гипотетических квазиндерных мезонных резонансов в системе нуклон-антинуклон [21] (О.Д.Далькаров, В.Б.Мандельцвейг, В.А.Хангулян, И.С.Шапиро, частное сообщение). Диаграмма рис. II, в которой происходит замещение одного из нуклонов дейтрона антинуклоном с образованием тяжелого мезона X , может давать основной вклад в амплитуду при малых энергиях (порядка



нескольких десятков Мэв), если регистрируется быстрый нуклон и медленный мезон.

Ограничимся случаем S -резонансов, т.е. считаем, что квазидерная система NN' находится в S -состоянии. Тогда в обеих трехлучевых вершинах диаграммы рис. II орбитальные моменты равны нулю, и становится справедливым соотношение (5.36). В вершине $N + \bar{p} \rightarrow N + \bar{p}'$ возможны значения $j_{12} = 0, 1$ и $L = 0, 1, 2$, причем $L = 1$ может иметь место как при $j_{12} = 0$ (но $j_{\text{пн}} = 1$), так и при $j_{12} = 1$. Поэтому поляризация определяется скалярными амплитудами $\bar{f}(j_{12}, j_{xy}, L, \lambda)$ с $j_{12} = 0, 1, 2$, которые переходят в амплитуды $\bar{\varphi}$ с разными коэффициентами и простая связь поляризационных явлений в NN' -рассеянии и процессе $\bar{p} + d \rightarrow N + X$ отсутствует.

К счастью, известно, что поляризационные эффекты в упругом NN' -рассеянии определяются в основном центральными и тензорными силами [22], т.е. амплитуды с $L = 1$ очень малы.

Пренебрежем ими. Остается амплитуды

$$\bar{f}_1 = \bar{f}(j_{12}=0, j_{xy}=0, L=0, \lambda=0), \quad \bar{f}_4 = \bar{f}(j_{12}=1, j_{xy}=1, L=0, \lambda=0), \quad (5.37)$$

$$\bar{f}_6 = \bar{f}(1, 1, 2, \lambda=-1), \quad \bar{f}_7 = \bar{f}(1, 1, 2, \lambda=0), \quad \bar{f}_8 = \bar{f}(1, 1, 2, \lambda=1).$$

и соответственно для реакции образования мезона X .

$$\bar{\varphi}(j_{AB}, j_{xy}, \lambda) = g(\tilde{\epsilon}_{xy}) (-1)^{j_{AB}} \sqrt{6} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & j_x & j_{AB} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\} \bar{f}(j_{\text{пн}}=j_{AB}, j_{xy}, L, \lambda). \quad (5.38)$$

Спин мезона X может быть равен либо 0, либо 1. В первом случае $j_{AB} = j_{xy} = 1$ (значение $j_{AB} = 0$ отсутствует) и учитывая, что $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, получаем

$$\bar{\varphi}(1j_{xy}L\lambda) = -g(\tilde{E}_{xy})\bar{f}(1j_{xy}L\lambda)$$

(5.39)

Во втором случае j_{AB} может принимать значение 0, I, 2, однако реально амплитуд с $j_{AB} = 2$ нет, т.к. отсутствует значение $j_{12} = 2$. Если $j_{AB} = 0$, а $j_x = I$, то

$$\bar{\varphi}(0j_{xy}L\lambda) = g(\tilde{E}_{xy})\bar{f}(0j_{xy}L\lambda).$$

(5.40)

На самом деле всего одна такая амплитуда $\bar{\varphi}(0000)$.

Для $j_{AB} = I$, $j_x = I$, учитывая, что $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{3}$, получаем

$$\bar{\varphi}(1j_{xy}L\lambda) = g(\tilde{E}_{xy})\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{f}(1j_{xy}L\lambda).$$

(5.41)

Отметим, что амплитуды $\bar{\varphi}(0000)$ и $\bar{\varphi}(II00)$ не участвуют в образовании величин $\overline{|M|^2} T_y^{(II)M}$ и $\overline{|M|^2} T_x^{(II)M}$, т.к. псевдовектор поляризации нельзя образовать ни из двух нулевых моментов, ни из двух моментов, один из которых равен нулю, а другой - двойке. Здесь как раз существенно, что отсутствуют скалярные амплитуды с $L = I$.

Дальнейшее - дело простой техники. Пользуясь разложениями типа (5.35) для амплитуд реакций $NN \rightarrow NN$ и $\bar{N} + d \rightarrow N + X$, а также используя (3.25), (5.39), (5.41) и то обстоятельство, что в лаб. системе

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{n.c.}}{\left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega}\right)_{n.c.}} = \frac{|M|^2}{|\tilde{M}|^2} \quad *)$$

приходим к следующему результату:

если спин мезона X равен 0 ($j_s = 0$) , то

$$P_N \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{n.c.} = \frac{1}{3} / g(\tilde{\epsilon}_{\bar{p}p}) / ^2 \left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} \right) \tilde{P}_N ; \quad (5.42)$$

если спин мезона X равен 1 ($j_s = 1$) , то

$$P_N \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{n.c.} = \frac{2}{3} / g(\tilde{\epsilon}_{\bar{p}p}) / ^2 \tilde{P}_N \left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} \right)_{n.c.} , \quad (5.43)$$

$$P_X = \frac{1}{2} P_N , \quad (5.44)$$

где $\tilde{P}_N, \left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega} \right)_{n.c.}$ - поляризация и угловое распределение нуклонов в упругом NN -рассеянии, вычисленные в работе [22].

Таким образом, измеряя поляризацию нуклонов и мезонов, можно сделать определенные заключения о спине образующихся мезонов.

Величина $|g(\tilde{\epsilon}_{\bar{p}p})|^2$ вычислена в работе [23].

*) Строго говоря, это справедливо только при малых углах между \bar{p} и N и при малой энергии связи мезона X . В противном случае появляется дополнительный кинематический множитель.

По поводу формул (5.42)-(5.44) следует сделать два замечания. Во-первых в случае частиц со спинами

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{л.с.}} \neq g^2 \left(\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega}\right)_{\text{л.с.}}$, как это было в случае бесспиновых частиц. Например, видно, что при $j_X = 0$ формфактор $f_i = f(0000)$ дает вклад в $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\Omega}$ и совсем не входит в $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

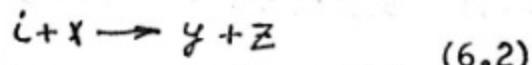
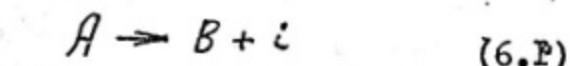
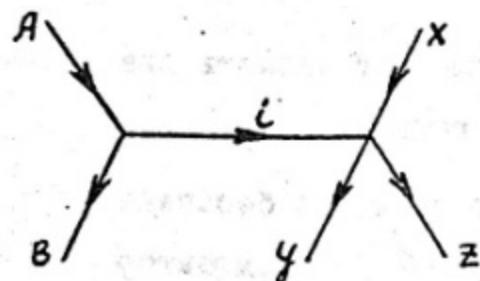
Во-вторых, хотя из (5.42)-(5.44) не видно явно, что $|P_N| < 1$, более подробная запись этих соотношений через амплитуды f позволяет легко убедиться в выполнении этого условия.

Иногда можно получить простые соотношения, связывающие поляризационные явления в реакциях $A(x,y)B$ и $I+X \rightarrow 2+y$ (см. диаграмму рис. 8) даже если ℓ_{13} и ℓ_{13} не равны нулю. Можно показать, что поляризация частиц y и угловое распределение с поляризованными частицами X (точнее его отношение к $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$) у обеих реакций одинаковы, если спин одной из частиц I или 2 равен $1/2$, а другая из этих частиц обладает нулевым спином. Такой пример будет рассмотрен для упругого $p\sigma$ -рассеяния под большими углами в разделе 7.

§ 6. Поляризационные эффекты в реакциях выбивания

6а. Асимметрия в реакциях на поляризованной мишени

Перейдем к рассмотрению поляризационных эффектов в реакциях выбивания [24]. Начнем со случая, когда амплитуда реакции $A+x \rightarrow B+y+z$ (3.23) описывается полюсной диаграммой рис. 4. Если обозначить через $\Gamma_{M_A}^{M_B M_C}$ и $f_{M_B M_C}^{M_A}$ элементы М-матрицы процессов



то спиновая структура амплитуды дается формулой (4.4), которую мы перепишем в упрощенном виде, обозначив буквой G множитель, не зависящий от проекций спинов:

$$M_{\mu_A \mu_x \mu_z}^{\mu_b \mu_y \mu_2} = G \sum_{\mu_i} \Gamma_{\mu_A}^{\mu_i} f_{\mu_i \mu_x}^{\mu_y \mu_2} \quad (6.3)$$

Для амплитуды ядерного развала используем разложение (2.25)

$$\Gamma_{\mu_A}^{\mu_B \mu_i} = \sum_{je} \Gamma(je) \sum_{\mu_m} C_{j; \mu_i j_e \mu_B}^{i \mu_m} C_{j; \mu_m e m}^{\mu_A} Y_{em}(\vec{n}_{je}) \quad (6.4)$$

В дальнейшем, как правило, несущественные для нас спиновые индексы μ_x, μ_y, μ_z в формулах будут опускаться. В выражениях, квадратичных по амплитуде f процесса (6.2), будет подразумеваться суммирование по этим индексам.

Формулы для вычисления поляризации и асимметрии приводились ранее (3.25) и (3.39). При их использовании возникают выражения вида $f^{\mu_i} (f^{\mu_i})^*$. Такие произведения выражаются через $T_i^{(i)m}$ — поляризационные моменты частицы i , возникающей в реакции



обратной процессу (6.2), который соответствует правой вершине диаграммы рис. 4. Действительно, если обозначить

через φ амплитуду реакции (6.5), то из Т-инвариантности (2.55) следует, что

$$f^{M_i} (f^{M_i})^* = (-1)^{j_i + M_i - j_i - M_i} \varphi^{-M_i} (\varphi^{-M_i})^* \quad (6.6)$$

Отсюда, принимая во внимание, что $Sp(\varphi\varphi^*) = Sp(f f^*)$, получаем

$$\begin{aligned} f^{M_i} (f^{M_i})^* &= \frac{Sp(f f^*)}{2j_i + 1} \left\{ \delta_{M_i, M_i} - 3(-1)^M C_{j_i, M_i, 1-M} T_i^{(1)M} + \right. \\ &\quad \left. + 5(-1)^M C_{j_i, M_i, 2-M} T_i^{(2)M} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Если частицы X, Y, Z , участвующие в реакции (I), релятивистские, то под $T_i^{(1)M}$ следует понимать поляризационные моменты в системе покоя частицы i .

Приведем еще одно соотношение, полезное при конкретных расчетах

$$\begin{aligned} Y_{em_1}(\vec{n}) Y_{em_2}^*(\vec{n}) &= \frac{1}{4\pi} \delta_{m_1, m_2} + (-1)^e \sqrt{\frac{2e+1}{4\pi c}} \times \\ &\quad \times \sum_{L>0} C_{coeo}^{L0} C_{em_1, LM}^{em_2} Y_{LM}^*(\vec{n}) \end{aligned} \quad (6.8)$$

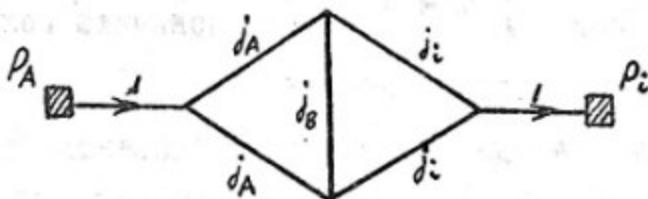
В дальнейшем для простоты ограничимся таким случаем, когда в разложении (6.4) отличен от нуля лишь один формфактор $F(\gamma e)$ с определенными значениями J и e .

Асимметрия A получается путем применения соотношений (3.39), (6.3), (6.4), (6.7) и (6.8) и упрощения получающейся

суммы коэффициентов Клебша-Гордана при помощи графического метода. Величина A выражается через инвариантные относительно вращений комбинации поляризационных моментов $T_i^{(4)M}$ частиц i в процессе (6.5) (имеется в виду, что $T_i^{(4)M}$ берется для той же конфигурации импульсов частиц x, y, z , которая осуществляется в реакции $A + x \rightarrow B + y + z$, только направления импульсов заменены на обратные), поляризации \vec{P}_i ядер мишени и тензоров, образованных из компонент вектора \vec{H}_{iB} . В простейших случаях от правой вершины диаграммы входит лишь поляризация \vec{P}_i частиц i в реакции (6.5).

Приведем результаты для нескольких частных случаев.

А. Пусть орбитальный момент относительного движения частиц B и i в ядре A равен нулю. Спин полюсной частицы может быть произвольным. Схема суммирования выглядит так



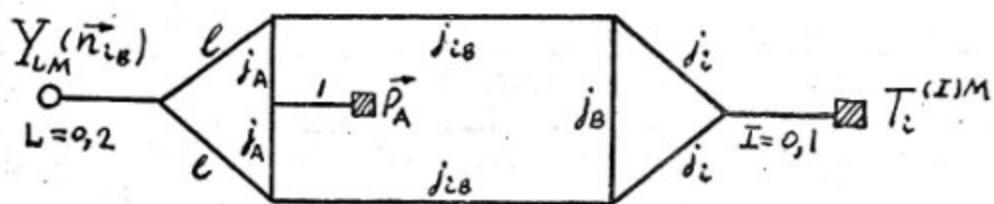
Отсюда видно, что $A \sim (\vec{P}_A \vec{P}_i)$. Точный подсчет всех множителей дает

$$A = 3 \left[\frac{(2j_i+1)j_i(2j_A+1)j_A}{(j_i+1)(j_A+1)} \right]^{1/2} (-1)^{j_i+j_A+j_B} \begin{Bmatrix} j_i & j_i & j_i \\ j_B & j_A & j_A \end{Bmatrix} (\vec{P}_A \vec{P}_i). \quad (6.9)$$

Для $j_i = 1/2$ отсюда следует, что

$$A = \begin{cases} -(\vec{P}_A \vec{P}_i) & \text{при } j_B = j_A - \frac{1}{2} \\ \frac{j_A}{j_A+1} (\vec{P}_A \vec{P}_i) & \text{при } j_B = j_A + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.10)$$

Б. При $j_i = 0$ асимметрия всегда отсутствует, т.к. в разложение (6.8) входят только четные L , и величине \vec{P}_A не с чем свернуться. Рассмотрим случай $j_i = I/2$ и произвольного ℓ . Теперь кроме комбинации $(\vec{P}_A \vec{P}_i)$ имеется еще одна скалярная комбинация $(\vec{P}_i \vec{n}_{iB})(\vec{P}_A \vec{n}_{iB})$. Схема суммирования такова



Т.к. $j_i = I/2$, то $I = 0, I$; реально отличны от нуля, как легко видеть, только комбинации с $I = 1$. В сумме (6.8) теперь будут давать отличный от нуля вклад $L = 0$ и 2 . Член, соответствующий $L = 0$, имеет такой же вид, как и в предыдущем случае. При $L = 2$ появляется упомянутая выше новая комбинация, т.к. составляется скаляр из $Y_{2m}(\vec{n}_{iB})$, \vec{P}_i и \vec{P}_A . Общий результат таков

$$A = (-1)^{\ell + j_B - j_A - \frac{1}{2}} \left[\frac{2j_A(2j_A+1)}{j_A+1} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \gamma & \gamma & j_B \end{Bmatrix} \times \quad (6.11)$$

$$\times \sqrt{2} \begin{Bmatrix} j_A & j_A & 1 \\ \gamma & \gamma & e \end{Bmatrix} (\vec{P}_A \vec{P}_i) + (-1)^{j_A + \gamma} 3\sqrt{3}(2\ell+1) C_{eoeo}^{20} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_A & \gamma & \ell \\ j_A & \gamma & e \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \left[(\vec{P}_i \vec{n})(\vec{P}_A \vec{n}) - \frac{1}{3} \vec{P}_A \vec{P}_i \right].$$

Информация, которую можно получить из экспериментального исследования асимметрии, в этом случае обширнее, т.к. можно независимо определять коэффициенты α и β в соотношении

$$A = \alpha (\vec{P}_i \cdot \vec{P}_A) + \beta (\vec{P}_i \cdot \vec{n}) (\vec{P}_A \cdot \vec{n}). \quad (6.IIa)$$

В таблице приведены численные значения α и β , следующие из (6.II) для $\ell = I$ и небольших значений спинов частиц A и B.

N°	j_A	J	j_B	α	β
1		$I/2$	{ 0	I	-2
2	$I/2$		{ 1	$-I/3$	$2/3$
3			{ 1	$-2/3$	$I/3$
4		$3/2$	{ 2	$2/5$	$-I/5$
5		0	$I/2$	0	0
6		I	{ $I/2$	0	$-3/2$
7	I		{ $3/2$	0	$3/4$
8		2	{ $3/2$	$-9/10$	$9/20$
9			{ $5/2$	$3/20$	$-3/40$

Видно, что величины α и β сильно меняются в зависимости от j_B и J , что позволяет четко определять из опыта величину спина частицы B. Заметим, что поляризация \vec{P}_i , например, в pp -рассеянии довольно велика ($|\vec{P}_i| \sim 0,3 \div 0,5$ при энергии налетающих протонов от 200 до 500 Мэв).

Открывающаяся здесь возможность определения спина остаточного ядра B особенно интересна в связи с тем, что имеются указания на образование в реакциях типа $(p, 2p)$ и (e, ep) высоковозбужденных уровней остаточных ядер, которые интерпретируются как дырочные уровни $(1S)^{-1}$ и $(1P)^{-1}$.

Для подтверждения этой интерпретации важно знать спины этих уровней. Однако в случае высоковозбужденных уровней трудно получить необходимые сведения путем исследования других реакций. Пока единственным предложенным методом является исследование асимметрии в реакциях $(P, 2\rho)$ или $(e, e\rho)$ с образованием таких состояний [24]. Правда, для реакции $(e, e\rho)$ величина P_i очень мала ($\sim 1/13?$). Поэтому здесь кроме поляризованной мишени требуется и пучок поляризованных электронов. Соответствующие формулы являются обобщением (6.9) и (6.II) и приведены в работе [24].

В. В случае $j_i = 1$ кроме скалярных величин, входящих в формулу (6.II), в выражении для асимметрии могла бы присутствовать комбинация, содержащая квадрупольяризацию $T_i^{(2)m}$ частиц

$$\sum_{k,m=1}^3 [\vec{n}_{iB} \vec{P}_A]^k n_{iB}^m T_i^{km}$$

(здесь индексы K и m относятся к декартовым координатам). Однако оказывается, что если отличен от нуля лишь один форм-фактор в распаде $A \rightarrow B + c$, то коэффициент при указанной комбинации равен нулю, т.к. в нем содержится θj -символ

$$\left\{ \begin{array}{l} j_A \quad J \quad e \\ j_A \quad J \quad e \\ 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right\}$$

Таким образом общая структура выражения для асимметрии остается такой же, как в (6.II), меняется лишь значение коэффициентов.

66. Поляризация и квадрупольяризация остаточных ядер

Схема вычисления поляризационных моментов остаточных ядер та же, что и для асимметрии, только вместо (3.39) используем (3.25). Так как графики суммирования полностью аналогичны уже рассмотренным, просто приведем результаты.

A. Пусть $\ell = 0$. Спин j_i произволен. Тогда

$$\vec{P}_B = \left[\frac{(2j_i+1)j_i(2j_B+1)(j_B+1)}{(j_i+1)j_B} \right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{j_A+j_B+j_i-1} \begin{Bmatrix} 1 & j_i & j_i \\ j_A & j_B & j_B \end{Bmatrix} \vec{P}_i. \quad (6.12)$$

Для $j = 1/2$ имеем

$$\vec{P}_B = \begin{cases} \frac{j_B+1}{3j_B} \vec{P}_i & \text{при } j_B = j_A + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \vec{P}_i & \text{при } j_B = j_A - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.13)$$

В этом же случае ($\ell = 0$) квадрупольяризация ядер B пропорциональна квадрупольяризации частиц i в реакции (6.5):

$$T_B^{(2)M} = (-1)^{j_A+j_B-j_i} \sqrt{(2j_B+1)(2j_i+1)} \begin{Bmatrix} j_i & j_i & 2 \\ j_B & j_B & j_A \end{Bmatrix} T_i^{(2)M} \quad (6.14)$$

B. Пусть $j_i = 0$. Тогда поляризация ядер B равна нулю, но они, вообще говоря, квадрупольаризованы потому, что обладают некоторой квадрупольяризацией ядра B , образующиеся при рас-
 $A \rightarrow B+i$, если он разрешен законом сохранения энер-

$$T^{(2)M} = \frac{1}{2} \sqrt{4\pi (2j_B + 1)} (2e+1) C_{eeeo}^{20} (-1)^{j_A + j_B} \left\{ \begin{matrix} e & e & 2 \\ j_B & j_B & j_A \end{matrix} \right\} Y_{2M}^* (\vec{n}_{iB})$$

(6.15)

В. Рассмотрим случай $j_i = 1/2$, ℓ произвольно. При этом кроме члена, пропорционального \vec{P}_i , в выражение для поляризации \vec{P}_B может входить псевдовектор $(\vec{n}_{iB} \vec{P}_i) \vec{n}_{iB}$:

$$\vec{P}_B = (-1)^{j_A - \frac{1}{2}} \left[\frac{2(2j_A + 1)(j_B + 1)}{3j_B} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ j & j_B & j_B \end{matrix} \right\} \vec{P}_i -$$

(6.16)

$$- 3 \left[\frac{(j_B + 1)(2j_B + 1)}{j_B} \right]^{\frac{1}{2}} (2j+1)(2e+1) C_{eeeo}^{20} (-1)^{j_A} \left\{ \begin{matrix} e & e & 2 \\ j & j & j_A \end{matrix} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} j & \frac{1}{2} & j_B \\ j & \frac{1}{2} & j_B \end{matrix} \right\} [(\vec{n}_{iB} \vec{P}_i) \vec{n}_{iB} - \frac{1}{3} \vec{P}_i].$$

Формула (6.16), переписанная в виде

$$\vec{P}_B = \tilde{\alpha} \vec{P}_i + \tilde{\beta} (\vec{n}_{iB} \vec{P}_i) \vec{n}_{iB},$$

(6.16a)

илюстрируется таблицей для $\ell = 1$ и небольших значений спинов частиц j_A и j_B . Из таблицы видно, что коэффициенты $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ сильно зависят от значений спинов участвующих в реакции частиц.

В случае $j_i = 1/2$ могут быть две комбинации, из которых образуется тензор квадрупольной поляризации T_B^{km} частиц B (индексы K и m относятся к осям координат в декартовой системе): во-первых, T_i^{km} , во-вторых, $[\vec{P}_i \vec{n}]^k n^m$. Однако коэффициент при последнем члене равен нулю из-за того, что в нем со-

держится 9 / -символ

$$\left\{ \begin{array}{c} J \frac{1}{2} j_B \\ J \frac{1}{2} j_B \\ 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right\}$$

N^{\pm}	j_A	J	j_B	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\delta}$	e
I	0	I	$\left\{ \begin{array}{c} I/2 \\ 3/2 \end{array} \right.$	-I	2	0
2			$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right.$	$2/3$	$-I/3$	$-2\sqrt{e}/5$
3			$\left\{ \begin{array}{c} I/2 \\ 3/2 \end{array} \right.$	0	0	0
4	$I/2$		$\left\{ \begin{array}{c} I \\ 2/3 \end{array} \right.$	$2/3$	0	0
5			$\left\{ \begin{array}{c} I \\ -2/3 \end{array} \right.$	I		$-\sqrt{25e}/5$
6			$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3/5 \end{array} \right.$	$3/5$	$-3/I0$	$-\sqrt{70e}/25$
7			$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ I/2 \end{array} \right.$	I	0	0
8			$\left\{ \begin{array}{c} I/2 \\ 3/2 \end{array} \right.$	0	-I	0
9	I		$\left\{ \begin{array}{c} 3/2 \\ 5/2 \end{array} \right.$	$I/2$	$I/6$	$\sqrt{e}/5$
10			$\left\{ \begin{array}{c} 3/2 \\ 7/I0 \end{array} \right.$	$7/I0$	$-I7/30$	$-7\sqrt{e}/25$
II			$\left\{ \begin{array}{c} 5/2 \\ I4/25 \end{array} \right.$	$I4/25$	$-7/25$	$-2\sqrt{14e}/25$

Остается

$$T^{(2)M} = \frac{1}{5} \sqrt{4\pi(2j_B+1)} (2e+1)(2J+1) C_{eoeo}^{20} \left\{ \begin{array}{c} eee_2 \\ J J j_A \end{array} \right\} \times \quad (6.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} J J 2 \\ j_A j_A \frac{1}{2} \end{array} \right\} (-1)^{j_A-j_B-\frac{1}{2}} Y_{2M}^*(\vec{n}_{iB}) = e Y_{2M}^*(\vec{n}_{iB}).$$

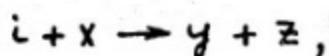
В таблице приведены значения коэффициента e для $\ell=1$ и наибольших величин спинов j_A и j_B .

6в. Поляризация быстрых частиц

Из формул (6.8) и (6.4) следует, что

$$\sum_{M_A M_B} M_{M_A M_B}^{M_0 M_1 M_2} \left(M_{M_A M_B}^{M_0 M_1 M_2} \right)^* = \tilde{\rho}_{M_0 M_1 M_2} \left(\tilde{\rho}_{M_0 M_1 M_2} \right)^*, \quad (6.18)$$

где $\tilde{\rho}_{M_0 M_1}$ - спиновая матрица плотности частиц i , образующихся в распаде $A \rightarrow B + i$. Поэтому поляризационные эффекты в реакции (3.23), которые относятся к частицам, входящим в правую вершину диаграммы (поляризация и квадрупольяризация частиц Y и Z , асимметрия вылета этих частиц в реакциях с поляризованным пучком частиц X), такие же, как в реакции



происходящей на частицах i , обладающих матрицей плотности $\tilde{\rho}_{M_0 M_1}$, в которой отличны от нуля поляризационные моменты четных порядков:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i^{LM} &= \tilde{\rho}_{M_0 M_1} C_{j_0 M_0 LM}^{j_1 M_1} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2L+1} \frac{\sqrt{2j_0+1}}{\left(\sum_{je} |\Gamma(je)|^2\right)^{1/2}} \times \\ &\times \sum_{je'ee'} \Gamma(je) \Gamma^{*}(j'e') \times (-1)^{j_A + j_B - j - j' + j_0} \left[\Gamma(2e+1)(2e'+1)(2j+1)(2j'+1) \right]^{1/2} \\ &\times C_{eoe'e'o}^{j_0} \left\{ \begin{matrix} e'e_L \\ j_0 j_1 j_A \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j' j'_L \\ j_0 j_1 j_B \end{matrix} \right\} Y_{LM}^*(\vec{n}_{iB}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

В частности, если в вершине $A \rightarrow B + i$ отличен от нуля лишь один формфактор, то соответствующие поляризационные мо-

менты частицы i есть

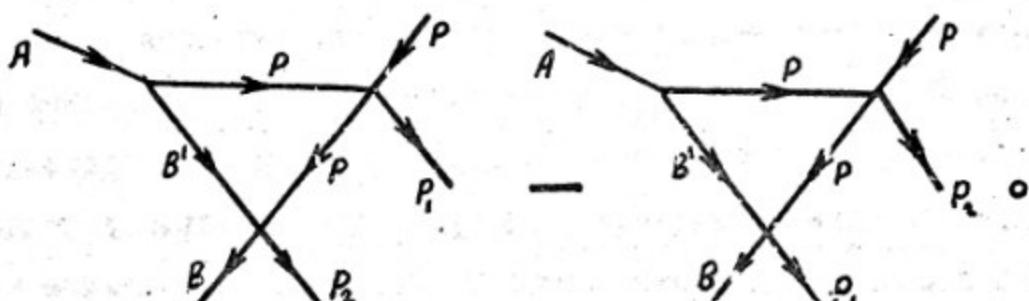
$$\widetilde{T}_i^{(L)M} = \frac{\sqrt{4\pi(2j_i+1)}}{2L+1} (-1)^{j_A+j_B-2j_i+j_L} (2e+1)(2j_i+1) \times \\ (6.20)$$

$$^* C_{eoeo}^{lo} \left\{ \begin{matrix} e & e & L \\ j & j & j_A \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma & \gamma & e \\ j_1 & j_2 & j_B \end{matrix} \right\} Y_{LM}^*(\bar{n}_{iB}).$$

В случае, если $j_i = 0, 1/2$ или $\ell = 0$, или $\gamma = 0, 1/2$, все $\widetilde{T}_i^{(L)M} = 0$ ($L > 0$) и поляризация частиц Y и Z должна быть такой же, как в процессе (6.2) на неполяризованных частицах i . Но уже при $j_i = 1$ частицы будут обладать отличной от нуля эффективной квадрупольизацией (пропорциональной $Y_{2M}^*(\bar{n}_{iB})$) и, например, в поляризации частиц Y кроме члена, направленного по \bar{n}' (\bar{n}' - нормаль к плоскости реакции (6.2)), появится член, пропорциональный $(\bar{n}' \bar{n}_{iB}) \bar{n}_{iB}$.

6г. Учет других диаграмм

Поляризационные эффекты рассматривались выше при учете только полисной диаграммы. Вклад более сложных диаграмм в районе малых импульсов остаточного ядра можно аппроксимировать добавочным членом, который считается независящим от инвариантных переменных типа $\widetilde{S}_{ik}, \widetilde{t}_{ke}$, но обладает определенной спиновой структурой. В работе [25] при рассмотрении реакций ($P, 2P$) эта структура бралась такой же, как у простейшей треугольной диаграммы рис. 6, рассмотренной в разделе 4.



Так как в конце имеются две тождественные частицы, нужно провести антисимметризацию по индексам χ и $\bar{\chi}$, т.е. взять разность соответствующих диаграмм. Поэтому к членам вида (4.13) и (4.17) добавятся аналогичные члены, в которых χ и $\bar{\chi}$ поменяны местами и соответственно $\tilde{n}_k \rightarrow \tilde{n}_k$ и $\tilde{n} \rightarrow \tilde{n}$, \tilde{n}_k и \tilde{n} определены формулами (4.14) и (4.16),

$$\tilde{\tilde{n}}_k = \frac{\vec{p}_k + \vec{p}_\chi}{|\vec{p}_k + \vec{p}_\chi|}, \quad \tilde{\tilde{n}} = \frac{[\vec{p}_x \vec{p}_z]}{|[\vec{p}_x \vec{p}_z]|}. \quad (6.21)$$

Учет добавочного члена в амплитуде усложняет соотношения между поляризационными явлениями и делает их богаче. Например, в компланарном несимметричном случае в выражении для асимметрии появляются комбинации вида

$$[1 - (\tilde{n}_k \tilde{\tilde{n}}_k)](\tilde{n} + \tilde{\tilde{n}})\vec{P}_A, \quad ([\tilde{n}_k \tilde{n}_{\bar{\chi}}] + [\tilde{\tilde{n}}_k \tilde{\tilde{n}}_{\bar{\chi}}])\vec{P}_A. \quad (6.22)$$

В симметричном компланарном случае асимметрия должна отсутствовать (вследствие тождественности двух протонов поворот вокруг оси X на 180° не изменяет физической картины, но, с другой стороны, при этом $A \rightarrow -A$). Легко проследить, что комбинации (6.22) при этом действительно обращаются в нуль.

Можно представить такую постановку эксперимента, когда

регистрируются только ядра отдачи, т.е. известен импульс \vec{P}_s ядра B и импульс начального протона \vec{P}_x , а конечные протоны вообще не регистрируются. Тогда, очевидно, остается неопределенной одна переменная — направление импульса двух протонов в системе их центра инерции. По этому направлению автоматически проводится усреднение. Асимметрия и поляризация, даваемые в этом случае одной полюсной диаграммой, обращаются в нуль, что легко увидеть из формул (6.IIa) и (6.I6a), так как указанное усреднение отвечает усреднению по направлению поляризации \vec{P}_s в этих формулах.

При учете добавочного члена в амплитуде асимметрия и поляризация при такой постановке опыта уже не закуляются, а определяются в основном интерференцией этой добавки с полюсной диаграммой. Их можно вычислить, исходя из оценки величины добавочного члена, полученной при рассмотрении угловых распределений в реакции $(p, 2p)$ [25]. Например, анализ, проделанный для реакции $C^{12} (p, 2p) B^{II}$ при $| \vec{P}_s | = 100$ Мэв/с и угле

$\Theta_{xs} = 90^\circ$ для начальной энергии 460 Мэв (В.М.Колыбасов, Н.Я.Смородинская), показал, что можно ожидать поляризацию ядер B^{II} , равную $P = 0,65$. В ряде случаев должна быть большой и асимметрия в реакциях с $j_A \neq 0$. Таким образом, поляризационные эффекты в реакциях выбивания могут быть велики и их экспериментальное исследование дает интересную информацию о механизме реакций.

7. Спиновые эффекты и идентификация механизма реакции

Соотношения между различными поляризационными явлениями, приведенные в двух предыдущих разделах, могут использоваться, с одной стороны, для определения квантовых чисел частиц,

участвующих в реакции и, с другой стороны, для установления механизма реакции. Под последним понимается проверка того, действительно ли основной вклад в амплитуду дают те диаграммы (или добавки с той спиновой структурой, которая обсуждалась выше), которые рассматривались.

Можно думать, что поляризационные явления более чувствительны к механизму реакции, чем другие характеристики, и позволяют легче обнаружить примеси каких-либо механизмов к основному. Дело в том, что основной механизм (например полюсная диаграмма) часто приводит к равным нулю поляризации и асимметрии, и тогда поляризационные эффекты определяются его интерференцией с добавочными членами или (как мы видели на примере реакции $He^3(d,p)He^4$) просто добавочными членами.

Сейчас будут обсуждаться два вопроса. В качестве примера того, как поляризационные явления могут помочь при идентификации механизма, будет рассмотрено упругое $p\bar{d}$ -рассеяние назад. Затем мы обсудим вопрос о применимости критерия Треймана-Янга, если в реакции участвуют частицы со спином, и о том, в какой степени изотропия в распределении по углу Треймана-Янга подтверждает полюсной механизм.

7а. Упругое $p\bar{d}$ -рассеяние назад

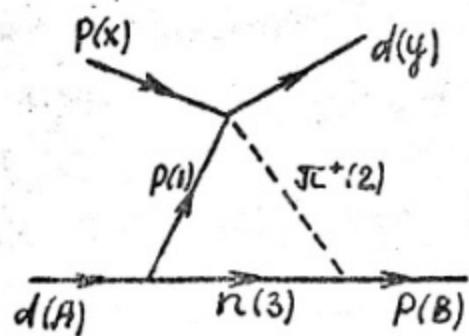


Рис. I2

Один из механизмов упругого $p\bar{d}$ -рассеяния назад, обсуждаемых в литературе [26, 27], таков: сначала на одном из нуклонов deutона происходит процесс $p + p \rightarrow \pi^+ + d$, а образовавшийся при этом π^+ -мезон захватывается вторым нуклоном (см. диаграмму

рис. I2). Такой механизм может оказаться выделенным в изобарной области энергий, т.к. там велико сечение процесса $p + p \rightarrow \pi^+ + \alpha$. Проверить, действительно ли это так, на основании измерения угловых распределений довольно сложно. Причина двоякая: с одной стороны предсказания, которые следуют из обсуждаемого механизма, чувствительны к виду волновой функции дейтрона на малых расстояниях, а он известен не слишком хорошо. С другой стороны, существуют и другие механизмы (обмен нуклоном, обмен изобарой), приводящие к пику при больших углах.

Здесь дополнительную проверку может дать измерение поляризации образующихся дейтронов или отношения дифференциального сечения реакции с поляризованными начальными протонами к дифференциальному сечению реакции с неполяризованными частицами. Оказывается, что эти величины должны быть такими же, как в реакции $p + p \rightarrow \pi^+ + \alpha$. Легче всего это увидеть так. Воспользовавшись тем, что спин π -мезона равен нулю и вынося амплитуду F реакции $p + p \rightarrow \pi^+ + \alpha$ за знак интегрирования в треугольной диаграмме (см. (5г)), запишем

$$M_{\mu_A \mu_X}^{m_B m_Y} = \sum_{\mu_1} G_{\mu_A}^{\mu_1 \mu_B} F_{\mu_1 \mu_X}^{m_Y}, \quad (7.1)$$

Причем величина $G_{\mu_A}^{\mu_1 \mu_B}$ определяется треугольным интегрированием и, как обсуждалось в разделе (4б), может зависеть только от одного выделенного направления — импульса \vec{P}_q в лаб. системе. При вычислении поляризационных эффектов, связанных с частицами X и Y , возникают комбинации вида

$$\sum_{M_A M_B} G_{M_A}^{M_A M_B} \left(G_{M_A}^{M_A M_B} \right)^* = g_{M_A M_B}, \quad (7.2)$$

которые дают "эффективную матрицу плотности" частиц I, участвующих в реакции $I + X \rightarrow 2 + Y$ (сравни с разделом 6в).

Спин частиц I (т.е. протонов) равен $I/2$, а, как известно, матрицы 2×2 можно всегда представить в виде

$$g_{M_A M_B} = (\alpha + \beta(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}))_{M_A M_B}, \quad (7.3)$$

где \vec{n} - некоторый псевдовектор. Т.к. G характеризуется лишь одним вектором \hat{P}_2 , а по проекциям M_A и M_B проведено суммирование, то $\vec{n} \equiv 0$ и $g_{M_A M_B} = \alpha \delta_{M_A M_B}$, т.е. реакция $I + X \rightarrow 2 + Y$ происходит так же, как на неполяризованных частицах I. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Таким образом, измерение поляризации дейtronов, образующихся в упругом $p\bar{d}$ -рассеянии, а также углового распределения $p\bar{d}$ -рассеяния с поляризованными протонами и сравнение этих величин с соответствующими характеристиками реакции $p+p \rightarrow \pi^+ + d$ позволит выяснить, какой вклад вносится механизмом, соответствующим диаграмме рис. I2.

7б. Критерий Треймана-Янга для частиц со спином

Амплитуда реакции (3.23) $A + X \rightarrow B + Y + Z$ в общем случае является функцией пяти инвариантных переменных, в качестве которых можно, например, выбрать S_{Ax} , t_{AB} , t_{XZ} , S_{Yz} и S_{Bz} . Если в амплитуде доминирует вклад полюсной диаграммы рис. 4, причем $j_z = 0$, остается зависимость лишь

от трех из этих переменных $t_{A\bar{B}}$, $t_{X\bar{Z}}$, $S_{Y\bar{Z}}$. Причиной является то, что амплитуда разбивается на произведение двух сомножителей, один из которых (левая вершина) зависит лишь от $t_{A\bar{B}}$, а второй (правая вершина) от $t_{X\bar{Z}}$, $S_{Y\bar{Z}}$ и, вообще говоря, вследствие виртуальности частицы ζ , от $t_{A\bar{B}}$.

Указанное обстоятельство дает простой способ экспериментального выделения полюсного механизма, который называется критерием Треймана-Янга. Переходим в антилабораторную систему отсчета (т.е. в систему, где $\vec{P}_X = 0$) и обозначим через \vec{P}_y' и \vec{P}_z' импульсы частиц γ и Z в этой системе. Легко видеть, что инварианты $t_{A\bar{B}}$, $t_{X\bar{Z}}$, $S_{Y\bar{Z}}$ не меняются при вращении плоскости (\vec{P}_y' , \vec{P}_z') вокруг направления импульса виртуальной частицы

$$\vec{P}_\zeta' = \vec{P}_A' - \vec{P}_B' = \vec{P}_y' + \vec{P}_z'. \quad (7.4)$$

Отсюда следует, что и дифференциальные сечения не должны меняться при таком вращении.

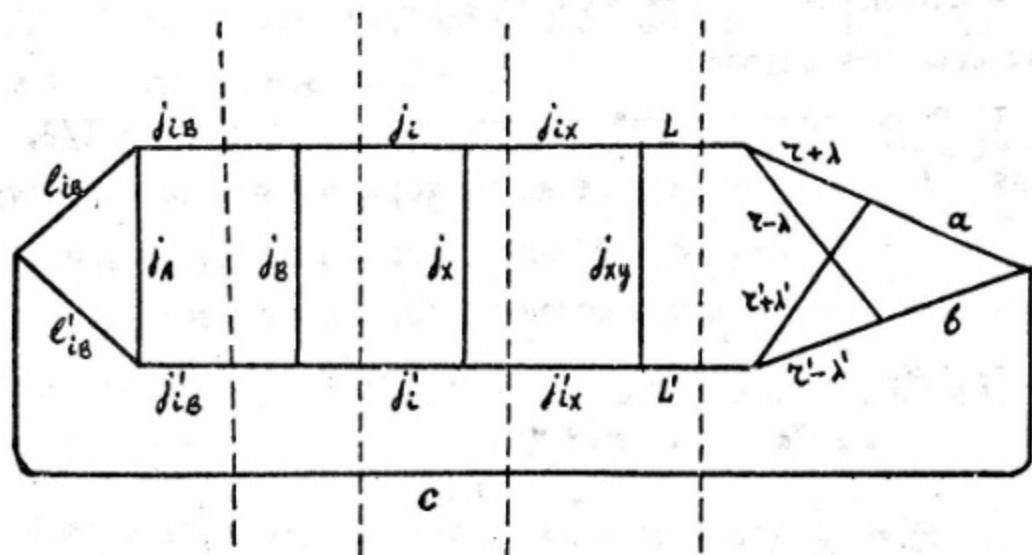
Трейман-Янговское вращение на самом деле эквивалентно азимутальному повороту в с.ц.и. реакции $\zeta + X \rightarrow \gamma + Z$, а изотропия в распределении по углу Треймана-Янга φ эквивалентна азимутальной симметрии этого процесса. (Угол Треймана-Янга определяется как угол между плоскостями (\vec{P}_y' , \vec{P}_z') и (\vec{P}_A' , \vec{P}_B'), где все импульсы берутся в антилабораторной системе).

Если спин виртуальной частицы отличен от нуля, то факторизация амплитуды уже не имеет места, т.к. в формулу (6.3) входит суммирование по спиновым состояниям M . Тем не менее существует широкий класс реакций, для которых факторизуется $|M|^2$ (3.20) и поэтому критерий Треймана-Янга попрежнему

применим.

Используя (3.20), (2.42) и (2.25), можно увидеть, что

$$\overline{|M|^2} \sim \sum_{\substack{j_{ib} \ell_{ib} j'_{ib} \ell'_{ib} j_{iz} \\ L \lambda j'_x j'_{zy} L' \lambda' abc}} \Gamma(j_{ib} \ell_{ib}) \Gamma^*(j'_{ib} \ell'_{ib}) f(j_{ix} j_{zy} L \lambda) \times \\ f^*(j'_x j'_{zy} L' \lambda') \Phi_{abc}(\vec{n}_{ix}, \vec{n}_{zy}, \vec{n}_{ib}) (2a+1)(2b+1)(2c+1) \dots \quad (7.5)$$



где Φ_{abc} — инвариантные относительно вращений комбинации векторов \vec{n}_{ix} , \vec{n}_{zy} и \vec{n}_{ib} :

$$\Phi_{abc}(\vec{n}_{ix}, \vec{n}_{zy}, \vec{n}_{ib}) = \sum_{m_a m_b m_c} (\alpha^b c) Y_{a m_a}(\vec{n}_{ix}) Y_{b m_b}(\vec{n}_{zy}) Y_{c m_c}(\vec{n}_{ib}). \quad (7.6)$$

Т.к. ℓ_{ib} и ℓ'_{ib} имеют одинаковую четность, то c обязательно четно. С другой стороны, разрезая входящий в (7.5) j -коэффициент по пунктирным линиям, мы видим, что следующие тройки моментов должны образовывать треугольники:

$$\{\ell_{iB}, \ell_{iB}', c\}, \{j_{iB}, j_{iB}', c\}, \{j_i, j_i, c\}, \{L, L', c\}.$$

Поэтому в некоторых случаях c может быть только нулем.

Тогда $\overline{|M|^2}$ факторизуется

$$\overline{|M|^2} = \frac{m_i^2}{\pi(t-t_0)^2} \left(\sum_{j_{iB} \ell_{iB}} |\Gamma(j_{iB} \ell_{iB})|^2 \right) \overline{|M'|^2}, \quad (7.7)$$

M' - амплитуда реакции $i + X \rightarrow Y + Z$.

Перечислим эти случаи:

I) Спин промежуточной частицы j_i равен 0 или $1/2$.

Случай $j_i = 0$ тривиален, т.к. факторизуется сама амплитуда.

Легко понять, почему факторизация всегда имеет место, если

$j_i = 1/2$. Опуская несущественный сейчас множитель и индексы m_i, m_y, m_z , запишем амплитуду в следующей форме

$$M_{m_A}^{m_B} = \sum_{\gamma} \Gamma_{m_A}^{\gamma m_B} f_{\gamma}. \quad (7.8)$$

(сравни (6.3)), где γ - проекция спина частицы i , принимающая значения $1/2$ и $-1/2$. Далее следуют рассуждения, полностью аналогичные тем, которые привели нас к соотношению (7.3)

$$\sum_{m_A m_B} |M_{m_A}^{m_B}|^2 = \sum_{\gamma, \gamma'} f_{\gamma} f_{\gamma'}^* \left(\sum_{m_A m_B} \Gamma_{m_A}^{\gamma m_B} \Gamma_{m_A}^{\gamma' m_B *} \right), \quad (7.9)$$

$$\sum_{m_A m_B} \Gamma_{m_A}^{\gamma m_B} \Gamma_{m_A}^{\gamma' m_B *} = (\alpha + \beta(\vec{p}_A \vec{p}_B))_{\gamma \gamma'}. \quad (7.10)$$

т.к. из импульсов частиц, входящих в вершину $A \rightarrow B + i$,

нельзя составить галилеевски-инвариантного псевдовектора, то

$$\vec{K} = 0, \text{ и}$$

$$\sum_{M_A M_B} |M_{M_A}^{M_B}|^2 = a \sum_v |f_v|^2 \quad (7.II)$$

При более высоком спине промежуточной частицы в разложение вида (7.IO) вошли бы тензоры более высокого порядка (см. (6.19)), которые в общем случае не равны нулю.

Отметим, что в случае, когда полюсная частица имеет спин I , $|M|^2$ факторизуется, если мала квадрупольяризация частиц i в реакции $y + z \rightarrow i + x$.

Если виртуальная частица i имеет спин $I/2$, но является релятивистской, то $|M|^2$ уже не факторизуется, т.к. здесь оказываются значительными эффекты релятивистскогооворота спина при переходе от лабораторной системы (т.е. системы центра масс реакции $A \rightarrow B + i$) к системе центра масс процесса $i + x \rightarrow y + z$.

Если в вершине, соответствующей процессу $A \rightarrow B + i$, основной вклад дает какой-либо один формфактор, то факторизация происходит также в следующих случаях:

$$2) f_{iB} = 0,$$

$$3) j_{iB} = 0 \text{ или } I/2.$$

В перечисленных случаях факторизация осуществляется даже тогда, когда частицы x, y, z - релятивистские (важен нерелятивизм частиц, входящих в трехлучевую вершину).

Если частицы x, y, z также являются нерелятивистскими, то добавляются еще случаи факторизации:

$$4) j_{iX} = 0 \text{ или } I/2,$$

5) $L = 0$ (отсутствие спин-орбитального взаимодействия).

Критерий Треймана-Янга применим к реакциям типа (p, pn) , $(p, 2p)$, (p, pt) , $(p, p\ell)$, к реакциям на таких ядрах A, в которых остаточное ядро B и полюсная частица ℓ находятся в S -состоянии, а также к некоторым другим процессам. Этот критерий является единственным способом установления полюсного механизма, не зависящим от конкретного вида амплитуд виртуальных процессов.

Если ни одно из условий I) - 5) не выполнено, но в амплитуде доминирует полюсная диаграмма, распределение по углу φ имеет характер полинома по $\cos \varphi$. Действительно, инвариантные формфакторы не зависят от φ . Поэтому угол φ может входить в $|M|^2$ только через скалярные произведения векторов \vec{n}_{ib} , \vec{n}_{ix} , \vec{n}_{yz} , которые входят в комбинации $\Phi_{abc}(\vec{n}_{ib}, \vec{n}_{ix}, \vec{n}_{yz})$. Легко видеть, что $(\vec{n}_{ib}\vec{n}_{ix})$ и $(\vec{n}_{ix}\vec{n}_{yz})$ не меняются при Трейман-Янговском вращении, а $(\vec{n}_{ib}\vec{n}_{yz})$ следующим образом связано с $\cos \varphi$:

$$(\vec{n}_{ib}\vec{n}_{yz}) = (\vec{n}_{ib}\vec{n}_{ix})(\vec{n}_{ix}\vec{n}_{yz}) + \sqrt{(1-(\vec{n}_{ib}\vec{n}_{ix})^2)(1-(\vec{n}_{ix}\vec{n}_{yz})^2)} \cos \varphi \quad (7.2)$$

Поэтому $|M|^2$ является, действительно, полиномом от $\cos \varphi$, причем его степень совпадает с максимальной степенью, с которой $(\vec{n}_{ib}\vec{n}_{yz})$ входит в (7.5) и не больше, чем максимальное возможное значение индекса С. Отсюда вытекает следующее ограничение на степень τ рассматриваемого полинома

$$\tau \leq \min \{2c_{ib}, [j_{ib}], [j_i], [j_{ix}], 2L\}, \quad (7.13)$$

где $[j] = 2j$ при целом j и $[j] = 2j - 1$ при полуцелом j .

Из инвариантности по отношению к отражению в плоскости, образованной импульсами частиц А, В и i в антилабораторной системе, следует, что распределение по углу Треймана-Янга должно быть симметричным относительно $\varphi = 0$ независимо от того, какими диаграммами описывается амплитуда реакции.

Критерий Треймана-Янга является необходимым условием полюсного механизма, но не достаточным. Вопрос о том, насколько убедительно изотропия распределения по углу Треймана-Янга свидетельствует о малости вклада всех диаграмм, кроме полюсной, в общем виде не решен. Проведено лишь исследование того, какой вид распределения по $\cos\varphi$ дают треугольные диаграммы [29, 30] и интерференция полюсной диаграммы с добавкой, обладающей спиновой структурой простейших треугольных диаграмм [30] (эта последняя бралась в том виде, который обсуждался в разделах 6г и 4б) для реакций типа $(p, 2p)$ и $(\pi^-, \pi^+ N)$. Рассмотрение простейших треугольных диаграмм показало, что изотропия в распределении по углу Треймана-Янга может осуществляться здесь лишь в очень редких случаях, если энергии относительного движения всех трех пар конечных частиц не очень малы.

Экспериментальное исследование реакций $(\pi^-, \pi^- p)$ на ядрах Li^6 и C^{12} показало, что, действительно, если при переданных импульсах меньше 100-150 Мэв/с распределение близко к изотропному, то при больших переданных импульсах наблюдается резкая анизотропия [33].

При учете более сложных диаграмм зависимость от $\cos\varphi$ становится сложной. Например, в работе [30] предсказывается

следующий вид распределения

$$\begin{aligned}
 \overline{|M|^2} = & K_0 + K_1 \cos \varphi + \frac{K_2 + K_3 \cos \varphi + K_4 \cos^2 \varphi}{(\alpha + \beta \cos \varphi + \gamma \cos^2 \varphi)^{1/2}} (\alpha' - \beta' \cos \varphi + \gamma' \cos^2 \varphi)^{1/2} \\
 & + \frac{K_5 + K_6 \cos \varphi + K_7 \cos^2 \varphi}{(\alpha + \beta \cos \varphi + \gamma \cos^2 \varphi)^{1/2}} + \\
 & + \frac{K_8 - K_9 \cos \varphi + K_{10} \cos^2 \varphi}{(\alpha' - \beta' \cos \varphi + \gamma' \cos^2 \varphi)^{1/2}} .
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Выражения такого типа возникают при записи скалярных произведений $\vec{n}_k \vec{n}_{i_8}$, $\vec{n}_k \tilde{\vec{n}}$ (см. разделы 6г и 4б) и т.п. через φ . Исходя из оценок добавочного члена, полученных при обработке данных по угловым распределениям в реакциях $(p, 2p)$ [25], можно ожидать для ряда реакций, например, для $Li^6(p, 2p)He^5^*$ при 460 Мэв, весьма сильное отклонение распределения по углу Треймана-Янга от изотропного. Из сравнения формы экспериментального распределения по φ с теоретическим можно получить информацию о спиновой структуре того добавочного члена, который вместе с полюсной диаграммой определяет амплитуду процесса при малых импульсах остаточного ядра.

Итак, все известные факты указывают на сильную чувствительность критерия Треймана-Янга к механизму реакции. Тем не менее для надежного установления механизма требуется проверка целого ряда предсказаний теории, для чего нужна постановка эксперимента с регистрацией всех независимых кинематических переменных с желательным выделением определенного состояния конечного ядра [16].

В заключение мне хотелось бы выразить глубокую благодарность проф. И.С.Шапиро, по инициативе которого написаны настоящие лекции, за многочисленные обсуждения и предоставленную возможность воспользоваться рядом материалов, подготовленных им для монографии по теории ядерных реакций, а также Н.Я.Смородинской и В.А.Хангуйяну за помощь в работе и ценные обсуждения.

Приложение

При суммировании коэффициентов Клебша-Гордана и различных преобразованиях их суммы большую помощь оказывает графическая техника Юриса, Левинсона и Ванагаса [8]. Изложим кратко основные правила этой техники, отсылая читателя за обоснованием и многочисленными примерами к монографии [8] (см. также [13, 31]).

I. Удобно перейти от коэффициентов Клебша-Гордана к более симметричным величинам - коэффициентам Вигнера с помощью одной из следующих формул

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = (-1)^{j_1 - j_2 + j} \sqrt{2j+1} (-1)^{j-m} \binom{j_1 \ j_2 \ j}{m_1 \ m_2 - m}, \quad (\text{II.1})$$

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm} = (-1)^{j_1 - j_2 - j} \sqrt{2j+1} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \binom{j_1 \ j_2 \ j}{-m_1 \ -m_2 \ m}. \quad (\text{II.2})$$

Коэффициент Вигнера $\binom{j_1 \ j_2 \ j_3}{m_1 \ m_2 \ m_3}$ не меняется при четной перестановке столбцов и умножается на $(-1)^{j_1 + j_2 + j_3}$ при нечетной перестановке. Далее,

$$\binom{j_1 \ j_2 \ j_3}{m_1 \ m_2 \ m_3} = (-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \binom{j_1 \ j_2 \ j_3}{-m_1 \ -m_2 \ -m_3} \quad (\text{II.3})$$

Выпишем формулы, выражющие свойства ортогональности коэффициентов Вигнера:

$$\sum_{m_1 m_2} (-1)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \binom{j_1 \ j_2 \ j_3}{m_1 \ m_2 \ m_3} \binom{j_1 \ j_2 \ j_3'}{m_1' \ m_2' \ m_3'} =$$

$$= \frac{\delta(j_3, j'_3) \delta(m_3, m'_3)}{\sqrt{2j_3+1}} (-1)^{j_3-m_3} \{j_1 j_2 j_3\},$$

где $\{j_1 j_2 j_3\}$ равно 1, если j_1, j_2, j_3 образуют треугольник, и равно нулю в противоположном случае; (II.4)

$$\sum_{j_3 m_3} (2j_3+1) (-1)^{j_3-m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & m_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{j_1-m_1} \delta(m_1, m'_1) (-1)^{j_2-m_2} \delta(m_2, m'_2)$$

2. Условимся изображать коэффициенты Вигнера ориентированным узлом, соединяющим три ориентированные линии:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \text{Diagram} \quad (II.6)$$

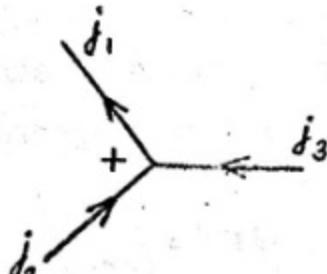
Знак "+" у узла означает, что мы считываем индексы, двигаясь против часовой стрелки. Если ставится знак "-", значит ориентация узла меняется и следует считывать индексы, двигаясь по часовой стрелке. Например

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} \quad (II.7)$$

Изменение знака у узла отвечает умножению на $(-I)^{j_1+j_2+j_3}$.

Ориентация линии j_i используется для указания знака, с которым входит в коэффициент Вигнера проекция m_i . Линия, направленная к узлу, соответствует проекции $-m_i$. Например,

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} =$$



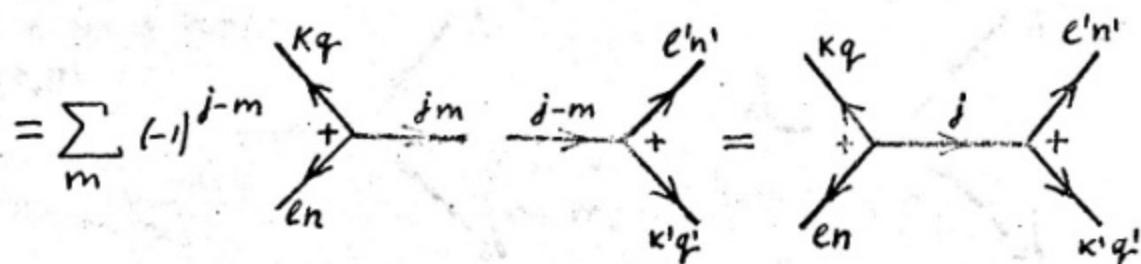
Суммированию двух коэффициентов Вигнера по повторяющемуся дважды индексу m отвечает соединение тех свободных концов линий, которым соответствует проекция m . Нужно, чтобы в одном случае проекция была m , а в другом $-m$ и присутствовал множитель $(-I)^{j-m}$, т.е. чтобы суммирование выглядело так

$$\sum_m (-I)^{j-m} (\dots j | \dots m | \dots -m \dots).$$

Сумму коэффициентов Вигнера, получающуюся из суммы коэффициентов Клебша-Гордана, всегда можно свести к такому виду, выбирая либо форму (П.1), либо форму (П.2), а также пользуясь (П.3) и тем, что $(-I)^{j+m} = (-I)^{2j} (-I)^{j-m}$.

Простейший пример графического суммирования таков

$$\sum_m (-I)^{j-m} \left(\begin{smallmatrix} K & e & j \\ q & n & m \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} K' & e' & j \\ q' & n' & -m \end{smallmatrix} \right) = \quad (\text{П.8})$$



Величины, являющиеся суммами произведений коэффициентов Вигнера, называют обычно jm - коэффициентами. Отметим, что мы можем изменить ориентацию внутренней линии j' в диаграмме jm -коэффициента, умножив выражение на $(-1)^{2j'}$. Ориентация узла, соединяющего моменты j_1, j_2, j_3 , как уже говорилось, также может быть изменена, если при этом умножить выражение на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$. Это два простейших правила преобразования диаграмм.

3. Если диаграмма jm -коэффициента не содержит незамкнутых (или, как мы будем их иногда называть, внешних) линий, т.е. проведено суммирование по всем проекциям, то такая величина является инвариантом относительно вращения системы координат и называется j -коэффициентом. Приведем диаграммы и наиболее важные свойства двух таких величин: $6j$ и $9j$ -коэффициентов.

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = + \begin{array}{c} \text{Diagram } 1: \text{ A triangle with vertices } j_1, j_2, j_3 \text{ and edges } l_1, l_2, l_3. \text{ The top edge } l_1 \text{ has an arrow pointing right. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing left. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing right. The left edge } l_1 \text{ has an arrow pointing left. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing right. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing left.} \\ \text{Diagram } 2: \text{ A triangle with vertices } l_1, l_2, l_3 \text{ and edges } j_1, j_2, j_3. \text{ The top edge } l_1 \text{ has an arrow pointing right. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing left. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing right. The left edge } l_1 \text{ has an arrow pointing left. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing right. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing left.} \end{array} + = + \begin{array}{c} \text{Diagram } 3: \text{ A triangle with vertices } l_1, l_2, l_3 \text{ and edges } j_1, j_2, j_3. \text{ The top edge } l_1 \text{ has an arrow pointing right. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing left. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing right. The left edge } l_1 \text{ has an arrow pointing left. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing right. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing left.} \\ \text{Diagram } 4: \text{ A triangle with vertices } j_1, j_2, j_3 \text{ and edges } l_1, l_2, l_3. \text{ The top edge } l_1 \text{ has an arrow pointing right. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing left. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing right. The left edge } l_1 \text{ has an arrow pointing left. The bottom edge } l_2 \text{ has an arrow pointing right. The right edge } l_3 \text{ has an arrow pointing left.} \end{array} + = + \quad (\Pi.9)$$

отличен от нуля только если следующие наборы моментов образуют треугольники:

$$\{j_1 j_2 j_3\}, \{j_1 l_2 l_3\}, \{l_1 j_2 l_3\}, \{l_1 l_2 j_3\}.$$

Свойства симметрии:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & j_\beta & j_\gamma \\ l_\alpha & l_\beta & l_\gamma \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_\alpha & l_\beta & l_\gamma \\ l_\alpha & j_\beta & j_\gamma \end{matrix} \right\} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3). \quad (\Pi.10)$$

Если один из моментов обращается в нуль,

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & 0 \end{matrix} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & 0 \end{matrix} \right\} \frac{\delta(j_1, \ell_2) \delta(j_2, \ell_1)}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}} \quad (\text{II.11})$$

Формулы для $6j$ -коэффициентов, у которых один из моментов не превосходит 2, можно найти в обзоре Эдмондса [32].

$9j$ -коэффициент

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{matrix} \right\} = + \begin{array}{c} \text{Diagram of } 9j \text{-symbol} \\ \text{with parameters } j_i, \ell_i, K_i \text{ and signs } +, -, +, - \end{array} - \quad (\text{II.12})$$

не меняется при транспортировании параметров относительно обеих диагоналей и при четной перестановке столбцов или строк, а при нечетной перестановке умножается на $(-1)^R$, где R - сумма всех левяти параметров. Из последнего свойства следует, что при равенстве двух строк или столбцов имеет место следующее соотношение:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{matrix} \right\} = 0, \text{ если } (K_1 + K_2 + K_3) \text{ - нечетно} \quad (\text{II.13})$$

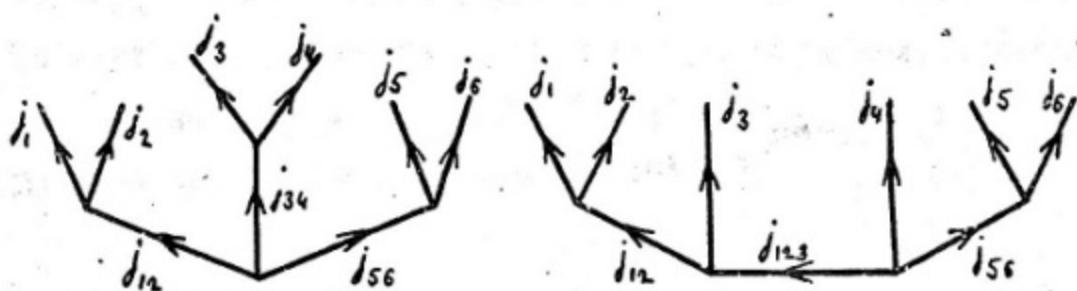
Если один из параметров равен нулю, то

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ K_1 & K_2 & 0 \end{matrix} \right\} = \frac{\delta(j_3, \ell_3) \delta(K_1, K_2)}{\sqrt{(2j_3+1)(2K_1+1)}} (-1)^{\ell_1+j_2+K_1+j_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_2 & \ell_1 & K_1 \end{matrix} \right\}. \quad (\text{II.14})$$

4. Коэффициент Вигнера связывает три момента. Аналогично ему, можно ввести обобщенный коэффициент Вигнера, связывающий произвольное число моментов. При заданном числе связываемых моментов существует несколько типов обобщенных коэффициентов Вигнера, т.к. мы можем выбрать различные схемы связи. Если обозначить схему связи буквой A , а значения промежуточных моментов через $\alpha_1, \alpha_2 \dots$, то обобщенный коэффициент Вигнера обозначается символом

$$\left(j_1 \dots j_n \atop m_1 \dots m_n \right)_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-3}}^A$$

Среди всех j_m -коэффициентов с n внешними линиями обобщенные коэффициенты Вигнера выделены тем, что они имеют минимальное число внутренних линий. Диаграмма обобщенного коэффициента Вигнера не имеет замкнутых частей и ее удобно представлять в древовидной форме. Приведем два примера для $n = 6$ с разными схемами связи



Здесь роль параметров α выполняют j_{12}, j_{34} и j_{56} на левом графике и j_{12}, j_{123}, j_{56} на правом.

Для обобщенных коэффициентов Вигнера существуют соотношения, аналогичные (II.3)-(II.5):

$$\binom{j_1 \dots j_n}{m_1 \dots m_n}_{\alpha, \dots \alpha_{n-3}}^A = (-1)^{j_1 + \dots + j_n} \binom{j_1 \dots j_n}{-m_1 \dots -m_n}_{\alpha, \dots \alpha_{n-3}}^A \quad (\text{П.15})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i=m_i \\ i \neq k}} (-1)^{\sum_{l \neq k} (j_l - m_l)} \binom{j_1 \dots j_k \dots j_n}{m_1 \dots m_k \dots m_n}_{\alpha, \dots \alpha_{n-3}}^A \\ & \times \binom{j_1 \dots j'_k \dots j_n}{-m_1 \dots -m'_k \dots -m_n}_{\alpha'_1 \dots \alpha'_{n-3}}^A = \\ & = \frac{\delta(j_k, j'_k) \delta(m_k, m'_k)}{2j_k + 1} (-1)^{j_k - m_k} \prod_{s=1}^{n-3} \frac{\delta(\alpha_s, \alpha'_s)}{2\alpha_s + 1}, \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j_k m_k \alpha_s} (2j_k + 1)(2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_{n-3} + 1) (-1)^{j_k - m_k} \times \\ & \times \binom{j_1 \dots j_k \dots j_n}{m_1 \dots m_k \dots m_n}_{\alpha, \dots \alpha_{n-3}}^A \binom{j_1 \dots j_k \dots j_n}{-m'_1 \dots -m_k \dots -m'_n}_{\alpha, \dots \alpha_{n-3}}^A = \\ & = \prod_{l \neq k} (-1)^{j_l - m_l} \delta(m_l, m'_l). \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

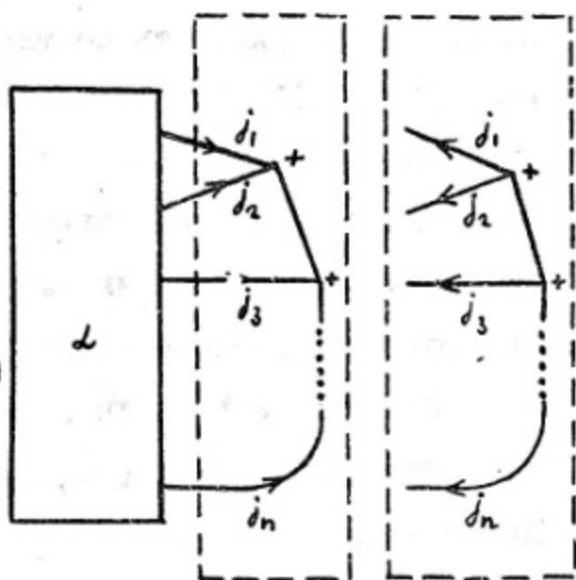
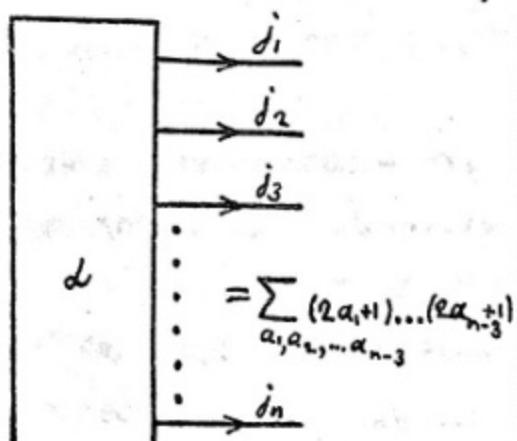
5. Если j_m -коэффициент не является обобщенным коэффициентом Вигнера (т.е. число моментов, относительно проекций которых просуммировано, не является минимальным), то его можно разложить по обобщенным коэффициентам Вигнера. Здесь

мы не будем приводить соответствующих громоздких формул (см. (I3.5)-(I3.7) в книге [8]), а приведем лишь графическое правило.

Рассмотрим произвольный j_m - коэффициент, диаграмма которого содержит линии j_1, j_2, \dots, j_n со свободными концами, которым соответствуют проекции m_1, m_2, \dots, m_n .

Изменим, если нужно, обозначение ряда проекций m : так, чтобы все линии j_1, j_2, \dots, j_n были направлены от диаграммы.

Далее последовательно замыкаем все внешние линии по произвольной схеме связи, произвольным образом расставляя ориентацию узлов (т.е. знаки "+" или "-") и направления промежуточных моментов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$. Одновременно рядом рисуем еще раз ту же самую картину, которую мы добавили к исходному блоку \mathcal{L} (т.е. берем ту же схему связи, и те же ориентации узлов и линий), за одним исключением: направления внешних линий (j_1, j_2, \dots, j_n) меняем на противоположное. Таким образом, из исходного блока \mathcal{L} получается некоторый j - коэффициент, а рядом - некоторый обобщенный коэффициент Вигнера. После этого нужно умножить получившееся выражение на $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\dots(2\alpha_{n-3} + 1)$ и просуммировать по всем возможным значениям $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-3}$.

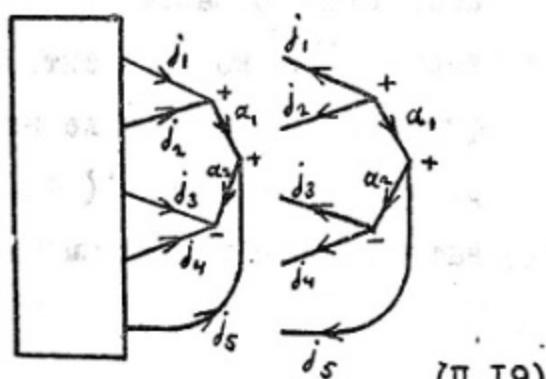


(П.18)

На самом деле ориентировать все внешние концы от блока d не обязательно. Вместо этого можно умножить получившееся выражение на $(-I)^{\sum j}$, где суммирование проводится по всем внешним концам, направленным внутрь блока d .

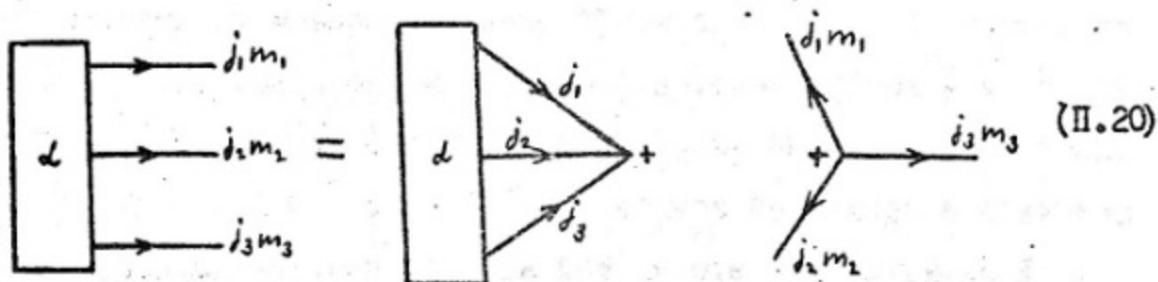
Приведем несколько примеров. Для $n = 5$ одна из возможностей такова:

$$d = \sum_{a_1, a_2} (2a_1+1)(2a_2+1)$$



(П.19)

Если число внешних линий равно трем, суммирование отсутствует



Приведем формулу также для двух внешних концов

$$\frac{j_1 m_1}{j_2 m_2} = \frac{(-1)^{j_1 - m_1}}{2 j_1 + 1} \delta_{m_1, m_2} \delta_{j_1, j_2}$$

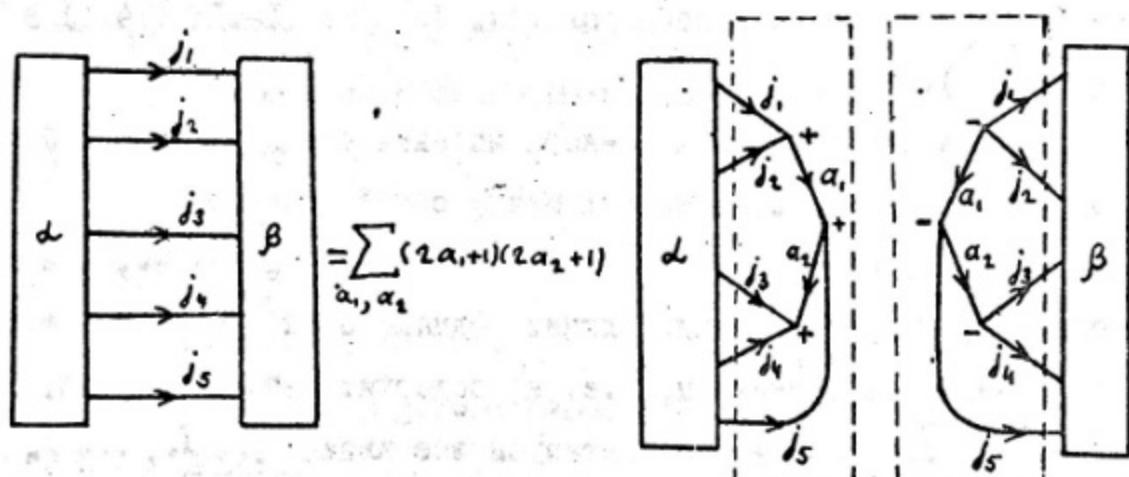
(II.21)

6. Сформулируем теперь "правило разрезания графика", которое позволяет выразить j_m - коэффициент через коэффициенты с меньшим числом параметров (см. формулы (I4.1)-(I4.4) в книге [8]).

Пусть диаграмма j_m -коэффициента состоит из двух блоков α и β , соединенных между собой линиями j_1, j_2, \dots, j_n . Блок β может быть незамкнутым, т.е. содержать и другие внешние линии. Однако блок α обязательно должен быть замкнутым, т.е. не содержать внешних линий, кроме j_1, j_2, \dots, j_n . Ориентируем все линии j_1, j_2, \dots, j_n одинаковым образом, например, в направлении от β к α . Это легко выполняется умножением исходного выражения на $(-1)^{\sum j'}$, где суммирование ведется по тем из n промежуточных линий, которые в начале были направлены от β к α . Затем разрезаем диаграмму по линиям j_1, \dots, j_n и последовательно соединяем образовавшиеся концы блока α по какой-либо схеме связи, ставя произвольную ориентацию узлов и про-

межуточных моментов. Таким образом, к блоку α присоединился некоторый обобщенный коэффициент Вигнера и из него получился j -коэффициент. К блоку β нужно присоединить точно такой же обобщенный коэффициент Вигнера, но только с противоположной ориентацией концов

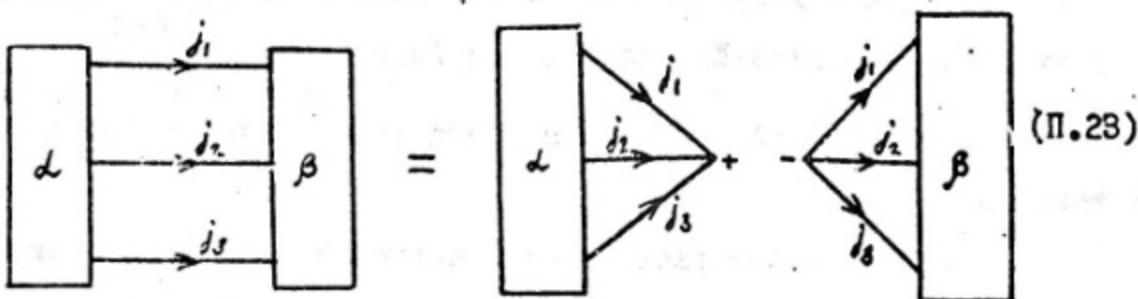
Если мы рисуем это на той же картинке, то дерево, замыкающее концы j_1, \dots, j_n блока β , получается зеркально-симметричным дереву, замыкающему блок α . Чтобы при этом узлы обоих деревьев обозначали одни и те же коэффициенты Вигнера, у первого дерева следует ставить противоположную ориентацию узлов. Затем выражение домножается на $(2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_{n-3} + 1)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}$ – величины промежуточных моментов, и суммируется по $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}$. Поясним описанную процедуру на следующем примере:



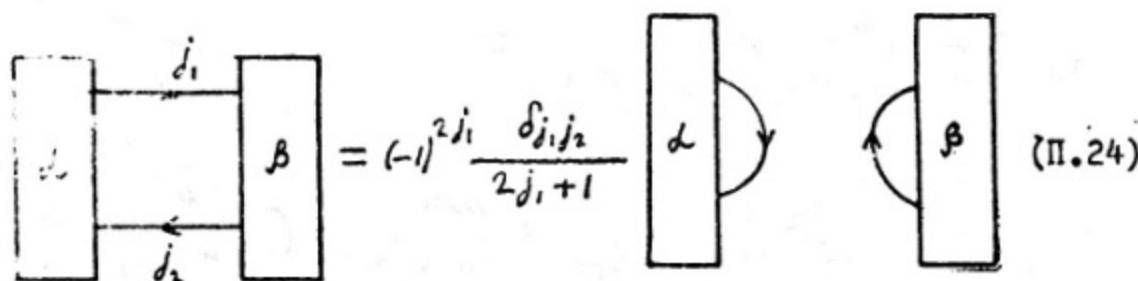
(II.22)

Здесь обобщенные коэффициенты Вигнера, обведенные пунктирными линиями, совпадают, с одним лишь исключением – у них противоположно направлены концы j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 .

Особенно простой вид имеет разрезание по трем линиям:



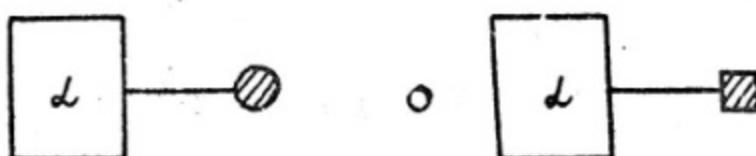
При разрезании по двум линиям



Выражения (П.18) и (П.22) отличны от нуля лишь в том случае, если величины j_1, j_2, \dots, j_n образуют многоугольник.

7. Если встречается сумма двух или большего числа jm -символов по параметру j , то часто она может быть упрощена по правилу, обратному правилу "разрезания". Нам, однако, в настоящих лекциях такие суммы не встречаются.

Заметим, что если проводится суммирование по проекции одной из внешних линий jm -коэффициента с шаровой функцией Y_{LM} или с поляризационным моментом $T^{(L)M}$, то это удобно изображать кружком (для Y_{LM}) или квадратиком (для $T^{(L)M}$).



Здесь имеется глубокая аналогия с обычными графиками суммирования коэффициентов Клебна-Гордана (подробнее см. [5]).

8. Приведем два простых примера применения графической техники.

В разделе 2 при рассмотрении спиновой структуры треххвостки нам понадобилось перейти от одной схемы связи четырех моментов к другой

$$G = C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_2}^{j_{23} \mu_{23}} C_{j_{23} \mu_{23} \ell_{23} m_{23}}^{j_1 \mu_1} = \\ = \sum_{j_{12}} \alpha_{j_{12} j_{12}} C_{j_1 \mu_1 j_{12} \mu_{12}}^{j_{12} \mu_{12}} C_{j_{12} \mu_{12} \ell_{12} m_{12}}^{j_{23} \mu_{23}} \quad (\text{II.25})$$

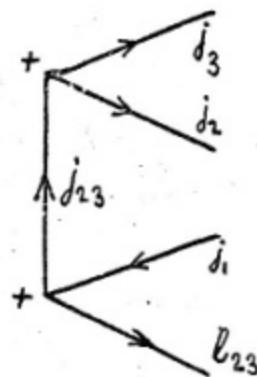
Воспользовавшись два раза соотношением (II.1)

$$C_{j_1 \mu_1 j_2 \mu_2 j_3 \mu_3}^{j_{23} \mu_{23}} = (-1)^{j_1 - j_3 + j_{23}} (-1)^{j_{23} - \mu_{23}} \sqrt{2j_{23} + 1} \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_{23} \\ \mu_2 & \mu_3 & -\mu_{23} \end{pmatrix},$$

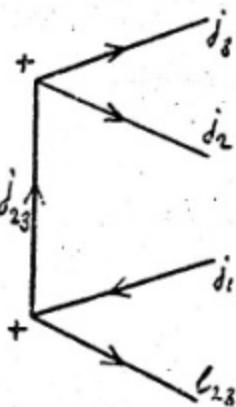
$$C_{j_{23} \mu_{23} \ell_{23} m_{23}}^{j_1 \mu_1} = (-1)^{j_{23} - \ell_{23} + j_1} (-1)^{j_1 - \mu_1} \sqrt{2j_1 + 1} \begin{pmatrix} j_{23} & \ell_{23} & j_1 \\ \mu_{23} & m_{23} & -\mu_1 \end{pmatrix},$$

и проведя суммирование по μ_{23} , получаем

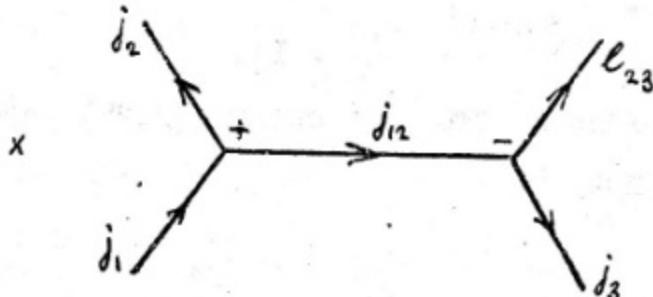
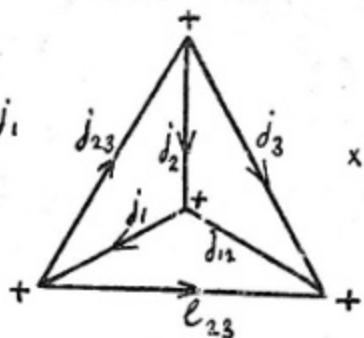
$$G = (-1)^{j_1+j_2-j_3+2j_{23}-\ell_{23}} (-1)^{j_1-M_1} \sqrt{(2j_1+1)(2j_{23}+1)} \times$$



Далее,



$$= \sum_{j_{12}} (2j_{12}+1) (-1)^{2j_1}$$



Стоящий здесь j -коэффициент есть (П.9) просто

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_3 & j_{23} & \ell_{23} \end{Bmatrix}.$$

Поэтому

$$G = (-1)^{3j_1+j_2-j_3+2j_{23}-\ell_{23}} (-1)^{j_1-M_1} \sqrt{(2j_1+1)(2j_{23}+1)} \times$$

(П.26)

$$x \sum_{j_{12}} (2j_{12} + 1) \begin{Bmatrix} j_1 & j_{12} & j_2 \\ j_3 & j_{23} & l_{23} \end{Bmatrix}$$

Воспользовавшись (П.8) и два раза соотношением (П.2), получим

$$j_1 \quad j_2 \quad + \quad j_{12} \quad - \quad j_3 = (-1)^{2j_3} (-1)^{j_1-j_{12}} \frac{1}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_{12}+1)}}$$

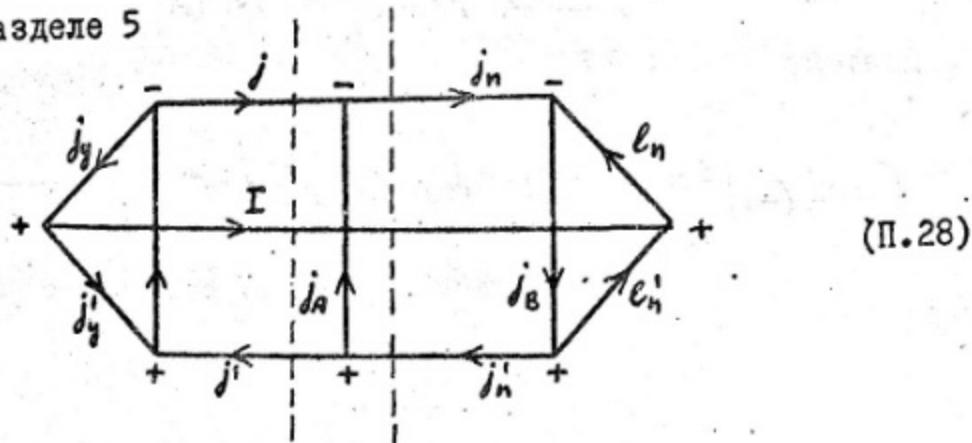
$$\times C_{j_2 m_2 j_{12} m_{12}}^{j_1 m_1} C_{j_3 m_3 l_{23} m_{23}}^{j_{12} m_{12}}$$

(Мы учли, что $(-I)^{2j_1 + 2j_2 + 2j_{12}} = I$).

Теперь легко видеть, что соотношение (П.25) действительно имеет место, причем

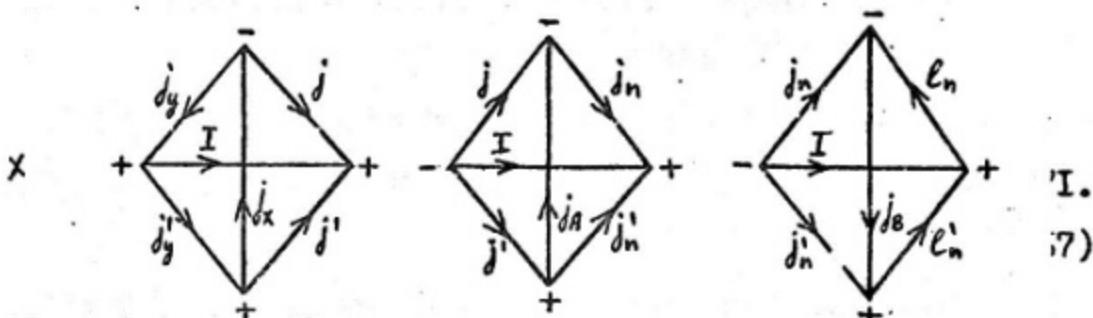
$$\alpha_{j_{23} j_{12}} = (-1)^{d_1 + d_2 + d_3 + \ell_{23}} \sqrt{(2d_{12}+1)(2d_{23}+1)} \begin{Bmatrix} d_1 & d_{12} & d_2 \\ d_3 & d_{23} & \ell_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

В качестве второго примера преобразуем выражение, встретившееся в разделе 5



Изменим ориентацию линий j' и j'' и разрежем диаграмму по пунктирным линиям, используя (П.23)

$$R_1 = (-1)^{2j+2j_n} \times$$



Приводя затем каждый j -символ к стандартному виду (П.9) путем изменения ориентации узлов и линий, приходим к окончательному выражению

$$R_1 = (-1)^{2j_y + j_y' - j_x - j'' - j + j_n + j_n' + j_e + \ell_n'} x$$

$$\left\{ \begin{matrix} j_y & j_y' & I \\ j' & j & j_x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j' & I \\ j'_n & j_n & j_x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_n & j'_n & I \\ e'_n & e_n & j_x \end{matrix} \right\}$$

Здесь использовано также то обстоятельство, что ℓ_n и ℓ'_n - символы орбитальных моментов - целые числа, так что $(-I)^{2\ell_n} = I$, $(-I)^{-\ell'_n} = (-I)^{\ell'_n}$.

Литература

1. S.M.Bilenky, L.I.Lapidus, L.D.Pusikov, R.M.Ryndin.
Nucl.Phys. 7, 646 (1958).
2. I.S.Shapiro, V.M.Kolymbasov, G.R.Augst? *Nucl.Phys.* 61, 353 (1965).
3. V.M.Kolymbasov. *Nucl.Phys.* 68, 8 (1965).
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
5. M.S.Marinov. *Ann.of Phys.* 49, 357 (1968).
6. В.М.Колыбасов, М.С.Маринов. В сб. "Материалы 4-й зимней школы ЛФТИ по теории ядра и физике высоких энергий", Ленинград, 1969, стр.234.
7. Л.Д.Пузиков. ЖЭТФ, 34, 947 (1958).
8. А.П.Юцис, И.Б.Левинсон, В.В.Ванагас. Математический аппарат теории момента количества движения, Госполитнаучиздат, Вильнюс, 1960.
9. А.П.Мишина, И.В.Прокуряков. Высшая алгебра, "Наука", 1965.
10. М.С.Маринов. ЯФ 4, 1251 (1966).
11. P.Minnaert. *Phys.Rev.* 151, 1306 (1966).
12. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, "Наука", 1969, стр.355.
13. А.М.Байдин, В.И.Гольданский, В.М.Максименко, И.Л.Розенгаль. Кинематика ядерных реакций, Атомиздат, 1968.
14. В.А.Хангулян, В.М.Колыбасов. ЯФ 12, 732 (1970).
15. И.С.Шапиро. Теория прямых ядерных реакций, Атомиздат, 1963.
16. И.С.Шапиро. УФН, 92, 549 (1967).
17. Л.Д.Блохинцев. Диаграммный метод в теории прямых ядерных реакций. МИФИ, Москва, 1971.

- I8. A.K.Kerman, H.McManus, R.M.Thaler. *Ann. of Phys.* 8, 551 (1959).
- I9. В.А.Хангулян. ЯФ II, 967 (1970).
20. В.А.Хангулян. ЯФ I3, 525 (1971).
21. О.Д.Далькаров, В.Б.Мандельцвейг, И.С.Шапиро. ЖЭТФ, 59, 1363 (1970); *Nucl.Phys.* 24B, 88 (1970).
22. R.A.Bryen, R.Phillips. *Nucl.Phys.* B5, 201 (1969).
23. О.Д.Далькаров, В.Б.Мандельцвейг, И.С.Шапиро. ЯФ, I3, 332, 1971.
24. V.M.Kolybasov, I.S.Shapiro. *Phys.Lett.* 25B, 497 (1967).
В.М.Колыбасов. ЯФ, 8, 898 (1968).
25. V.M.Kolybasov, N.Ya.Smorodinskaya. *Nucl.Phys.* A136, 165 (1969).
26. N.S.Cragie, C.Wilkin. *Nucl.Phys.* B14, 477 (1969).
27. В.М.Колыбасов, Н.Я.Смородинская. Программа и тезисы докладов 21-го совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра, часть II, стр.319 (Москва, 1971).
28. И.С.Шапиро, В.М.Колыбасов. Письма ЖЭТФ 4, 329 (1966).
29. В.М.Колыбасов. ЯФ 5, 288 (1967).
30. В.М.Колыбасов, Н.Я.Смородинская. ЯФ I4, № 3 (1971).
31. А.П.Юцис, А.А.Бандзайтис. Теория момента количества движения в квантовой механике, "Минтис", Вильнюс, 1965.
32. А.Эдмондс. В сб."Деформация атомных ядер", ИИЛ, 1958.
33. А.О.Аганьянц, Ю.Д.Баюков и др. *Nucl.Phys.* BII, 79(1969);
Ю.Д.Баюков, Л.С.Воробьев и др. Доклад на 2-м Проблемном симпозиуме по физике ядра (Новосибирск, 1970).