539.1
В 85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике

2 сессия ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ
ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЯХ

(КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ)

И. Ю. КОБЗАРЕВ

ТЕОРИЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ

МОСКВА — 1971

539.
В.85

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике

2 сессия ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭНЕРГИЯХ

(Конспекты лекций)

И.Ю.КОБЗАРЕВ

ТЕОРИЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ

562411

БИБЛИОТЕКА
МИФИ

МОСКВА - 1971 г.

I. ВВЕДЕНИЕ

Феноменологическое описание свойств S -матрицы для рассеяния на изолированном нестабильном уровне хорошо известно. Оно дается формулой Брейта-Вигнера, излагающейся во всех достаточно полных учебниках квантовой механики (например, [I]). В этих лекциях будет рассмотрен вопрос об обобщении такого описания на случай n близких перекрывающихся нестабильных уровней. При этом так же, как и в случае изолированного полюса, оказываетя достаточным использовать только самые общие принципы квантовой механики.

Явление перекрытия нескольких уровней широко распространено, оно встречается и в атомной физике, и в физике элементарных частиц и в физике ядра.

В атомной физике при точных спектроскопических измерениях используется возможность совмещения $2S$, $2p$ уровней при помещении атома в магнитное поле. Полного вырождения можно достичь, если включить еще электрическое поле, перемещающее S и P состояния.

В физике частиц классическим примером является система K^0, $\tilde{K}^0$, где с учетом несохранения CP возникает два интерферирующих состояния K_L , K_S . Более тривиален случай ρ и ω мезонов, перемешивающихся за счет электромагнитного взаимодействия. Возможно, также, что A_2 -мезон является суперпозицией двух очень близких уровней.

Явление перекрытия резонансов очень распространено в ядрах. В связи с этим теория перекрывающихся резонансов неоднократно обсуждалась в работах по теории ядра (смотри, например,[2] , где даны ссылки на предшествующие статьи). В этих работах, однако, остались неразделенными два разных вопроса: вопрос о феноменологической параметризации S -матрицы и вопрос о вычислении феноменологических параметров из "первых принципов" с помощью многочастичного уравнения Шредингера. Первый вопрос решается сравнительно просто. Второй же аналогичен проблеме вычисления ширин в формуле Брейта-Вигнера, может быть рассмотрен только на моделях и не имеет простого решения. В работе [2] и более ранних оба вопроса рассмотрены одновременно. В результате полученные для S -матрицы формулы имеют излишне сложный вид, скрывающий простую феноменологическую структуру.

Независимо в работе М.Гольдбергера и К.Ватсона [3,4] был рассмотрен случай n -кратного полюса Т-матрицы. Этот случай является очевидно, предельным случаем задачи о n перекрывающихся полюсах. В [3] эта связь осталась не прослеженной, а ряд сделанных в ней утверждений ошибочен. В частности, полученный в [3] временной закон распада состояния, соответствующего кратному полюсу, не соответствует рассматриваемому в этой работе одноканальному случаю.

Утверждение о том, что кратный полюс есть предельный случай двух близких уровней, было сделано Д.Беллом и С.Гебелем [5] , детально разобравшими два примера: яма с двумя горбами и модель Ли с двумя уровнями. Обсуждение физики вопроса в этой работе, практически, исчерпывающее.

Существенный шаг был сделан Р.Лассилой и В.Рускайненом [6], давшими общее матричное описание задачи о двух уровнях.

Случай n близких уровней рассматривался в [7].

В работах И.С.Шапиро [8-10] и А.Е.Кудрявцева [11] феноменологическая модель n узких уровней, модулированных одним широким, использовалась для описания гигантских ядерных резонансов, в частности, резонансов, соответствующих аналоговым состояниям. В [11] было получено также общее выражение для функции Грина и перемешивающихся уровней.

Связь описания n вырожденных уровней с общей теорией матриц была подчеркнута в [12-14].

Вопрос о свойствах перекрывающихся уровней рассматривался также М.И.Подгорецким и сотрудниками [15-16].

Обзор применений теории перекрывающихся резонансов вместе с изложением общих формул, в основном совпадающих с полученными в [7], дан Л.Стодольским [17].

В этом введении были рассмотрены использованные мной источники. Так же, как и список литературы, оно не претендует на полноту.

Новым в этих лекциях является:

1. Общее соотношение между парциальными ширинами и полной шириной уровня (формула 2.40).
2. Условия применимости осцилляционной формулы (стр.32),
3. Содержание раздела 4.3.

2. Общий случай n -перекрывающихся уровней

2.I. Унитарная амплитуда рассеяния на n -перекрывающихся уровнях.

Напомню сначала, как выглядит S -матрица в случае одного нестабильного уровня и N внешних каналов.*) Для установления нормировок удобно начать с формулы теории возмущений для N -канального рассеяния на уровне с энергией E_0. Тогда для дифференциального сечения рассеяния в телесный угол $d\Omega$ справедлива формула

$$d\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{v_\beta} \left| \frac{V_{\alpha 0} V_{0\beta}}{E_\alpha - E_0} \right|^2 \rho'_\alpha \, d\Omega \tag{2.I}$$

Здесь v_β -скорость в системе центра инерции в канале β, где $\beta = 1,2,.., N$; $\rho'_\alpha d\Omega$ - статистический вес в α канале, $V_{\alpha 0}$, $V_{0\beta}$ - матричные элементы гамильтониана взаимодействия V, и $E_\alpha = E_\beta$.

Для простоты здесь и ниже будет рассматриваться только рассеяние в S - волне. Тогда можно в (2.I) проинтегрировать по углам и обозначить через ρ_α величину $4\pi\rho'_\alpha$

$$\rho_\alpha = \frac{P_\alpha^2}{2\pi^2 v_\alpha} \tag{2.2}$$

где P_α - импульс в канале α.

Тогда

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{v_\beta} \left| \frac{V_{\alpha 0} V_{0\beta}}{E_\alpha - E_0} \right|^2 \rho_\alpha \tag{2.3.}$$

*) Все каналы двухчастичные

Формулу (2.3) или, точнее, соответствующую ей амплитуду $T_{\alpha\beta}$ легко унитаризировать, если учесть ширину состояния $|0\rangle$, равную

$$\Gamma_0 = 2\pi \sum_\alpha |V_{\alpha 0}|^2 \rho_\alpha \tag{2.4}$$

и заменить E_0 на $E_0 - i\frac{\Gamma_0}{2}$. При этом удобно ввести амплитуды

$$\begin{aligned} A_{\alpha 0} &= V_{\alpha 0}\sqrt{2\pi\rho_\alpha} \\ A_{0\beta} &= V_{0\beta}\sqrt{2\pi\rho_\beta} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Эти амплитуды удобны тем, что они нормированы,так, что парциальные ширины распада в канале α равны просто

$$\Gamma_\alpha = |A_{\alpha 0}|^2 \tag{2.6}$$

Замечу, что пока мы не будем использовать условие Т-инвариантности. Если инвариантность относительно обращения времени имеет место, то

$$A_{\alpha 0} = A_{0\alpha} = \sqrt{\Gamma_\alpha} \tag{2.7}$$

Используя (2.5) и делая подстановку $E_0 \to E_0 - i\frac{\Gamma_0}{2}$, получаем

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{P_\beta^2}\left|\frac{A_{\alpha 0} A_{0\beta}}{E_\alpha - E_0 + i\frac{\Gamma_0}{2}}\right|^2 \qquad (2.8)$$

Соответствующая (2.8) матрица T, связанная с S -матрицей соотношение

$$S = 1 - iT \qquad (2.9)$$

имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha 0} A_{0\beta}}{E_\alpha - E_0 + i\frac{\Gamma_0}{2}} \qquad (2.10)$$

Легко видеть, что соотношение унитарности

$$S\,S^+ = 1 \qquad (2.11)$$

или

$$i(T - T^+) = T\,T^+ \qquad (2.12)$$

где произведение TT^+ надо понимать как

$$(T\,T^+)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{N} T_{\alpha\gamma}\,(T^+)_{\gamma\beta} \qquad (2.13)$$

справедливо, если

$$\sum_\alpha \Gamma_\alpha = \sum |A_{\alpha 0}|^2 = \Gamma \qquad (2.14)$$

Теперь можно забыть про наводящие соображения, связанные с теорией возмущений. Формула (2.10) при условии (2.14) дает нам унитарную N -канальную T-матрицу, имеющую полюс при $E=E_0-i\frac{\Gamma_0}{2}$; это то, что мы ожидаем при рассеянии на нестабильном уровне. Если хотите, можно считать, что формулы (2.10), (2.I4) есть определение нестабильной частицы.

Как теперь обобщить формулу (2.I0) на случай рассеяния на n -перекрывающихся уровнях?

Заменим энергию $E_0-i\frac{\Gamma_0}{2}$ на неэрмитову матрицу H_{ik} , где i , k = I, 2,..., n . Матрица H_{ik} есть неэрмитов оператор энергии для n перекрывающихся нестабильных уровней . Тогда естественное обобщение (2.I0) есть выражение

$$T_{\alpha\beta}=A_{\alpha i}\left(\frac{1}{E-H}\right)_{ik}A_{k\beta} \tag{2.I5}$$

(Здесь и ниже подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.) Очевидно, что матрица $T_{\alpha\beta}$ имеет теперь полюса при $E=\mu_a$, где μ_a $(a=\mathrm{I},\ldots,n)$ есть комплексные собственные значения матрицы H_{ik}; $\mu_a=E_a-i\frac{\Gamma_a}{2}$
Ниже мы покажем, что если амплитуды A связаны с H обобщенным соотношением Белла-Штайнбергера, имеющим вид

$$H_{ik}-H^{+}_{ik}=-i\,A^{*}_{\alpha i}A_{\alpha k} \tag{2.I6}$$

то матрица $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию унитарности (2.I2). Таким образом, по определению, матрица $T_{\alpha\beta}$ описывает рассеяние на n -интерферирующих уровнях с энергиями μ_a. Вообще говоря, как матрица H , так и амплитуды А являются функциями энергии рассеяния Е. (Зависимость от Е содержится уже в (2.5), так как ρ_α, ρ_β есть функции от E). Ниже мы будем работать в приближении, когда $A_{\alpha i}$ и H_{ik} считаются константами, Существенно, что такое приближение не нарушает условие унитарности T-матрицы (2.I3). Это приближение соответствует замене на константы парциальных ширин Γ_α в обычном Брейт-Вигнере и является хорошим, если $\Gamma_\alpha, \Delta E \ll E$, где ΔE - ширина резонансной области. Конец этого раздела (2.I) мы посвятим доказательству сделанного выше утверждения.

Для доказательства удобно рассматривать величины $A_{\alpha i}$, $A_{k\beta}$ и H_{ik} как элементы $N+n$ -мерных матриц, изображенных на рис.I. Если нумеровать элементы этих матриц индексами i', k', то

$$A_{i'k'} = A_{(\alpha)',(N+i)'} = A_{\alpha i} \tag{2.I7}$$

$$A_{i'k'} = A_{(N+k)',\beta'} = A_{k\beta}$$

при $\alpha, \beta > 0$, $k, i > 0$ и $A_{i',k'} \equiv 0$ для остальных i' , k' .

Для H доопределение очевидно из рис.I.

Так как мнимости, связанные с распадами, включены в H , то матрица A эрмитова при отсутствии взаимодействий в конечном состоянии. Последнее условие неявно подразумевалось уже в формуле (2.I5), так как в ней отсутствуют члены, описывающие неполюсное рассеяние, и при $|E| \gg |\mu_\beta|$ $T \to 0$. Таким образом

$$A_{i\alpha} = A^*_{\alpha i} \tag{2.I8}$$

или, по определению

$$A = A^{+} \tag{2.I9}$$

Нашу основную формулу (2.I5) можно теперь записать в виде

$$T = A\,\frac{1}{E-H}\,A \tag{2.20}$$

Подставляя (2.20) в условие унитарности (2.I2), имеем

$$iA\left[\frac{1}{E-H}-\frac{1}{E-H^{+}}\right]A = A\,\frac{1}{E-H}\,A\,A\,\frac{1}{E-H^{+}}\,A \tag{2.2I}$$

или, приводя левую часть к общему знаменателю,

$$i\,\frac{1}{E-H}\left[(E-H^{+})-(E-H)\right]\frac{1}{E-H^{+}} = \frac{1}{E-H}\,AA\,\frac{1}{E-H^{+}} \tag{2.22}$$

Откуда следует

$$H - H^{+} = -iAA \tag{2.23}$$

Уравнение (2.23) есть не что иное, как уравнение (2.I6) в матричной форме. Таким образом, мы действительно показали, что матрица $T_{\alpha\beta}$ унитарна, если выполнены условия (2.I9), (2.23). Очевидно, что если (2.I9) принять, то (2.23) есть необходимое и достаточное условие унитарности.

Полученный результат может рассматриваться как вывод (2.I0), поскольку мы получили унитарную матрицу $T_{\alpha\beta}$

с n полюсами. В конкретных моделях можно пытаться вычислять матрицы А и H, но очевидно, что эта задача находится на совершенно другом уровне трудности.

В заключение я сделаю еще одно замечание об уравнении (2.I6). Это уравнение можно записать в более наглядном виде, если ввести собственные векторы матрицы H. Будем обозначать компоненты вектора, соответствующего собственному значению μ_a, как C_{ia}. Тогда по определению

$$H_{ik} C_{ka} = \mu_{(a)} C_{i(a)} \tag{2.24}$$

(В тех случаях, когда по повторяющемся индексу не производится суммирования, я буду писать его в скобках).

То же самое уравнение в символической записи имеет вид

$$\hat{H} |a\rangle = \mu_a |a\rangle \tag{2.25}$$

На физическом языке C_{ia} есть не что иное, как волновые функции распадных состояний в исходном ортонормированном базисе, в котором определена матрица H_{ik}. Так как матрица H неэрмитово, то волновые функции, соответствующие различным μ_a, неортогональны.
(Нормировать их хотя и можно, но бесполезно). Покажем теперь, что из (2.I6) можно получить уравнение, непосредственно характеризующее неортогональность состояний $|a\rangle, |b\rangle$.

Действительно, беря матричный элемент от (2.I6) между векторами $|a\rangle$, $|b\rangle$, получаем

$$\langle b|H-H^{+}|a\rangle = -i\,(A_{\alpha i} C_{ia})(A_{\alpha k} C_{kb})^{*} \tag{2.26}$$

Вводя амплитуды распадов для собственных состояний $|a\rangle$

$$A_{\alpha a} = A_{\alpha i} C_{ia} \tag{2.27}$$

и учитывая (2.25), получаем окончательно

$$(\mu_a - \mu_b^{*})\langle b|a\rangle = -i\, A_{\alpha a} A_{\alpha b}^{*} \tag{2.28}$$

Уравнение (2.28) впервые было написано для системы K^{0} , $\tilde{K}^{0}$ в обзорном докладе Белла и Штайнбергера [I8] . Из него, в частности, непосредственно видно, что для неортогональности состояний $|a\rangle$, $|b\rangle$ необходимо, чтобы у них были общие распадные каналы.

2.2. Представление матрицы Т в виде суммы по полюсам

В этом разделе мы рассмотрим более детально полюсную структуру матрицы Т. В случае, когда все корни H не вырождены, матрицу Т легко представить в виде суммы по полюсам, используя проекционные операторы Сильвестра–Лагранжа. Тогда

$$\frac{1}{E-H} = \sum_{a} \frac{1}{E-\mu_a} \prod_{a \neq b} \frac{(H-\mu_b)}{(\mu_a-\mu_b)} \tag{2.29}$$

Формула (2.29) непосредственно дает требуемое представление для матрицы $\frac{1}{E-H}$ и одновременно для матрицы $\overset{\circ}{T}$.

Искомое разложение можно получить и другим путем, преобразуя матрицу H к диагональной форме. Очевидно, что матрицей, осуществляющей такое преобразование, является матрица С

$$C = \| C_{ia} \| \tag{2.30}$$

где коэффициенты C_{ia} определены уравнением (2.24)

Если ввести матрицу

$$\mathcal{M}_{ab} = \mu_{(a)}\, \delta_{(a)b} \tag{2.31}$$

то уравнение (2.24) для собственных векторов C_{ia} можно записать в виде

$$HC = CM \tag{2.32}$$

или

$$H = CMC^{-1} \tag{2.33}$$

Очевидно, что одновременно с Н диагональна и матрица $\frac{1}{E-H}$, и таким образом,

$$\frac{1}{E-H} = C\frac{1}{E-M}C^{-1} \tag{2.34}$$

Подставляя в (2.34) явное выражение для матрицы M , получаем

$$T_{\alpha\beta} = A_{\alpha i}\, C_{ia}\frac{1}{E-\mu_a}C^{-1}_{ak}\, A_{k\beta} \tag{2.35}$$

что снова дает представление амплитуды рассеяния в виде суммы по полюсам.

Последнюю формулу можно привести к более наглядному виду, если ввести амплитуды распада и образования для собственных состояний матрицы Н. Эти амплитуды мы определим как

$$\gamma_{\alpha a} = A_{\alpha i}\, C_{ia}$$

$$\gamma_{a\beta} = C^{-1}_{ai}\, A_{i\beta} \tag{2.36}$$

Тогда сумма (2.35) представится в виде, напоминающем сумму Брейт-Вигнеровских полюсов

$$T_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha a} \frac{1}{E-\mu_a} \gamma_{a\beta} \tag{2.37}$$

Несмотря на внешнее сходство, имеется существенное различие в свойствах каждого из членов в сумме (2.37) и изолированного Брейт-Вигнеровского полюса.

Для того, чтобы это увидеть, вернемся к условию унитарности.

Тогда с учетом определений (2.36) имеем

$$C^{-1}(H-H^{+})C = -i\gamma\gamma \tag{2.38}$$

где произведение матриц $\gamma\gamma$ определено так же, как и для A в виде

$$(\gamma\gamma)_{ab} = \gamma_{a\alpha}\gamma_{\alpha b} \tag{2.39}$$

Учитывая, что $H = CMC^{-1}$ (2.33), получаем

$$M - C^{-1}(C^{-1})^{+}M^{+}C^{+}C = -i\gamma\gamma \tag{2.40}$$

Так как матрица С, диагонализирующая неэрмитову матрицу Н, неунитарна, это уравнение совсем не похоже на условие унитарности для изолированного уровня. В частности, из него следует, что

$$2\,\mathrm{Im}\,\mu_a \neq -i\gamma_{\alpha a}\gamma_{\alpha a} \qquad (2.41)$$

как было бы для изолированного уровня.

Разумеется, ничего удивительного здесь нет, унитарны не отдельные члену суммы (2.35), а вся она вместе.

2.3. Ограничения на Т-матрицу, связанные с инвариантностью относительно обращения времени.

В случае, если имеет место инвариантность относительно обращения времени, матрица энергии H_{ik} и амплитуда T должны быть симметричны $H_{ik} = H_{ki}$, $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$. Рассмотрим, какие ограничения возникают при этом для введенной в предыдущем разделе матрицы C. Уравнение (2.33) означает, что

$$H_{ik} = C_{ia}\,\mu_a\,C^{-1}_{ak} \qquad (2.43)$$

Так как числа μ_a произвольны, то для любого заданного a и всех i, k должны выполняться условия

$$C^{-1}_{i(a)}\,C_{(a)k} = C^{-1}_{k(a)}\,C_{(a)i} \qquad (2.44)$$

Отсюда следует

$$\frac{C^{-1}_{ia}}{C^{-1}_{ka}} = \frac{C_{ak}}{C_{ai}} \qquad (2.45)$$

Уравнение (2.43) допускает произвольные преобразования над C_{ak} вида

$$C_{(a)k} = \lambda_a C_{(a)k}$$

$$C^{-1}_{k(a)} = \lambda_a^{-1} C_{k(a)} \tag{2.46}$$

Используя преобразования (2.46), можно всегда привести (2.45) к виду

$$C^{-1}_{ka} = C_{ak} \tag{2.47}$$

5622411

или

$$C^{-1} = \tilde{C} \tag{2.48}$$

Из (2.48) и (2.36) следует, если учесть что $A = \tilde{A}$

$$\gamma_{\alpha a} = \gamma_{a\alpha} \tag{2.49}$$

что можно получить и непосредственно из условия симметрии для $T_{\alpha\beta}$ и (2.37).

Заметим теперь, что соотношение (2.48) эквивалентно уравнению

БИБЛИОТЕКА МИФИ

$$C_{ak} C_{bk} = \delta_{ab} \tag{2.50}$$

Поскольку C_{ak} есть вектор состояния $|a\rangle$ в базисе $|k\rangle$, и величины C_{ak} комплексны, уравнение (2.50) несовместимо с уравнением

$$C_{ak} C^*_{bk} = \delta_{ab} \qquad (2.51)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае снова обнаруживается обсуждавшаяся выше неунитарность матрицы C. В частности, не выполняется условие

$$C_{(a)k} C^*_{(a)k} = 1 \qquad (2.52)$$

Таким образом, уравнению (2.49) соответствует использование ненормированных собственных векторов $|a\rangle$, как было отмечено в работе [17].

Разумеется, с помощью преобразований (2.46) можно добиться выполнения (2.52), но, конечно, не уравнений (2.51), поскольку неортогональность состояний $|a\rangle, |b\rangle$ не может быть устранена.

2.4. Рассеяние на n -уровнях и Файнмановские графики

Формула (2.20) имеет простую интерпретацию на языке нерелятивистских Файнмановских графиков.

Начнем опять с Файнмановских графиков для рассеяния на одном нестабильном уровне. Простейший график теории возмущений имеет вид (рис.2), где

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{V_{\alpha 0} V_{0\beta}}{E - E_0} \qquad (2.53)$$

Учтем теперь изменение энергии уровня E_0 в результате взаимодействия с континуумом. Тогда собственно энергетический оператор для уровня 0 есть

$$H(E) = E_0 + \sum_\alpha \frac{V_{0\alpha} V_{\alpha 0}}{E - E_n + i\varepsilon} \tag{2.54}$$

Перенормированная энергия уровня E_0 может быть определена из уравнения

$$E = H(E) \tag{2.55}$$

Приближенно можно положить $H(E) = H(E_0)$. Тогда вклад от $E_n \neq E_0$ определит перенормировку E_0, а вклад полюса делает энергию комплексаной

$$\mu_0 = E_{0(ren)} - i\frac{\Gamma_0}{2} \tag{2.56}$$

(Лучшее приближение получится, если определить $E_{0(ren)}$ как корень уравнения $E_{0(ren)} = E_0 + Re\, H(E_{0(ren)})$.

Если подставить μ вместо E_0 в (2.53), то мы снова вернемся к формуле Брейта-Вигнера. Легко видеть, что такая подстановка соответствует суммированию последовательности графиков рис.3 с заменой $H(E)$ на $H(E_0)$.

Такому суммированию графиков соответствует переход от свободной функции Грина

$$G = \frac{1}{E - E_0}$$

к точной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$(E-H)\ G(E)=1 \tag{2.58}$$

с заменой $H(E)$ на константу $H(E_0)$.

Рассмотрим теперь случай n нестабильных уровней. В этом случае амплитуда рассеяния $T_{\alpha\beta}$ есть сумма графиков вида рис.4. В этом случае можно ввести матрицу собственной энергии $H_{ik}(E)$, где

$$H_{ik} = E_{0(i)}\,\delta_{ik} + \sum \frac{V_{i\alpha} V_{\alpha k}}{E-E_\alpha+i\varepsilon} \tag{2.59}$$

и обобщенную функцию Грина G_{ik} [19,20], удовлетворяющую уравнению

$$\left[E - H_{ik}(E)\right] G_{kr} = 1 \tag{2.60}$$

где под I следует понимать единичную матрицу δ_{ir}. Если заменить $H_{ik}(E)$ на $H_{ik}(\bar{E})$, где $\bar{E}$ есть постоянная энергия, соответствующая область резонансов, то

$$G_{ik} = \left(\frac{1}{E-H}\right)_{ik} \tag{2.61}$$

и для амплитуды рассеяния $T'_{\alpha\beta}$ мы получим

$$T'_{\alpha\beta} = V_{\alpha i}\ G_{ik}\ V_{k\beta} \tag{2.62}$$

или

$$T'_{\alpha\beta} = V_{\alpha i}\left(\frac{1}{E-H}\right)_{ik} V_{k\beta} \qquad (2.63)$$

что соответствует (2.20).

Проследим это соответствие более детально. Полная Т-матрица равна

$$T_{\alpha\beta} = 2\pi\,\delta(E_\alpha - E_\beta)\,T'_{\alpha\beta} \qquad (2.64)$$

Если пользоваться определением (2.64), то в условие унитарности (2.12) войдет интегрирование по энергии, и для $T'_{\alpha\beta}$ мы получим

$$i\left(T'_{\alpha\beta} - T'^{+}_{\alpha\beta}\right) = T'_{\alpha\delta}\, 2\pi\rho_\delta(E)\, T'^{+}_{\delta\beta} \qquad (2.65)$$

Вводя

$$T_{\alpha\beta} = \sqrt{2\pi\rho_\alpha}\; T'_{\alpha\beta}\sqrt{2\pi\rho_\beta} \qquad (2.66)$$

мы получим матрицу $T_{\alpha\beta}$, удовлетворяющую условию унитарности (2.12), (2.13). Замечу, что так определенная матрица строго говоря, не тождественна Т-матрице (2.64). В литературе обычно широко пользуются обоими определениями, не оговаривая этого специально.

2.5. Реакции с рождением перекрывающихся резонансов

В теории элементарных частиц различают два типа процессов с участием нестабильных частиц. К первому типу процессов, называемых процессами формации резонансов, относятся реакции, когда нестабильная частица образуется в реакции обратной распаду частицы. Эта ситуация изображена на рис.5. В этом случае для изолированного уровня амплитуда описывается формулой Брейта-Вигнера, а для n - уровней - формулой (2.15). Существенно, что энергия, входящая в знаменатель (2.15), есть энергия в канале рождения, зависящая только от начальных условий.

Другая ситуация имеет место в реакциях типа рис.6. В этом случае резонанс или суперпозиция резонансов образуется вместе с другими частицами в реакции типа

$$A + B = \sum X_a + C \tag{2.67}$$

где $\sum X_a$ есть в общем случае суперпозиция резонансов, а состояние С, вообще говоря, может быть и многочастичным.

В этом случае энергия продуктов распада резонанса равна

$$E = E_A + E_B - E_C \qquad (2,68)$$

и может меняться при заданной полной энергии. В таких опытах может измеряться спектр недостающих масс $W(E)$, где $W(E)\,dE$ есть вероятность того, что E находится в интервале E, $E+dE$.

Примером процесса типа рождения являются процессы с образованием K^0 мезонов. Здесь K^0 мезон рождается в реакциях вида $\pi^- + p \to \Lambda + K^0$,

а состояния K^0 есть суперпозиция K_S^0 и K_L^0 состояний. К этому же классу процессов относятся реакции рождения* ρ, ω и A_2.

Формула (2.15) легко может быть обобщена на эти случаи. Амплитуда реакции, идущей с образованием суперпозиции резонансов и последующим их распадом в канале α равна

$$T_\alpha = A_{\alpha i}\left(\frac{1}{E-H}\right)_{ik} M_k \tag{2.69}$$

где M_k есть амплитуда образования состояния $|k\rangle$ в реакции (2.67). Спектр недостающих масс есть

$$W(E) = T_\alpha T_\alpha^* \tag{2.70}$$

Как было замечено Стодольским[17], измерение $W(E)$ позволяет определить степень неортогональности собственных состояний. Легко показать, что

$$W(E) = M_a^* \frac{1}{E-\mu_a^*} \langle a|b\rangle\, i(\mu_b - \mu_a^*) \frac{1}{E-\mu_b} M_b \tag{2.71}$$

Из (2.71) видно, что отклонение $W(E)$ от распределения, соответствующего сумме Брейт-Вигнеровских резонансов непосредственно связано с неортогональностью распадных состояний.

3. Некоторые частные случаи

3.I. Одноканальный случай

В разделе 3 будут рассмотрены некоторые частные случаи задачи о n -уровнях. Я начну с процесса формации суперпозиции резонансов в одноканальном случае N =I. Тогда индексы α , $\beta = 1$ и формула (2.I5) переходит в $T = T_{\alpha\alpha} = T_{11} = \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}$. Тогда в силу (2.23) можно записать амплитуду в виде

$$T = Sp \frac{i}{E-H} (H-H^{+}) \tag{3.I}$$

В рассматриваемом случае матрица T может быть выражена через собственные значения H [10,16]. Действительно, если перейти к S - матрице, то очевидно, что унитарная S -матрица, имеющая полюса при $E = \mu_a$, $a=1,2,\dots,n$ имеет вид

$$S = \Pi \frac{(E-\mu_a^{*})}{(E-\mu_a)} \tag{3.2}$$

Уравнение (3.I) содержит, однако, несколько большую информацию, чем (3.2), так как это оно, в принципе, как будет показано ниже, позволяет сделать некоторые заключения о свойствах корней μ_a , в то время как в (3.2) μ_a являются произвольными параметрами.

Выражение (3.2) легко представить в виде суммы по полюсам, эквивалентной (2.29), (2.35). Для T-матрицы в случае двух уровней это выражение имеет вид

$$-iT = \frac{(\mu_1-\mu_1^*)(\mu_1-\mu_2^*)}{(E-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)} + \frac{(\mu_2-\mu_2^*)(\mu_2-\mu_1^*)}{(E-\mu_2)(\mu_2-\mu_1)} \qquad (3.3)$$

Обобщение на случай n -уровней тривиально.

3.2. "Зомби" - уровни.

Своеобразными особенностями обладает случай, когда какие-то из исходных уровней i , перемешивание и распад которых описывается матрицей H_{ik} , не взаимодействуют с континуумом, Стодольский называет такие уровни "зомби". Рассмотрим сначала случай двух состояний, одно из которых есть зомби.

В этом случае, по определению, матрица Т равна

$$T = A_{01}\left(\frac{1}{E-H}\right)_{11} A_{10} \qquad (3.4)$$

где $\alpha=\beta=0$ есть номер (единственного) внешнего канала, а матрица $H-E$ имеет вид

$$\|H-E\| = \left\| \begin{matrix} E_1 - i\frac{\Gamma_1}{2} - E & \gamma \\ \gamma & E_2 - E \end{matrix} \right\| \qquad (3.5)$$

где

$$\Gamma_1 = A_{10}\,A_{10}^* \qquad (3.6)$$

Из (3.4), (3.5) следует окончательный ответ

$$T(E)=\frac{\Gamma_1(E-E_2)}{(E_2-E)(E_1-i\frac{\Gamma_1}{2}-E)-|\gamma|^2} \qquad (3.7)$$

Обратите внимание на характерное явление: при $E=E_2$ амплитуда (T(E) обращается в 0. Это означает, что в этой точке рассеяние исчезает - уровень I из-за наличия зомби перестает раскачиваться.

Это явление используется для борьбы с качкой корабля[21]. Делается система резервуаров (цистерны Фрама), в которых вода может переливаться с одного борта на другой. Тогда, если период собственных колебаний воды совпадает с периодом боковой волны, качка корабля гасится.

Вернемся в (3.7) и найдем корни H. Характеристическое уравнение имеет вид

$$E^2-E\left(E_1+E_2-\frac{i\Gamma_1}{2}\right)+E_2\left(E_1-i\frac{\Gamma_1}{2}\right)-\gamma^2=0 \qquad (3.8)$$

(Без ограничения общность можно положить $\gamma=\gamma^*$) и

$$\mu_{1,2}=\frac{E_1+E_2-i\frac{\Gamma_1}{2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(E_1-i\frac{\Gamma_1}{2}-E_2\right)^2+4\gamma^2} \qquad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.3) или разлагая (3.7) на простейшие дроби, получим окончательное выражение Т-матрицы через параметры матрицы H.

Рассмотрим некоторые примеры. Начнем со случая полного вырождения. (Совпадение μ_1, μ_2). Очевидно, что полное вырождение возможно, если

$$E_1 = E_2 \; ; \qquad \gamma = \frac{\Gamma}{4}. \tag{3.10}$$

Когда это может реализоваться? Либо в результате случайности (на первый взгляд, маловероятной), либо если матрица H зависит от двух параметров, которые мы можем произвольно варьировать.

Первый случай, может быть реализуется в случае A_2 мезона. Примером второй ситуации является рассмотренный Лассила и Русканеном [6] случай атома, находящегося в магнитном и электрическом полях (Уровни 2P, 2S). Тогда варьируя H можно получить $E_I = E_2$, а варьируя поле E, которое определяет γ, можно добиться того, что $\gamma = \frac{\Gamma_1}{4}$.

В случае, если (3.10) справедливо

$$\mu_1 = \mu_2 = E - i\frac{\Gamma}{4} \tag{3.11}$$

и

$$T(E) = \frac{\Gamma (E - E_2)}{\left(E - E_0 + i\frac{\Gamma}{4}\right)^2} \tag{3.12}$$

Формула (3.12) была впервые получена Ватсоном и Гольдбергером [4].

Рассмотрим теперь случай слабого перемешивания уровней I,2.

Этот случай может иметь место, если

$$|\gamma| \ll \left| E_1 - E_2 - \frac{i\Gamma_1}{4} \right| \tag{3.13}$$

Тогда, разлагая корень в (3.9), получим

$$\mu = \frac{E_1 + E_2 - \frac{i\Gamma_1}{2}}{2} \pm \frac{E_1 - \frac{i\Gamma_1}{2} - E_2}{2} \pm \frac{\gamma^2}{E_1 - E_2 - i\frac{\Gamma_1}{2}} \tag{3.14}$$

или

$$\mu_1 \simeq E_1 - \frac{i\Gamma_1}{2}$$

$$\mu_2 \simeq E_2' - i\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma\gamma^2}{(E_1 - E_2)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \tag{3.15}$$

где поправка к вещественной части включена в E_2'. Таким образом, в этом приближении собственные состояния H близки к исходным уровням, причем одно из них имеет ту же энергию и ширину, что уровень I, а другое, близкое к уровню 2, имеет малую ширину, равную

$$\Gamma_2' = \frac{\gamma^2 \Gamma}{(E_1 - E_2)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \tag{3.16}$$

В рассматриваемом приближении для T матрицы получаем, используя (3.3)

$$T \simeq \frac{\Gamma}{E - E_1 + i\frac{\Gamma_1}{2}} + \frac{1}{E - E_2' + i\frac{\Gamma_2'}{2}} \cdot \frac{\gamma^2 \Gamma}{(E_2 - E_1 + i\frac{\Gamma_1}{2})^2} \tag{3.17}$$

Такая формула и ее обобщение на случай n узких резонансов и произвольного числа каналов было получена с помощью приближенного условия унитарности И.С.Шапиро и использовалась для феноменологического описания гигантских ядерных резонансов [8-10].

3.3. Случай n уровней типа зомби

Формулу (3.7) для T(E) легко получить из Файнмановских графиков. Диаграмма обычной собственной энергии для уровня I, взаимодействующего с зомби-состоянием 2 изображена на рис.7. Соответственно, собственно-энергетическая часть для уровня I есть Σ_{11}

$$\Sigma_{11} = E_1 - \frac{i\Gamma_1}{2} + \gamma \frac{1}{E-E_2} \gamma \tag{3.18}$$

а пропагатор D_{11} равен

$$D_{11} = \frac{1}{E - \Sigma_{11}(E)} = \frac{1}{E - E_1 + \frac{i\Gamma_1}{2} - \frac{\gamma^2}{E-E_2}} \tag{3.19}$$

что в силу соотношения

$$T(E) = A_{01} D_{11} A_{10}$$

снова приводит к (3.7).

Пусть теперь уровень I может переходить в n уровней типа зомби с константами перехода $\gamma_{0\tau}$. Тогда собственная энергия уровня I есть

$$\sum_{11} = E_1 - i\frac{\Gamma_1}{2} + \sum_{\tau=1}^{n} \frac{\gamma_{\tau+1}^2}{E - E_{\tau+1}} \qquad (3.20)$$

и

$$T(E) = \frac{\Gamma_1}{E - E_1 + i\frac{\Gamma_1}{2} - \sum\limits_{\tau=1}^{n} \frac{\gamma_{\tau+1}^2}{E - E_{\tau+1}}} \qquad (3.21)$$

Амплитуда, описываемая формулой (3.I9), обладает, очевидно, теми же характерными свойствами, что и амплитуда (3.7); T(E) обращается в ноль, если энергия совпадает с энергией одного из зомби-уровней. Таким образом, сечение рассеяния $\sigma(E) \sim |T(E)|^2$ должно иметь "окна".

Рассмотрим теперь случай, когда зомби-уровни имеют собственные ширины, равные $2\varepsilon_{\tau+1}$, возникающие за счет распадов в каналы отличные от канала $\alpha = 0$, и не связанные с уровнем i = I. Тогда амплитуда T(E) равна

$$T(E) = \frac{\Gamma_1}{E - E_1 + i\frac{\Gamma_1}{2} - \sum\limits_{\tau=1}^{n} \frac{\gamma_{\tau+1}^2}{E - E_{\tau+1} + i\varepsilon_{\tau+1}}} \qquad (3.22)$$

Рассмотрим более детально свойства суммы $\sum^{n}$, стоящей в знаменателе (3.22).

$$\sum \frac{\gamma_{\tau+1}^2}{E - E_{\tau+1} + i\varepsilon_{\tau+1}} = \sum \frac{\gamma^2 (E - E_{\tau+1} - i\varepsilon_{\tau+1})}{(E - E_{\tau+1})^2 + \varepsilon_{\tau+1}^2} \qquad (3.23)$$

Если уровни расположены достаточно густо, то в $Re\Sigma$ происходит сильная компенсация, а остаток слабо зависит от E и не существенен (его можно включить в перенормировку E_1)(. Что касается $Im\Sigma$, то если расстояния между зомби-уровнями $\Delta = \overset{\circ}{E}_{\tau+1} - E_\tau$ меньше, чем ε, сумма сходится на $\Delta \overset{\circ}{E} \sim \varepsilon$.
В этом приближении, если считать, что ε и γ не меняются существенно на $\Delta E \sim \varepsilon$, мнимая часть Σ не зависит от ε и равна $-i\pi\gamma^2(E)\rho(E)$, где $\rho(E)$-плотность зомби-уровней. Таким образом, окончательно

$$T(E) = \frac{\Gamma_1}{E - E_1 + i\frac{\Gamma_1}{2} + i\pi\gamma^2\rho(E)} \qquad (3.24)$$

и, если $\gamma(E) = const.$, $\rho(E) = const$, влияние зомби-уровней сводится к увеличению ширины уровня на величину

$$\Delta\Gamma = 2\pi\gamma^2\rho(E) \qquad (3.25)$$

Это уравнение известно в литературе под именем " spread equation ". Из вышеизложенного видно, что эффект увеличения ширины уровня I не связан с эффектом, рассматривавшимся в разделе (2.2), и целиком обусловлен введенным нами дополнительным поглощением на зомби-уровнях.

В заключение еще два замечания.

I. Сумму в (3.22) можно вычислить явно, если γ_τ, ε_τ есть константы, и уровни эквидистантны [II, 23].

2. Уравнение (3.25) может быть справедливо только в очень искусственных условиях. Действительно, как было видно,

оно справедливо, если $\Delta E \ll \mathcal{E}$. Это означает, что узкие уровни должны сильно перекрываться. Но тогда, если у этих уровней есть общие каналы распада, они должны сильно перемешиваться, что не учтено в (3.22).

Мы видим, что условием справедливости (3.25) является отсутствие общих каналов распада у зомби-уровней.

Более естественным является предположение полного перемешивания всех зомби-уровней, использованное в работе А.Е.Кудрявцева [II].

Для вычисления T(E) в этом случае найдем собственную энергию уровня E_I. Она дается суммой графиков вида (рис.8), где i, k - номера зомби-уровней $i, k = z+1$, темный кружок соответствует вещественной константе перехода $1-i$, равной γ, а светлый - комплексному матричному элементу $\varkappa$ переходов i, k уровней, возникающих за счет их взаимодействия с континуумом.

Если все γ, $\varkappa$ равны, то Σ_{11} легко вычисляется

$$\Sigma_{11} = \gamma^2 \left(\sum^{n} \frac{1}{E-E_{z+1}} + \sum_{z,\rho}^{n,n} \frac{1}{E-E_{z+1}} \varkappa \frac{1}{E-E_{\rho+1}} + \dots \right) = \tag{3.26}$$

$$= \gamma \sum_{z} \frac{1}{E-E_{z+1}} \left(\frac{1}{1-\sum\limits_{\rho} \frac{\varkappa}{E-E_{\rho+1}}} \right)$$

и соответственно,

$$T(E) = \frac{\Gamma_1}{E - E_1 + \frac{i\Gamma_1}{2} + \gamma^2 \dfrac{\sum\limits_{z} \frac{1}{E-E_{z+1}}}{1 - \sum\limits_{z} \frac{\varkappa^2}{E-E_{z+1}}}} \tag{3.27}$$

Так же, как и в случае (3.22) суммирование в (3.27) может быть выполнено явно, если сделать дополнительные упрощения.

Эта формула для T(E) совпадает с полученной в [II] за исключением того, что выражению для суммы по узким резонансам в знаменателе (3.27) в этой работе соответствует не $\sum \frac{1}{E-E_{\tau+1}}$, а $\sum \frac{1}{E-E_{\tau+1}+\varkappa}$,что, в частности, не переходит в правильную формулу для случая $\tau=1$.

4. Зависимость от времени для распада суперпозиции перекрывающихся уровней.

4.I. Уравнение Шредингера и условие унитарности

Эффективный гамильтониан H_{ik} может быть использован для описания зависимости от времени когерентной суперпозиции n резонансов. В исходном ортонормированном базисе $|i\rangle$ состояние системы описывается n -компонентной ψ -функцией $\psi=(C_1,\dots,C_n)$ Тогда уравнение движения есть, как обычно,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \tag{4.I}$$

или, если выписать индексы явно

$$i\frac{\partial C_i}{\partial t}=H_{ik}C_k \tag{4.2}$$

Эффективное уравнение Шредингера (4.2) с неэрмитовым H можно вывести, рассматривая задачу о n уровнях в теории затухания.

По существу, дело сводится к обоснованию правила обхода в (2.59), приводящему к условию унитарности (2.23). При отсутствии распадов (4.2) превращается в обычное матричное уравнение Шредингера.

Мы уже видели, что (2.23) непосредственно обеспечивает унитарность T(E). Столь же простой смысл имеет это условие и при временном описании. Действительно, из уравнения (4.2) и (2.23) непосредственно следует, что изменение нормы состояния ψ равно

$$\frac{\partial(\psi^*\psi)}{\partial t} = -i\psi^*(H-H^+)\psi = = -(A_{\alpha i} C_i)(A_{\alpha k} C_k)^* \qquad (4.3)$$

Очевидно, что $A_{\alpha i} C_i$ есть не что иное, как амплитуда распада состояния ψ в канал α. Таким образом, физический смысл правила обхода в (2.59) очевиден: изменение нормы исходного состояния равно числу распадов, просуммированному по всем каналам распада.

Таким образом, в случае системы n нестабильных уровней ее развитие во времени описывается уравнением (4.2), где H_{ik} - произвольная неэрмитова матрица.

В общем случае матрица H имеет n различных векторов $|a\rangle$

$$|a\rangle = C_{ia}|i\rangle$$

уже использовавшихся в разделе 2.

Состояния $|a\rangle$ распадаются экспоненциально

$$\psi_a(t) = e^{-i\mu_a t}\,\psi_a(0) \tag{4.4}$$

где

$$\psi_a(0) = C_{ia} \tag{4.5}$$

Хорошо известно, что состояния $|a\rangle$ линейно независимы и, таким образом, образуют полный базис в пространстве состояний.

Произвольное начальное состояние $\psi(0)$ можно представить в виде

$$\psi(0) = X_a\,\psi_a(0) \tag{4.6}$$

и

$$\psi(t) = e^{-i\mu_a t}\,X_a\,\psi_a(0) \tag{4.7}$$

Рассмотрим теперь более детально условие унитарности (2.23), (4.3). В обзоре Белла и Штайнбергера [18] был дан прямой вывод условия унитарности (2.28), который я сейчас изложу.

Рассмотрим состояние, имеющее при $t = 0$ вид

$$\psi(0)\rangle = X|a\rangle + Y|b\rangle \tag{4.8}$$

Введем амплитуды распада состояний $|a\rangle$, $|b\rangle$ в канал α: $A_{\alpha a}, A_{\alpha b}$.

В момент времени t состояние (4.8) переходит в

$$|\psi(t)\rangle = X e^{-i\mu_a t}|a\rangle + Y e^{-i\mu_b t}|b\rangle \tag{4.9}$$

Приравняем теперь изменение нормы ψ полному числу распадов, тогда

$$\begin{aligned} & i(\mu_a-\mu_a^*)XX^* e^{-i(\mu_a-\mu_a^*)t}\langle a|a\rangle + i(\mu_b-\mu_b^*)YY^* e^{-i(\mu_b-\mu_b^*)t}\langle b|b\rangle \\ & + i(\mu_a-\mu_b^*)XY^* e^{-(\mu_a-\mu_b^*)t}\langle b|a\rangle + i(\mu_b-\mu_a^*)Y^*X e^{-i(\mu_b-\mu_a^*)t}\langle a|b\rangle = \\ & = A_{\alpha a}A_{\alpha a}^* XX^* e^{-i(\mu_a-\mu_a^*)t} + A_{\alpha b}A_{\alpha b}^* YY^* e^{-i(\mu_b-\mu_b^*)t} + \\ & + A_{\alpha a}A_{\alpha b}^* XY^* e^{-i(\mu_a-\mu_b^*)t} + A_{\alpha a}^* A_{\alpha b} X^* Y e^{-i(\mu_b-\mu_a^*)t} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Так как X , Y произвольные комплексные числа, то из уравнения (4.10) следует

$$(\mu_a-\mu_b^*)\langle b|a\rangle = -i A_{\alpha a} A_{\alpha b}^* \tag{4.11}$$

что совпадает с полученным ранее уравнением (2.28), из (4.11) следует также

$$(\mu_a-\mu_a^*)\langle a|a\rangle = -i A_{\alpha a} A_{\alpha a}^*$$

Что также, разумеется содержится в (2.28).

Приведенный выше вывод при своей кажущейся простоте содержит некоторые тонкости. Мы предполагали, что амплитуда распада в канал α в момент времени t равна

$$A_{\alpha a} X e^{-i\mu_a t} + A_{\alpha b} Y e^{-i\mu_b t} \qquad (4.12)$$

Таким образом предполагается, что амплитуды распадов состояний a , b суммируются когерентно. Может показаться, что такая процедура ошибочна. Действительно, казалось бы, распределение по энергии продуктов распада состояний a и b описывается формулой Брейта-Вигнера и пропорционально, соответственно

$$\frac{\Gamma_a^2}{(E-E_a)^2+\frac{\Gamma_a^2}{4}} , \quad \frac{\Gamma_b^2}{(E-E_b)^2+\frac{\Gamma_b^2}{4}} \qquad (4.13)$$

Тогда, если $|E_a - E_b| >> \Gamma_a, \Gamma_b$, распределения в канале $a \to \alpha$, и $b \to \alpha$ не перекрываются, Это, однако, не так. Формула (4.10) описывает экспериментальную ситуацию, когда момент распада хорошо определен. Для того, чтобы интерференционные члены в (4.10) были наблюдаемы, необходимо, чтобы неопределенность в определении момента t , равная Δt , удовлетворила условию

$$\Delta t << \frac{1}{E_a - E_b}$$

Но если момент времени фиксируется с точностью Δt , продуктам распада передается энергия

$$\Delta E \sim \frac{1}{\Delta t} >> E_a - E_b$$

Таким образом, в этих условиях распределение по энергии продуктов распада определяемое ΔE должно быть широким, с шириной большей $E_a - E_b$, что и обеспечивает полное перекрытие волновых функций в каналах $a \to \alpha$, $b \to \alpha$.

В случае плохого разрешения по времени, когда $\Delta t \gg \frac{1}{E_a - E_b}$ распределения по энергии действительно описывается формулами (4.13) и не перекрываются. В этом случае, однако, надо произвести усреднение по $t \sim \Delta t$ в (4.10). Это усреднение приводит к выпадению интерференционных членов, и закон распада сводится просто к сумме экспонент.

4.2. Общий вид решений уравнения (4.2) и вырожденный случай

Как мы видели, распад произвольной суперпозиции нестабильных уровней описывается уравнениями (4.1), (4.2), где H_{ik} произвольная неэрмитова матрица. (единственное ограничение в общем случае есть требование $\Im \mu_a < 0$ для всех корней). Таким образом, мы сталкиваемся здесь с хорошо известным и детально описанным [25, 26] общим случаем системы линейных дифференциальных уравнений. В целях полноты изложения я напомню основные результаты, ограничившись небырожденным и полностью вырожденными случаями.

Удобно использовать матричную запись решения

$$\psi(t) = e^{-iHt}\,\Psi(0) \qquad (4.14)$$

Используя метод Сильвестра-Лагранжа (4.I4), можно записать в виде

$$\psi(t) = e^{-i\mu_a t} \prod_{b \neq a} \frac{(H-\mu_a)}{(\mu_a-\mu_b)} \psi(0) \qquad (4.I5)$$

Очевидно, что (4.I4), (4.I5) эквивалентны (4.6) и (4.7). Напомню также, что всегда

$$\prod_a (H-\mu_a) \equiv 0 \qquad (4.I6)$$

В случае $n=2$ уравнение (4.I5) имеет вид

$$\psi(t) = \left(\frac{H-\mu_2}{\mu_1-\mu_2} e^{-i\mu_1 t} + \frac{H-\mu_1}{\mu_2-\mu_1} e^{-i\mu_2 t} \right) \psi(0) \qquad (4.17)$$

Рассмотрим теперь случай вырожденных корней. Для $n = 2$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} H_{11}-\mu & H_{12} \\ H_{21} & H_{22}-\mu \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.I8)$$

имеет корни

$$\mu_{1,2} = \frac{H_{11}+H_{22}}{2} \pm \sqrt{(H_{11}-H_{22})^2 + H_{12}H_{21}} \qquad (4.I9)$$

Если распады отсутствуют, матрица Н эрмитова $H_{12} = H_{21}^*$, и вырождение возможно, только, если независимо $H_{12} = H_{21} = 0$ и $H_{11} = H_{22}$ см. [I] стр. 333. Тогда связь уровней исчезает, и матрица H принимает тривиальный вид

$$H = \begin{Vmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{Vmatrix} \tag{4.20}$$

Более интересен случай неэрмитового H. Тогда вырождение возможно и при $H_{21} \neq 0$. Предельный переход в (4.I7) дает

$$\psi(t) = \left[1 - i(H-\mu)t\right] e^{-i\mu t} \psi(0) \tag{4.2I}$$

Уравнение (4.I) в этом случае имеет только одно экспоненциальное решение, соответствующее $\psi(0)$, являющемуся собственным вектором матрицы H.

$$(H-\mu)\psi = 0 \tag{4.22}$$

Если

$$\psi(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

и $(H-\mu)\psi \neq 0$, решение будет неэкспоненциальным.

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} c_1 - it\left[(H_{11}-\mu)c_1 + H_{12}c_2\right] \\ c_2 - it\left[H_{21}c_1 + (H_{22}-\mu)c_2\right] \end{pmatrix} e^{-i\mu t} \tag{4.24}$$

за исключением случая, когда $H_{11}=H_{22}=\mu$, $H_{12}=H_{21}=0$, что конечно, может быть и в неэрмитовом случае. В общем случае полностью вырожденных n уровней решение имеет вид

$$\psi(t)=\left(1-\sum_{1}^{n-1}(-it)^{k}(H-\mu)^{k}\right)e^{-i\mu t}\psi(0) \qquad (4.25)$$

Формулу (4.25) легко получить из следующего рассуждения[13].

Перепишем решение

$$\psi(t)=e^{-iHt}\psi(0)$$

в виде

$$\psi(t)=e^{-i(H-\mu)t}e^{-i\mu t}\psi(0) \qquad (4.26)$$

Разложим правую экспоненту в ряд. В силу уравнения (4.16) имеющего в вырожденном случае вид

$$(H-\mu)^{n}\equiv 0 \qquad (4.27)$$

все члены разложения, начиная с n-того , равны 0, что и приводит к формуле (4.25). Разумеется, обращение в ноль $(H-\mu)^{k}$ может случайно произойти и раньше, например, при $H_{ik}=\mu\delta_{ik}$, начиная с $k=1$.

В случае, если $(H-\mu)^{k}\neq 0$ при $k<n$, по определению существует такой вектор $\psi\rangle$, что все $(H-\mu)^{z}|\psi\rangle\neq 0$ при $z<n$.

Тогда в базисе, определяемом соотношениями $|1\rangle = |\psi\rangle$, $|r+1\rangle = (H-\mu)|r\rangle$, матрица $(H-\mu)$ приводится к жордановой форме

$$\|H-\mu\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \tag{4.28}$$

4.3. Некоторые свойства системы двух вырожденных уровней и метод Фока-Крылова.

В этом разделе будут детально разобраны свойства простейшего вырожденного случая для $n = 2$ и одного распадного канала. Математически случай тривиален, но его интерпретация по началу вызывала затруднения. В одноканальном случае всегда существует такой ортонормированный базис, что состояние 2 не связано с констинуумом. В этом базисе матрица H имеет вид (3.5), и без ограничения общности можно считать, что параметры γ и A_1 вещественны. Тогда

$$H = \left\| \begin{matrix} E_1 - i\frac{\Gamma_1}{2} & \gamma \\ \gamma & E_2 \end{matrix} \right\| \tag{4.29}$$

и

$$\Gamma_1 = A_1^2 \tag{4.30}$$

Условие унитарности имеет вид

$$W(t) = \Gamma |C_1|^2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2\right) \qquad (4.3I)$$

где $W(t)dt$ - число событий, регистрируемых в распадном канале. Напомню, что условие вырождения корней (3.I0) имеет вид ,

$$E_1 = E_2$$

$$\gamma = \frac{\Gamma}{4}$$

При этом уравнение (4.2I) имеет вид

$$\Psi(t) = \left(1 - it\begin{Vmatrix} -i\frac{\Gamma}{4} & \frac{\Gamma}{4} \\ \frac{\Gamma}{4} & i\frac{\Gamma}{4} \end{Vmatrix}\right) e^{-\frac{\Gamma}{4}t + i}\,\Psi(0) \qquad (4.32)$$

а уравнение (4.3I) не изменяется.

Очевидно, что поведение $W(t)$ существенно зависит от начальных условий, задаваемых $C_1(0)$, $C_2(0)$. Это обстоятельство осталось не замеченным Гольдбергером и Ватсоном [3] и было разъяснено Беллом и Гебелем [5] на двух примерах. Один из рассматривавшихся ими примеров это два нестабильных уровня в двугорбом потенциале (рис.9). Подбирая высоты горбов, можно добиться вырождения уровней I,2. Свойства уровней I,2 как раз соответствуют нашим уровням I,2, поскольку с уровня 2 возможны переходы только на уровень I, а уровень I взаимодействует с континуумом. Другой пример, рассматривавшийся в [5] , это модель Ли с двумя уровнями. Этот пример непосредственно приводит к уравнению (4.I) с $n = 2$.

Вернемся к (4.32) и рассмотрим случай $\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В первом случае

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} 1 - t\frac{\Gamma}{4} \\ -it\frac{\Gamma}{4} \end{pmatrix} e^{-\frac{\Gamma}{4}t + iE_1 t} \tag{4.33}$$

и

$$W(t) = \Gamma\left(1 - t\frac{\Gamma}{4}\right)^2 e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \tag{4.34}$$

При $t = 0$

$$W(0) = \Gamma$$

Норма $|\psi(t)|^2$ равна

$$|\psi|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\left(1 - \frac{1}{4}t\Gamma\right)^2 + t^2\frac{\Gamma^2}{16}\right] \tag{4.35}$$

и уравнение (4.3I) выполнено. Характер изменения $W(t)$ как функции t легко понять. При t вблизи нуля наличие уровня 2 не проявляется, так как $|C_2(t)|^2 \sim t^2$, и вклад уровня 2 в условие унитарности не существенен при $t \to 0$.

При конечных t переход системы в состояние 2, не взаимодействующее с континуумом, приводит к уменьшению числа распадов. В частности, при $\frac{\Gamma}{4}t = 1$, когда $C_1(t) = 0$, $W(t) = 0$.

Совсем иначе ведет себя $W(t)$, если $\psi(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тогда

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}-i\frac{\Gamma}{4}t\\ \\ 1+\frac{\Gamma}{4}t\end{pmatrix}e^{-\frac{\Gamma}{4}t+E_1t} \qquad (4.36)$$

и

$$W(t)=\frac{\Gamma^3}{16}t^2e^{-\frac{\Gamma}{4}t} \qquad (4.37)$$

При t = 0 распады отсутствуют. Заметим, что вероятность обнаружить систему в состоянии 2 есть

$$|C_2(t)|^2\sim\left(1+\frac{\Gamma}{4}t\right)^2e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \qquad (4.38)$$

Именно формула (4.38) была получена Гольдбергером и Ватсоном и рассматривалась ими как "закон распада", соответствующий двойному полюсу в T(E). Очевидно, однако, что если начальное состояние возбуждается в канале рассеяния, то это соответствует $\psi(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, что соответствует числу событий во внешнем канале (4.34). Что касается (4.38), то такой вид $|C_2(t)|^2$ может возникнуть только в опытах типа реакции рождения, когда начальное состояние образуется не в канале распада, а другим способом. При этом, однако, $W(t)$ описывается (4.37).

В связи с вышеизложенным, я хотел бы сделать еще одно замечание. Отсутствие прямой связи между (4.38) и (4.37) может показаться странным с точки зрения описания нестабильных состояний, предложенного в известной работе Фока и Крылова[27]. В действительности, однако, этот метод для описания кратных полюсов неприменим. Для того, чтобы это увидеть, вспомним, как выглядит метод Фока и Крылова для одного полюса. Пусть начальное состояние, соответствующее нестабильной частице, есть $\psi(0)$. Тогда $\psi(0)$ можно разложить по собственным состояния $\psi_E(0)$ истинного полного гамильтониана.

$$\psi(0) = \int_0^\infty a(E)\psi_E(0)\,dE \tag{4.39}$$

Тогда

$$\psi(t) = \int_0^\infty e^{-iEt} a(E)\psi_E(0)\,dE \tag{4.40}$$

Амплитуда вероятности того, что система осталась в исходном состоянии есть

$$C(t) = \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle \tag{4.41}$$

и для нормированных на $\delta(E-E')$ состояний ψ_E

$$C(t) = \int_0^\infty |a(E)|^2 e^{-iEt}\,dE \tag{4.42}$$

Если мы считаем, что вероятность отсутствия распада равна $|C(t)|^2$, то зная $a(E)$, мы однозначно получаем закон распада. Для того, чтобы получить экспоненциальный закон распада

$$|C^2(t)| \sim e^{-\Gamma t} \tag{4.43}$$

нужно взять распределение

$$|a^2(E)| = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} \tag{4.44}$$

Тогда, ограничиваясь в (4.42) вкладом полюса, получаем закон распада (4.43).

Не следует, однако, забывать о том, что основным вопросом при использовании метода[27] является вопрос о том, почему и в какой степени, независимо от условий возбуждения нестабильного уровня и детальных свойств гамильтониана, C(E) задается (4.44). Действительно, если про этот вопрос забыть, то можно получить закон распада (4.43) и в свободном пространстве, беря разложение по плоским волнам с C(E) (4.44). Очевидно, однако, что это не имеет никакой связи с нестабильными состояниями.

В работе [27], рассматривалось нестабильное состояние, возникающее за счет потенциального барьера. В такой задаче начальное состояние задается частью пакета "застрявшей в яме". Тогда, как было показано Фоком и Крыловым, можно, [redacted], сделав правдоподобные предположения, получить (4.44). Аналогично, можно, вероятно, было бы показать, что в теории возмущений для задачи с одним уровнем с амплитудой $C(t)$, взаимодействующим с континуумом, состоянию, когда $C_1(0)=1$, а континуум не возбужден, соответствует С(Е) (4.44). Очевидно, что в последнем случае просто

$$< \psi(0)|\psi(t)> = C(t) \tag{4.45}$$

и метод Фока и Крылова даст то же, что и теория затухания или непосредственно уравнение (4.I) с n = I.

Рассмотрим теперь случай $n=2$. Тогда $\psi(0)$ задается двумя числами C_1 , C_2 . Если мы начнем проделывать описанные выше для случая n = I процедуры, то мы получим, что

$$<\psi(0)|\psi(t)> = C_1^*(0)C_1(t) + C_2^*(0)C_2(t) \tag{4.46}$$

Величина

$$< \psi(0)|\psi(t)>^2$$

есть действительно вероятность того, что система находится в исходном состоянии. Эта вероятность, однако, совершенно не определяет вероятность отсутствия распада в обычном смысле, то есть вероятность того, что не появилось частиц в распадном канале. Так определенная вероятность, очевидно, есть не что иное, как вероятность того, что система находится либо на уровне I, либо на уровне 2, и равна

$$|C_1(t)|^2 + |C_2(t)|^2 \tag{4.47}$$

Именно эта величина входит в условие унитарности (4.31). Существенно при этом, что система двух вырожденных уровней так же, как и система уровней в общем случае, имеет две степени свободы и может не только распадаться, но и переходить из состояния 2 в I и наоборот. Поэтому изменение состояния не эквивалентно распаду, и вероятность отсутствия распада не может быть задана одной амплитудой, что опять связано с наличием двух степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, "Квантовая механика". Москва, 1963, стр.638.

2. H.Feshbach, Ann. of Phys. 5, 357 (1958).

3. M.L.Goldberger, K.M.Watson, Phys.Rev. 136B, 1472 (1964)

4. М.Гольдбергер, К.Ватсон, "Теория столкновений", "Мир", 1967, стр.444.

5. J.S.Bell, S.J.Goebel, Phys.Rev. 138B, 1817 (1964)

6. R.E.Lassila, V.Ruuskanen, Phys.Rev.Lett. 17, 490 (1966)

7. И.Ю.Кобзарев, Н.Н.Николаев, Л.Б.Окунь, ЯФ, 10, 864(1969)

8. И.С.Шапиро, Письма ЖЭТФ 8, 158 (1968).

9. I.S.Shapiro, Nucl.Phys. A122, 645 (1968)

10. И.С.Шапиро, "Перекрывающиеся уровни и гигантские резонансы".
Труды второго проблемного симпозиума по физике ядра. Новосибирск, 1970.

11. А.Е.Кудрявцев, ЯФ 10, 309 (1969).

12. J. Jersak, препринт, Дубна Е2-3470.

13. M.Lokajcek, Chech. J. Phys. B19, 263 (1969)

14. М.Локайчек, препринт, Дубна, Р2-4348.

15. В.Г.Барышевский, В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий, ЖЭТФ 57, 157, (1969).

16. В.Л.Любошиц, препринт, Дубна Р2-5328 (1970).

17. L.Stodolsky, Prepr. SLAC-Pub-776 (1970)

18. J.S. Bell, J. Steinberger, Proc. Oxford Conf. on Elementary Particles, 1965, p.195

19. И.Ю.Кобзарев, Л.Б.Окунь, И.Я.Померанчук, ЖЭТФ 41, 495, (1961).

20. М.В.Терентьев, Письма ЖЭТФ 6, 521 (1967).

21. А.Н.Крылов, "Избранные труды", Издательство АН СССР, 1958, стр.81.

22. D. Robson, Phys. Rev. 137B, 535 (1963)

23. Д.Ф.Зарецкий, М.Г.Урин, ЯФ 8 731 (1968).

24. Y. Dothan, D. Horn, Phys. Rev, 1D, 916 (1970)

25. И.Г.Петровский, "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений", Москва, 1970, стр. 157.

26. Ф.Р.Гантмахер, "Теория матриц", Гостехиздат, 1953, стр.87.

27. И.С.Крылов, В.А.Фок, ЖЭТФ 17, 93 (1947).

$$A = \begin{array}{c|c|c|} & i'=1,\dots N & i'=N+1,\dots,N+n \\ \hline N & 0 & A_{\alpha i} \\ \hline n & A_{k\beta} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$H = \begin{array}{c|c|c|} & N & n \\ \hline N & 0 & 0 \\ \hline n & 0 & H_{ik} \\ \hline \end{array}$$

Рис 1

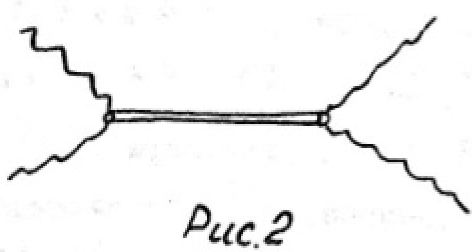

Рис. 2

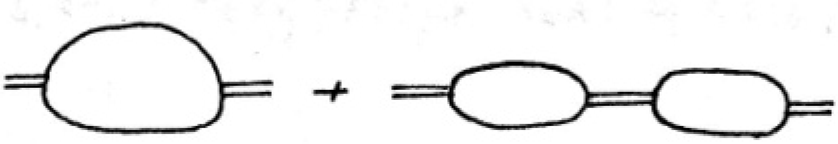

Рис 3

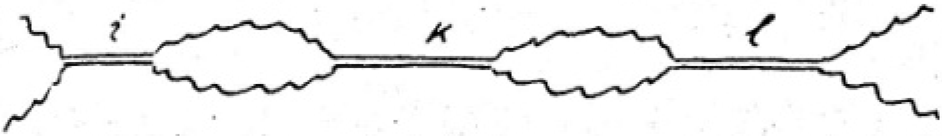

рис 4

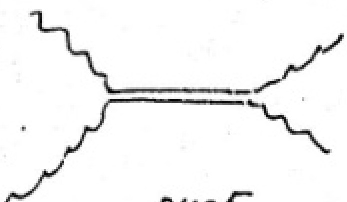

рис5

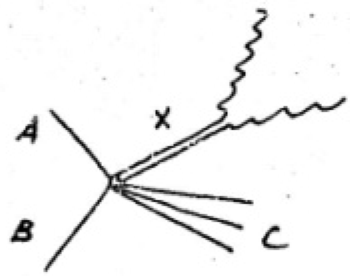

рис 6

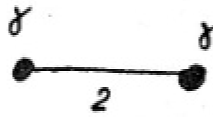

Рис 7

рис 8

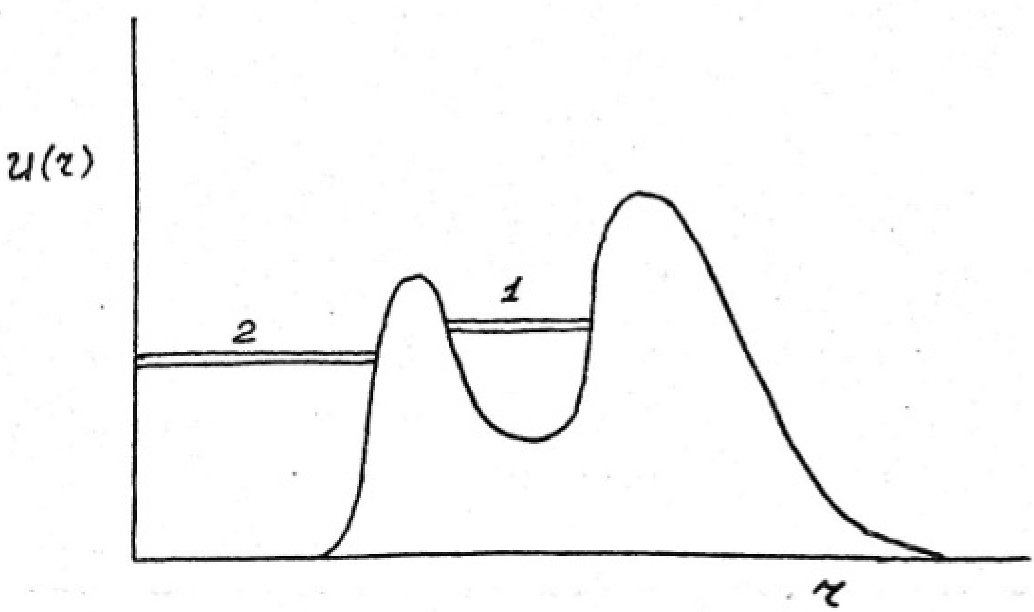

Рис. 9

Л-61524 Подписано к печати 21.IУ.71 г. Зак. 516. Тир. 200

Типография МИФИ М.Пионерская, 12