

539.1
В-25

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике.
3 сессия

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

(КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИИ)

В. С. ПОПОВ

АТОМНЫЕ УРОВНИ

ПРИ $Z > 137$

МОСКВА — 1972

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
С С С Р

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической и ядерной физике
3 сессия. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ
(Конспекты лекций)

В.С. ПОПОВ

АТОМНЫЕ УРОВНИ ПРИ $Z > 137$

МОСКВА - 1972

570590-570594 (5) 10 0987
КН МАИФМ

СОДЕРЖАНИЕ

- I. Уравнение Дирака при $Z > 137$. Эффективный потенциал.
 - I.1. Кулоновские уровни для точечного заряда.
Сингулярность в точке $Z = 137$.
 - I.2. Эффективный потенциал.
 - I.3. Критический заряд ядра.
 - I.4. Средний радиус и магнитный момент при $Z > 137$.
Отсутствие делокализации при $Z \rightarrow Z_c$.
2. Возмущение непрерывного спектра близким уровнем.
3. Рождение позитронов и поляризация вакуума при $Z > Z_c$.
 - 3.1. Плотность заряда вакуума ρ_{vac} .
 - 3.2. Изменение ρ_{vac} в критической точке.
 - 3.3. Логарифмическое приближение.
4. Критический заряд для сталкивающихся ядер.
 - 4.1. Кинематика.
 - 4.2. Оценка вероятности рождения позитронов.
 - 4.3. Асимптотические формулы для $Z_c(R)$ в задаче двух центров.
 - 4.4. Эффективное сечение рождения e^+ при столкновении ядер.

I. Решения уравнения Дирака при $Z > 137$.

Эффективный потенциал.

I.1. Хорошо известно [1,2], что уравнение Дирака для электрона в кулоновском поле точечного заряда Ze имеет точное решение (в гипергеометрических функциях), причем энергии уровней равна κ):

$$\varepsilon_{nj} = \left[1 + \frac{\zeta^2}{(n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - \zeta^2})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (I.1)$$

где $\zeta = Z\alpha = Z/137$, n - главное квантовое число, κ - собственное значение оператора Дирака $K = -\beta(\vec{\ell}\vec{\sigma} + 1)$:

$$\kappa = \mp(j + \frac{1}{2}) \quad \text{при} \quad j = \ell \pm \frac{1}{2} \quad (I.2)$$

В частности, для основного состояния $1s_{1/2}$ ($n=1$, $\ell=0$, $\kappa=-1$):

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (I.3)$$

При $\zeta = 1$ ($Z = 137$) кривая $\varepsilon_1(\zeta)$ имеет корневую особенность и обрывается, причем энергия доходит до нуля (а отнюдь не до границы нижнего континуума $\varepsilon = -1$).

Формальное продолжение (I.3) на область $\zeta > 1$ приводит к мнимым значениям ε_1 , что физически неприемлемо (для состояний дискретного спектра в одноэлектронной задаче).

^{ж)} В дальнейшем мы всюду пользуемся системой единиц $\hbar = c = m = 1$, где m - масса электрона. Энергия ε измеряется в единицах mc^2 , причем в ε включаем энергию покоя (так что $\varepsilon = 1$ соответствует покоящемуся свободному электрону). Границе нижнего континуума $\varepsilon = -1$ отвечает энергия связи $2mc^2$.

Аналогично ведут себя и энергии других состояний с полным моментом $j = I/2$ *).

1.2. Чтобы понять происхождение этой трудности, удобно свести задачу к форме, тождественной с нерелятивистским уравнением Шредингера. Уравнение Дирака в обычном представлении матриц γ_μ имеет вид:

$$(\vec{\sigma} \vec{p}) \xi = (1 + \varepsilon - V) \eta, \quad (\vec{\sigma} \vec{p}) \eta = -(1 - \varepsilon + V) \xi \quad (I.4)$$

где ξ и η - верхняя и нижняя компонента дираковского спинора ψ . Исключая η , имеем:

$$(\vec{\sigma} \vec{p}) \frac{1}{1 + \varepsilon - V} (\vec{\sigma} \vec{p}) \xi + (1 - \varepsilon + V) \xi = 0 \quad (I.5)$$

Переходя затем к $\varphi = (1 + \varepsilon - V)^{-1/2} \xi$, приводим это уравнение к самосопряженному виду:

$$\Delta \varphi + 2(E - U) \varphi = 0 \quad (I.6)$$

* Так для $n = 2$ имеем: $\varepsilon_{2, \frac{1}{2}} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \zeta^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$

Вообще, уровни $n\frac{1}{2}$ и $n\frac{3}{2}$ при $\zeta < 1$ вырождены по энергии (так наз. "случайное" вырождение, специфическое для кулоновского поля; см. формулу (I.I), куда входит лишь $|x|$, но не его знак). При $\zeta \rightarrow 1$ получаем

$$\varepsilon_{n, \frac{1}{2}} = \frac{n-1}{N} + \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{N^{\frac{1}{2}}} + \dots, \quad N = \sqrt{n^2 - 2n + 2}$$

т.е. у ε возникает корневая особенность в точке $\zeta = 1$.

где $E = \frac{1}{2}(\varepsilon^2 - 1)$,

$$U = \varepsilon V - \frac{1}{2} V^2 + \frac{3}{8W^2} (\nabla V)^2 + \frac{1}{4W} \Delta W + \frac{1}{2W} [\nabla V, \vec{p}] \vec{\sigma} \quad (I.7)$$

($W = 1 + \varepsilon - V$). Формально (I.6) имеет вид обычного уравнения Шредингера; отличие заключается в том, что эффективный потенциал U сам зависит (и вообще говоря, довольно сложным образом) от энергии уровня ε . В важном частном случае, когда исходный потенциал $V(r)$ сферически симметричен, последний член в U имеет смысл спин-орбитального взаимодействия:

$$[\nabla V, \vec{p}] \vec{\sigma} = \frac{V'(r)}{r} (\vec{\ell} \vec{\sigma}), \quad (\vec{\ell} \vec{\sigma}) = -(\kappa + 1),$$

и выражение (I.7) принимает вид:

$$U = \varepsilon V - \frac{1}{2} V^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} + \frac{V''}{4W} + \frac{3}{8} \left(\frac{V'}{W} \right)^2 - \frac{\kappa V'}{2rW} \quad (I.8)$$

Когда $\varepsilon \rightarrow -1$, то эффективная энергия $E \rightarrow 0$, т.е. задача (I.6) действительно становится нерелятивистской. Поэтому для исследования явлений, происходящих вблизи границы нижнего континуума $\varepsilon = -1$, переход от уравнения Дирака к уравнению Шредингера с эффективным потенциалом U отвечает сути дела и сильно упрощает все рассмотрение.

Если $V \rightarrow 0$, то $U \approx \varepsilon V$; таким образом, знак U на больших расстояниях от ядра зависит от знака энергии ε . На малых расстояниях в U доминирует слагаемое $-1/2 V^2$, приводящее к сильному эффективному притяжению независимо от

знака исходного потенциала V . Это притяжение является чисто релятивистским эффектом и определяется тем, что взаимодействие $V(\vec{r})$ вводится как временная компонента 4-вектора A_μ , что видно уже на примере уравнения Клейна-Гордона для бесспиновой частицы:

$$\Delta \psi + [(\varepsilon - V)^2 - 1] \psi = 0 \quad (I.9)$$

Это уравнение является операторной записью релятивистского соотношения $\varepsilon^2 = \vec{p}^2 + m^2$ (с учетом градиентного преобразования $\varepsilon \rightarrow \varepsilon - eA_0$, $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ в электромагнитном поле). Поэтому существование притяжения $-\frac{1}{2}V^2$ при $|V| \rightarrow \infty$ непосредственно вытекает из общих принципов релятивистской квантовой механики.

Выражения (I.7) и (I.8) значительно упрощаются, если положить $\varepsilon = -1$. В частности, для кулоновского поля притяжения имеем: *

$$V(z) = -\frac{\zeta}{z}, \quad U(z) = \frac{\zeta}{z} - \frac{\zeta^2 - x^2 + 1/4}{2z^2} \quad (I.10)$$

*) При произвольной энергии ε эффективный потенциал выглядит несколько более сложно:

$$U(z) = -\frac{\varepsilon \zeta}{z} - \frac{1}{2z^2} \left[\zeta^2 - x(x+1) + \frac{(x+1)\zeta}{q(z)} - \frac{3\zeta^2}{4q^2(z)} \right],$$

где $q(z) = zW = \zeta + (1+\varepsilon)z$ (для кулоновского поля притяжения). Т.к. $q(0) = \zeta$, то старшая сингулярность $\sim \frac{1}{z^2}$ при $z \rightarrow 0$ всегда та же, что и в (I.10).

При $\zeta > |\alpha|$ притяжение на малых расстояниях становится слишком сингулярным, и в потенциале $U(z)$ возникает так называемое "падение на центр" (см., например /3/, § 35). В этом случае задача на собственные значения ξ_n становится неопределенной — недостаточно задать потенциал $U(z)$ при всех z от 0 до ∞ , нужно еще поставить граничное условие в нуле. Хотя такая ситуация давно известна математикам (случай "предельного круга" Вейля /4/), в квантовой механике она сравнительно непривычна. Математически корректная постановка вопроса принадлежит Кейзу /5/; большое число примеров рассмотрено в /6,7/. С физической точки зрения, различие между двумя случаями (регулярные и сингулярные потенциалы) состоит в следующем. Всегда можно обрезать потенциал при достаточно малых z , т.к. обращение его в бесконечность при $z \rightarrow 0$ является идеализацией. Однако только в регулярном случае обрезание $V(z)$ приводит к малому изменению уровней энергии и волновых функций; для сингулярных потенциалов это уже не так. В этом случае собственные функции и собственные значения ξ_n существенно зависят от радиуса обрезания R и от его вида.

Померанчук и Смородинский /8/ первые поняли, что причина обсуждавшейся выше трудности в точке $\zeta = 1$ лежит в сингулярном характере кулоновского потенциала при $z \rightarrow 0$. Учет конечных размеров ядра делает потенциал $U(z)$ регулярным, после чего можно не думать о выборе граничного условия в нуле и прочих математических тонкостях. Обрезание $V(z)$ устраняет особенности типа (1.3) у энергий ξ_{nj} , и кривая уровня спокойно продолжается до $\xi = -1$.

Однако тот факт, что в точечном кулоне при $\zeta > 1$ возникает "падение на центр", не проходит бесследно. Он проявляется в том, что результаты расчетов (положение уровней при

$\zeta > 1$, критический заряд $Z_c = 137 \zeta_c$ и т.д.) чувствительны к радиусу ядра R *), хотя последний много меньше "естественного" параметра задачи $\hbar/mc$ (так, $R = 12\phi$ отвечает в единицах $\hbar/mc$ значение $R = 0,03$). Теория возмущений по R здесь неприменима.

Рассмотрим более подробно вид эффективного потенциала U . Из рис. I видно, что $U(z)$, в отличие от $V(z)$, содержит довольно высокий потенциальный барьер. В точке максимума

$$U_{\max} = \frac{\zeta^2}{2(\zeta^2 - j(j+1))}, \quad z_m = \frac{\zeta^2 - j(j+1)}{\zeta} \quad (I.II)$$

В области $z < \frac{1}{4} z_m$ эффективный потенциал отвечает более глубокой яме, чем исходный: $U < V < -4mc^2$.

Приведем для ориентировки характерные числа. Для $\alpha = -1$ (основное состояние) и $\zeta = 1,25$ (что отвечает $Z = 170$ - критический заряд ядра с радиусом $R \sim 10\phi$) имеем:

$z_m = 0,65 = 2,5 \cdot 10^{-11}$ см, $U_{\max} \sim 1,5$ Мэв. ^{$mc^2 \approx 1$ Мэв.} Электростатический потенциал в центре ядра достигает величины $V(0) = \frac{3\zeta^2}{2R} \approx 30$ Мэв, а $U(0) \approx -400$ Мэв.

Итак, для электрона в состоянии с энергией $\varepsilon \approx -1$ имеется широкий кулоновский барьер, проницаемость которого экспоненциально мала. Волновая функция уровня с энергией ε имеет при $z \rightarrow \infty$ асимптотику ($-1 < \varepsilon < 1$):

$$G(z) = z g(z) \approx C \sqrt{1+\varepsilon} e^{-\lambda z} z^\nu,$$

*) А также (в меньшей степени) к конкретной форме обрезания кулоновского потенциала при $z < R$.

$$F(z) = z f(z) \approx -C \sqrt{1-\varepsilon} e^{-\lambda z} z^{\nu}, \quad (I.12)$$

где $\lambda = \sqrt{1-\varepsilon^2}$, $\nu = \varepsilon \zeta / \lambda$, g и f - радиальные части Ψ -функции для уравнения Дирака:

$$\Psi = \begin{pmatrix} g(z) \Omega_{j\ell m} \\ i f(z) \Omega_{j\ell' m} \end{pmatrix}, \quad \ell + \ell' = 2j$$

Предэкспонента z^{ν} обязана кулоновскому взаимодействию электрона с ядром, которое существенно искажает волновую функцию на сколь угодно далеких расстояниях. При $\varepsilon \rightarrow +1$ барьер в $U(z)$ отсутствует и происходит делокализация связанного состояния - электрон уходит на большие расстояния. Иная картина возникает при $\varepsilon \rightarrow -1$: здесь $\nu \rightarrow -\infty$, предэкспонента z^{ν} убывает быстрее любой конечной степени z и электрон остается локализованным вблизи ядра (на расстояниях $z < \hbar/mc$). Асимптотику волновой функции нетрудно найти, например, с помощью квазиклассики:

$$G, F \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{\mp \frac{1}{4}} e^{-\sqrt{8\zeta} z}, \quad \varepsilon = -1 \quad (I.13)$$

Уменьшение G и F при $z \rightarrow \infty$ обязано затуханию волновой функции под кулоновским барьером.

I.3. Следуя Померанчуку и Смородинскому /8/, будем называть критическим зарядом ядра Z_c то значение Z , при котором уровень $1s_{1/2}$ достигает границы нижнего континуума. Получим уравнение для Z_c .

В кулоновском поле $V(z) = -\frac{\zeta}{z}$ уравнения для радиаль-

ных функций G и F могут быть решены точно. *) Особенно простой вид имеет решение при $\xi = -1$:

$$G(z) = K_{iv}(z)$$

$$F(z) = -\sqrt{\frac{z}{2\gamma}} \left\{ \left(1 - \frac{2ix}{v}\right) K_{1-iv}(z) + \left(1 + \frac{2ix}{v}\right) K_{1+iv}(z) \right\} \quad (I.I4)$$

где $v = 2\sqrt{\gamma^2 - x^2}$, $K_{iv}(z)$ — функция Макдональда с мнимым индексом, $z = \sqrt{2\gamma} z$. Решение (I.I4) годится во внешней области $z > R$. Внутри ядра полагаем:

$$V(z) = -\frac{\xi}{R} f\left(\frac{z}{R}\right) \quad (I.I5)$$

где $f(x)$ — обрезающая функция, вид которой зависит от распределения электрического заряда по объему ядра (так, равномерной плотности заряда отвечает $f(x) = \frac{1}{2}(3-x^2)$). Переходя в уравнении Дирака к безразмерной переменной $x = \frac{z}{R}$ и отбрасывая члены $\sim R \ll 1$, получим при $0 < z < R$:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dx} &= -\frac{x}{x} G + \gamma f(x) F, \\ \frac{dF}{dx} &= \frac{x}{x} F - \gamma f(x) G \end{aligned} \quad (I.I6)$$

Для определения Z_c достаточно найти из (I.I6) лишь одну константу, в качестве которой мы выберем логарифмическую производную функции G на краю ядра:

*) Решения для произвольной энергии ξ выражаются через линейные комбинации функций Уиттекера. См. формулы (I2)-(I4) в работе /9/.

$$\xi = \left[\frac{z}{G} \frac{dG}{dz} \right]_{z=R} = \left[\frac{G'(x)}{G(x)} \right]_{x=1}$$

Величина ξ зависит от ζ , κ и вида обрезания (но не зависит от энергии ε , что является следствием приближения

$R \ll 1$). Для прямоугольного обрезания $f(x) = 1$ (что отвечает концентрации всего заряда на поверхности ядра) решение находится аналитически:

$$\xi = \frac{\zeta q_{\ell-1}(\zeta)}{q_{\ell}(\zeta)} - \ell, \quad q_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi \kappa}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x),$$

(в частности, для основного состояния: $\ell = 0$, $\xi = \zeta \frac{d\zeta}{d\zeta}$). В остальных случаях уравнения (I.16) могут быть решены численно.*) Результаты численных расчетов приведены на рис.2, из которого видно, что для основного состояния ξ зависимость ξ от формы обрезания $V(z)$ невелика.

Сшивание решений на краю ядра дает искомое уравнение для определения критического заряда /9/ :

$$z = \frac{K'_{iv}(z)}{K_{iv}(z)} = 2\xi \quad (I.17)$$

где $v = 2\sqrt{\zeta^2 - 1}$, $z = \sqrt{8\zeta R}$, $\zeta_c = z_c/137$ (мы положили здесь $\kappa^2 = 1$, т.к. для состояний с $j > \frac{1}{2}$ значения z_c слишком велики, и при $z < 270$ для них можно

*) Удобный способ численного расчета величины ξ изложен в разделе 3 статьи [10]. Отметим, что в этой же работе получена сравнительно простая приближенная формула для z_c , имеющая хорошую точность ($\sim 1\%$) в области $R \sim 10$ ф.

пользоваться формулой (I.I), относящейся к точечному кулону). Численное решение трансцендентного уравнения (I.I7) дает кривые рис.3. Вычисления проводились для двух моделей обрезания: $f(x)=1$ (модель I) и $f(x)=\frac{1}{2}(3-x^2)$ (модель II). Хотя переход от модели I к II в 1,5 раза увеличивает значение потенциала $V(0)$ в центре ядра, соответствующее уменьшение z_c невелико. Если экстраполировать на область $z > 137$ обычную зависимость $R = z_c A^{1/2}$, полагая $A = 2,5z$, $z_c = 1,1 \Phi$ и используя модель II, то $z_c = 170$ (для основного уровня $1s$). Следующие уровни подходят к нижнему континууму при существенно больших значениях z (см. таблицу). Поэтому вхождение каждого уровня в нижний континуум можно рассматривать изолированно, что облегчает задачу.

Таблица.

Критический заряд ($z_c = z_c/137$) для
первых трех уровней

R		I			II	
Φ	$\beta_{\text{ср.}} \hbar/mc$	$1s$	$2p_{1/2}$	$2s$	$1s$	$2p_{1/2}$
8	0,0207	1,248	1,35	1,72	1,224	1,31
10	0,0259	1,271	1,38	1,78	1,243	1,34
12	0,0311	1,291	1,41	1,83	1,260	1,365

Примечание к таблице: столбцы I и II относятся к двум моделям обрезания в формуле (I.I5): $f(x)=1$ (I); $f(x)=\frac{1}{2}(3-x^2)$ (II)

Помимо /9,10/ в последние годы появилось еще несколько работ, посвященных вычислению критического заряда z_c :

I) численный расчет движения уровней с ростом z проводился

в /II/; 2) приближенная формула для $\bar{Z}_c$ на основе ВКБ-метода получена в /I2/. Результаты работ /9-I2/ хорошо согласуются между собой *) дают $\bar{Z}_c = 170 \pm 2$ для основного уровня $1s_{1/2}$.

Покажем теперь, что учет конечных размеров ядра устраняет особенность в формуле (I.3) при $\xi = 1$. Уравнение, определяющее энергию уровней, имеет вид /I3/:

$$\chi \frac{W'_{\kappa, ig}(x)}{W_{\kappa, ig}(x)} = \xi + \frac{1}{2} - \frac{g^2 + \xi^2}{\alpha + \xi + \xi \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}} \quad (I.18)$$

Здесь $\chi = 2\lambda R$, $\lambda = \sqrt{1-\xi^2}$, $\kappa = \frac{\xi\xi}{\lambda} - \frac{1}{2}$,

$g = \frac{\nu}{2} = \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}$, $W(x)$ - функция Уиттекера. Это

уравнение относится к произвольному уровню дискретного спектра (с любыми значениями j , α и главного квантового числа n) и могут быть использовано при численных расчетах, однако вследствие своей громоздкости оно мало наглядно. Чтобы упростить ситуацию, допустим, что радиус обрезания R очень мал. Тогда в задаче появляется "большой логарифм":

$$\Lambda = \ln \frac{1}{R} \gg 1 \quad (I.19)$$

Хотя при $R \sim 10$ ф параметр Λ численно еще не очень велик ($\Lambda \approx 3,5$), но для получения качественной картины движения уровней такое приближение достаточно. Подставляя в (I.18) асимптотику функции Уиттекера при $\chi \rightarrow 0$, можно получить простые формулы для энергии уровней /I3/. Мы ограничимся здесь основным состоянием $1s$:

*) Значения $\bar{Z}_c$, приведенные в /8/, несколько завышены.

$$\epsilon_1(\zeta) = \begin{cases} \gamma \operatorname{ctg} \Lambda \gamma, & \text{при } 0 < \zeta < 1 \\ g \operatorname{ctg} \Lambda g, & \text{при } 1 < \zeta < \zeta_c \end{cases} \quad (I.20)$$

где $\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}$, $g = i\gamma = \sqrt{\zeta^2-1}$. Отметим следующее:

1) в области $\zeta < 1$ $\operatorname{ctg} \Lambda \gamma$ быстро стремится к 1 при уменьшении ζ , и уже при $(1-\zeta) \gg \Lambda^{-2}$ энергия ϵ_1 практически совпадает с (I.3) и не зависит от обрезания $V(\alpha)$;

2) точка $\zeta = 1$ не является особенностью функции $\epsilon_1 = \epsilon_1(\zeta)$;

3) с ростом ζ , энергия ϵ_1 монотонно падает;

4) критический заряд в приближении $\Lambda \gg 1$ равен:

$$\zeta_c = 1 + \frac{\pi^2}{2\Lambda^2} \quad (I.21)$$

Отметим, что при $\zeta \rightarrow \zeta_c$ выражение (I.20) перестает быть справедливым. Можно показать, что на малом участке

$\Delta\zeta = \zeta_c - \zeta \sim \Lambda^{-3}$ вблизи ζ_c кривая $\epsilon_1(\zeta)$ идет очень круто и описывается уравнением

$$\ln \lambda + \psi\left(-\frac{\epsilon}{\lambda}\right) + \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon+\lambda} = -\Lambda \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta_c^2-1}} \right\} \quad (I.22)$$

(при $\Lambda^{-2} \gg \zeta_c - \zeta \gg \Lambda^{-3}$ выражения (I.20) и (I.22) плавно сшиваются между собой). Из (I.22) вытекает, что при $\zeta \rightarrow \zeta_c$ уровень ϵ_1 не стелется к границе $\epsilon = -1$, а круто пересекает ее, уходя в нижний континуум:

$$\epsilon_1(\zeta) = -1 + \frac{3\Lambda^3}{5\pi^2} (\zeta_c - \zeta) + \dots \quad (I.23)$$

То же имеет место и для остальных уровней дискретного спектра. В приближении (I.19) критический заряд для уровней $n s_{1/2}$ и $(n+1) p_{1/2}$ равен:

$$\zeta_c^{(n)} = 1 + \frac{n^2 \pi^2}{2 \lambda^2} + O(\lambda^{-3}) \quad (I.24)$$

(различие ζ_c для s и p состояний, т.е. зависимость ζ_c от логарифмической производной ζ , проявляется в невыписанных здесь членах $\sim \lambda^{-3}$). Таким образом, с ростом n значения ζ_c идут все реже; качественно это согласуется с результатами численных расчетов.

I.4. Остановимся еще на вопросе о размерах связанного состояния при $\zeta \rightarrow \zeta_c$. Пока $\zeta < 1$, можно использовать волновые функции для точечного кулона:

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\lambda}{2}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{\alpha}{N}} u_s^{(v)}(x) - \sqrt{1 + \frac{\alpha}{N}} u_{s-1}^{(v)}(x) \right\} \\ F &= -\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)\lambda}{2}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{\alpha}{N}} u_s^{(v)}(x) + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{N}} u_{s-1}^{(v)}(x) \right\} \end{aligned} \quad (I.25)$$

Здесь $x = 2\lambda z$, $\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ (энергия ε дается формулой (I.1)), $s = n - |\alpha|$, $v = 2\sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2}$, $N = \sqrt{s(s+v) + \alpha^2}$ (число s принимает значения: $0, 1, 2, \dots$). Через $u_s^{(v)}(x)$ обозначены функции

$$u_s^{(v)}(x) = \sqrt{\frac{s!}{\Gamma(s+1+v)}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{v}{2}} L_s^{(v)}(x)$$

образующие ортонормированную систему.

Решения уравнения Дирака в кулоновском поле $V(z) = -\frac{\zeta}{z}$

представлены в форме (I.25) в работе /I4/; эти выражения более удобны для вычислений, чем обычно приводимые в литературе. С помощью введенного выше числа N формулу (I.I) для энергии уровней дискретного спектра можно переписать в виде:

$$\varepsilon_{nj} = \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{N^2}} \quad (I.26)$$

Заметим, что

$$N = \begin{cases} n - \frac{n-|\alpha|}{2n|\alpha|} \zeta^2 + \dots, & \text{при } \zeta \ll 1 \\ \sqrt{n^2 - 2s|\alpha|}, & \text{при } \zeta \rightarrow |\alpha| = j + \frac{1}{2} \end{cases}$$

(с ростом ζ N монотонно уменьшается). Используя (I.25), можно вычислить средний радиус связанного состояния при $\zeta < |\alpha|$:

$$\langle \bar{r} \rangle_j = \frac{1}{2\zeta} \left[\left(3N - \frac{\alpha^2}{N} \right) \sqrt{N^2 - \zeta^2} - \alpha \right] = \frac{(3N^2 - \alpha^2)\varepsilon - \alpha}{2\zeta} \quad (I.27)$$

В частности, для уровня 1s

$$\bar{r} = \frac{1 + 2\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta} \quad (0 < \zeta < 1)$$

В этих формулах величина $\bar{r}$ выражена в единицах $\frac{\hbar}{mc} = 386 \text{ ф.}$ В нерелятивистской области $\zeta \ll 1$ формула (I.27) переходит в известное выражение $\bar{r} = \frac{1}{2\zeta} (3n^2 - \ell(\ell+1))$; здесь более подходящей единицей измерения радиуса $\bar{r}$ является, очевидно, борковский радиус

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 137 \frac{\hbar}{mc} \quad *)$$

В кулоновском поле точечного заряда Z_e все уровни дегенеративно вырождены, за исключением состояний с $k = -n$,

$j = n - \frac{1}{2}$ ($1s$, $2p_{3/2}$, $3d_{5/2}$ и т.д.), для которых $s = n - |k| = 0$, и потому $N = n$. Для этих состояний

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{n^2}}, \quad \bar{r} = \frac{n(1 + 2\sqrt{n^2 - \zeta^2})}{2\zeta}$$

Вычисление $\bar{r}$ при $\zeta > 1$ сильно усложняется /9/. Приведем поэтому лишь выражение для $\bar{r}$ при $\varepsilon = -1$, $\zeta = \zeta_c$ и $k = -1$:

$$\bar{r} = \frac{(4\zeta^2 - 3)(1 + 0,3\zeta^2)}{2\zeta(3 + 2\zeta^2)} \quad (I.28)$$

Средний радиус $\bar{r}$ при $\varepsilon = -1$ остается конечным, т.е. связанное состояние не делокализуется при $Z \rightarrow Z_c$, несмотря на то, что эффективная энергия $E = \frac{\varepsilon^2 - 1}{2} \rightarrow 0$. Причиной этого является кулоновский барьер в эффективном потенциале (I.10). На рис. 4, взятом из работы /9/, показано, как меняется средний радиус основного состояния при углублении уровня от $\varepsilon = 1$ до $\varepsilon = -1$. Отметим, что при $-1 < \varepsilon < 0$ расчеты проводились в приближении $\Lambda = \ln \frac{1}{R} \gg 1$. С учетом конечных размеров ядра эта часть кривой несколько

*) Отметим, что между тремя характерными длинами - боровским радиусом $a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$, комптоновской длиной волны электрона $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ и классическим радиусом электрона $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ - имеется соотношение: $a : \lambda_c : r_0 = 1 : \alpha : \alpha^2$ ($\alpha = \frac{1}{137}$).

поднимается,*) но качественно не меняет своего вида.

Аналогичным образом ведут себя и другие характеристики связанных состояний, например магнитный момент. При $\zeta < 1$ для уровней $n_{3/2}$ и $n_{p_{1/2}}$ магнитный момент электрона равен:

$$\mu(n_s) = \frac{2\varepsilon + 1}{3}, \quad \mu(n_p) = 2\varepsilon - 1 \quad (I.29)$$

(в нерелятивистском пределе $\varepsilon \rightarrow 1$ и $\mu \rightarrow 1$). Заметим, что линейная зависимость μ от энергии уровня ε вообще характерна для кулоновской задачи с точечным зарядом /14/.

Значение $\zeta = 1$ является критическим для уровней $n_{3/2}$ и $n_{p_{1/2}}$, если $R = 0$ (точечный кулон). Поэтому при вычислении μ в области $\zeta > 1$ необходимо учитывать конечные размеры ядра. Соответствующие формулы для μ получены в работе /14/. Мы приведем здесь аналог формулы (I.28) - магнитный момент связанного состояния n_s в критической точке $\zeta = \zeta_c$:

$$\mu = \frac{2(4\zeta^2 - 3)}{3(2\zeta^2 + 3)}, \quad (\alpha = -1) \quad (I.30)$$

На рис. 5 построена зависимость μ от энергии уровня ε для состояний $1s$ и $2p_{1/2}$, имеющих наименьшие значения ζ_c .

Сделаем еще замечание относительно "случайного" вырождения, характерного для кулоновского поля. При $\zeta < 1$ состояния

*) Так, на краю нижнего континуума ($\varepsilon = -1$) находим с помощью (I.28): $\bar{\varepsilon} = 0,13$ и $0,3$ для $\zeta_c = 1$ (т.е. при $R \rightarrow 0$) и $\zeta_c = 1,25$ ($R \approx 10\phi$). В приближении $\Lambda \gg 1$ имеем: $\bar{\varepsilon} = 0,130 + 0,43 \left(\frac{\pi}{\Lambda}\right)^2 + \dots$;
 $\mu = 0,133 + 0,48 \left(\frac{\pi}{\Lambda}\right)^2 + \dots$

$n_{1/2}$ и $n_{p_{1/2}}$ имеют одинаковую энергию (и вообще, энергия уровней не зависит от знака α , т.е. от четности). При этом, разумеется, другие характеристики этих состояний (например $\bar{z}$, μ) различаются - см. формулы (I.27), (I.29). При $z > 1$ "случайное" вырождение автоматически снимается: например, уровень $2s_{1/2}$ лежит выше, чем $2p_{1/2}$. В этом проявляется тот факт, что при $z > 1$ принципиально необходимо вводить обрезание кулоновского потенциала в области малых z , в силу чего потенциал $V(z)$, входящий в уравнение Дирака, при $z < R$ всегда отличается от "чистого" кулона.

2. Возмущение непрерывного спектра близким уровнем.

Для понимания ситуации, возникающей при $z > z_c$, необходимо предварительно выяснить, что происходит с волновыми функциями сплошного спектра при приближении к нему дискретного уровня. Этот вопрос представляет интерес и для ряда задач ядерной физики. Впервые он рассматривался Зельдовичем и Рабиновичем /I5/ применительно к вырожденному ферми-газу, затем Галицким и Чельцовым /I6/ при вычислении вероятности двух-протонного распада, а в последнее время детально изучен в работах /I7, I8/.

Пусть $\chi_k(z)$ - волновая функция непрерывного спектра, нормированная на $\delta(k-k')$:

$$\chi_k(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kz + \delta) \quad (2.1)$$

где $\delta = \delta(k)$ - фаза рассеяния. Обозначим через u величину, определяющую глубину потенциальной ямы (например $u = -V(0)$) и допустим, что при $u = u_0$ в яме возникает очередной уровень. Записывая соотношение полноты для $u' < u_0$ и $u'' > u_0$.

$$\sum_{n=1}^N \chi_n(z) \chi_n(z') + \int_0^{\infty} d\kappa \chi_{\kappa}(z; v') \chi_{\kappa}^*(z'; v') = \delta(z-z'),$$

$$\sum_{n=0}^N \chi_n(z) \chi_n(z') + \int_0^{\infty} d\kappa \chi_{\kappa}(z; v'') \chi_{\kappa}^*(z'; v'') = \delta(z-z'),$$

вычитая одно равенство из другого и положив после этого $z=z'$, находим ($\eta \rightarrow +0$):

$$\chi_0^2(z) = \int_0^{\infty} d\kappa \{ |\chi_{\kappa}(z; v_0 - \eta)|^2 - |\chi_{\kappa}(z; v_0 + \eta)|^2 \} \quad (2.2)$$

где χ_0 - волновая функция уровня в момент его возникновения ($v = v_0$).

Следует различать 2 случая в зависимости от поведения потенциала $V(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Если $\ell=0$ и $V(z) < 0$ при больших z (случай притяжения), или же знак $V(z)$ произволен, но $\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 V(z) = 0$, то происходит делокализация волновой функции связанного состояния: $\chi_0(z) \sim \sqrt{2\lambda} e^{-\lambda z}$, $\lambda \rightarrow 0$ при $v \rightarrow v_0$. В этом случае связанное состояние "разбухает" и $\chi_0(z)$ в момент возникновения уровня не может быть нормирована на единицу (в смысле (2.3)). За рассмотрением этого случая мы отсылаем к [17, 18].

С другой стороны, если $V(z)$ обладает на бесконечности барьером типа кулоновского (а также при $\ell \geq 1$, когда имеется центробежный барьер), то функция $\chi_0(z)$ при $v = v_0$ быстро убывает при $z \rightarrow \infty$, и потому для нее сохраняется обычная нормировка дискретного спектра:

$$\int_0^{\infty} \chi_0^2(z) dz = 1 \quad (2.3)$$

(см. рис.6, а и б). Из сравнения формул (2.2) и (2.3) видно, что при $v < v_0$ в непрерывном спектре уже как бы "сидит" одна частица, причем плотность возмущения функций $\chi_k(z)$ имеет ту же пространственную локализацию, что и функция уровня $\chi_0(z)$. В широкой области z справедливо соотношение:

$$\chi_k(z) \approx \sqrt{\Delta(k)} \chi_0(z) \quad (\text{при } v < v_0) \quad (2.4)$$

где $\Delta(k)$ - множитель, резко меняющийся в области малых k . На комплексной k - плоскости связанному уровню при $v > v_0$ отвечает полюс S - матрицы $k = i\kappa$, лежащий на мнимой оси. При $v < v_0$ этот полюс уходит в нижнюю полуплоскость, превращаясь в пару брейт-вигнеровских полюсов: $k = k_0 - i\gamma$. Функция $\Delta(k)$ имеет вид:

$$\Delta(k) = \frac{\gamma k}{2\pi [(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \gamma^2/4]} \quad , \quad \varepsilon = \frac{k^2}{2} \quad , \quad (2.5)$$

соответствующий лоренцевой форме линии. Таким образом, возмущение функций $\chi_k(z)$ сосредоточено в узкой полосе энергий вблизи резонанса. При произвольно взятой энергии ε функции $\chi_k(z)$ экспоненциально затухают вглубь барьера, однако в узкой области $|\varepsilon - \varepsilon_0| \sim \gamma$ они имеют вид, похожий на $\chi_0(z)$ (т.е. происходит резкое усиление вероятности пребывания частицы внутри ямы). Пока уровень реальный, его влияние на функции непрерывного спектра практи-

чески отсутствует. *)

При $\xi_0 \gg \gamma$ (узкий резонанс) имеем:

$$\int_0^\infty \Delta(k) dk = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi - \xi_0)^2 + \gamma^2/4} = 1, \quad (2.6)$$

что придает количественный смысл утверждению об эквивалентной замене всего непрерывного спектра на одну частицу с волновой функцией $\chi_0(z)$. Разумеется, такая замена имеет смысл, лишь пока $|v - v_0| \ll v_0$.

В релятивистской задаче сильное возмущение волновых функций сплошного спектра возникает, если энергия уровня ξ приближается к границе нижнего континуума (при этом эффективная энергия $E = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \rightarrow 0$). Покажем, что эффективный потенциал $U(z)$ при $\xi \rightarrow -1$ всегда содержит барьер. Если $V(z)$ спадает на бесконечности степенным образом: $V \approx -\gamma z^{-n}$ (случай притяжения), то из (1.8) при $\xi = -1$ находим

*) Это утверждение не относится к случаю $\ell = 0$ для барьеров с конечной проницаемостью при $k \rightarrow 0$, когда $\chi_0(z)$ де-локализуется. В этом случае картина несколько иная: кроме полюса $k = i\infty$, в окрестности $k = 0$ имеется еще один полюс $k' = -i\infty'$, отвечающий виртуальному уровню. При уменьшении v эти полюса сталкиваются /19/ и уходят с мнимой оси, а $\Delta(k)$ имеет вид: /17/

$$\Delta(k) = \frac{8\alpha^2 k^2}{\pi [(k^2 - k_0^2)^2 + 4\alpha^2 k^2]},$$

переходя в (2.5) лишь при $k_0 \gg \alpha$. Однако эти осложнения имеют место лишь в очень узкой области изменения v вблизи $v = v_0$ (см. подробнее работы /17-19/).

$$U(z) \underset{(z \gg 1)}{\simeq} \begin{cases} \gamma/z^n, & \text{при } 1 \leq n < 2 \\ \beta/2z^2, & \text{при } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\beta = (\alpha + \frac{(1-n)}{2})^2 - \frac{1}{4}$ при $n > 2$. Отсюда следует, что волновая функция уровня остается квадратично интегрируемой на краю нижнего континуума, а для $\Delta(\kappa)$ справедлива формула (2.5).

Значение факторизации (2.4) для задач ядерной физики состоит в существенном упрощении матричных элементов. Например:

$$(\chi_\kappa, U\chi_0) \simeq \sqrt{\Delta(\kappa)} U_{00} \quad (2.8)$$

и т.д. Это представление оказалось чрезвычайно удобным для задачи о двух взаимодействующих частицах в потенциальной яме (для того случая, когда имеется уровень одночастичной задачи с энергией, близкой к нулю). С помощью (2.4) интегральное уравнение для амплитуды рассеяния сводится к алгебраическому, что позволяет получить решение /20/. Факторизация (2.4) может быть полезна также при приближенном решении задачи трех тел.

3. Рождение позитронов и поляризация вакуума при $Z > Z_c$.

Теперь мы можем перейти к обсуждению явлений, происходящих в "критической точке" $Z = Z_c$.

3.1. Разложим оператор поля $\psi(x)$ по точным решениям уравнения Дирака в кулоновском поле ядра Z :

$$\psi(x) = \sum_{(+)} a_n \psi_n(\vec{r}) e^{-i\varepsilon_n t} + \sum_{(-)} b_n^{(+)} \bar{\psi}_n(\vec{r}) e^{i\varepsilon_n t} \quad (3.1)$$

где $(+)$ и $(-)$ означают суммы по электронным и по позитронным состояниям. Разделение на $(+)$ и $(-)$ состояния в сильном поле, когда имеются глубокие уровни, требует пояснений. Будем адиабатически увеличивать заряд ядра Z , начиная с $Z = 0$ (когда еще нет связанных состояний).

Можно показать /13/, что с ростом Z уровни возникают только из верхнего континуума и далее монотонно опускаются. Подчеркнем, что это свойство характерно именно для уравнения Дирака, а в других случаях это уже не так.*)

Таким образом, $(+)$ в (3.1) означает сумму по всем состояниям дискретного спектра $-1 < \varepsilon_n < 1$ и интеграл по верхнему континууму $\varepsilon > 1$, а $(-)$ означает интеграл по нижнему континууму $\varepsilon < -1$.

Рассмотрим гейзенберговский оператор тока:

$$j_\mu(x) = -\frac{e}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)] \quad (3.2)$$

где $-e$ - заряд электрона. Среднее значение j_0 в произвольном состоянии Φ определяет плотность заряда:

*) Например, для уравнения Клейна-Гордона с короткодействующим потенциалом уровни возникают как из верхнего, так и из нижнего континуума и затем сталкиваются друг с другом /21, 22/. Правило отбора физических решений состоит в том /23/, что следует отбросить все решения, возникающие из состояний с отрицательной энергией при адиабатическом включении поля (т.е. отбросить все уровни, идущие из нижнего континуума).

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \langle \Phi | j_0(x) | \Phi \rangle = \\ &= -e \sum_{(\omega)} N_+ |\psi(z)|^2 + e \sum_{(-)} N_- |\psi(z)|^2 + \\ &+ \frac{e}{2} \left\{ \sum_{(+)} |\psi(z)|^2 - \sum_{(-)} |\psi(z)|^2 \right\} \quad (e > 0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где N_+ и N_- - числа заполнения электронных и позитронных состояний. Последний член в (3.3) представляет собой плотность заряда вакуума:

$$\rho_{vac}(z) = \frac{e}{2} \left\{ \sum_{(+)} |\psi_n(z)|^2 - \sum_{(-)} |\psi_n(z)|^2 \right\} \quad (3.4)$$

При этом мы называем вакуумом состояние с $N_- = N_+ = 0$, что при $z < z_c$ очевидно. Это определение удобно сохранить и при $z > z_c$. Для свободной частицы плотность $|\psi_\xi(z)|^2$ не зависит от знака энергии ξ и потому $\rho_{vac}(z) \equiv 0$. В поле ядра z исчезает симметрия между ψ_ξ и $\psi_{-\xi}$. Возникающее при этом искажение $|\psi_\xi(z)|^2 - |\psi_{-\xi}(z)|^2$ определяет плотность заряда, индуцированного в вакууме. Если подставить в (3.4) точные кулоновские функции и произвести суммирование, то можно, в принципе, вычислить поляризацию вакуума в сильном кулоновском поле. Однако эти вычисления оказываются чрезвычайно громоздкими /24/. При $z = z_c \ll 1$ формула (3.4) приводит к известному потенциалу Юлинга /2,25/:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= z e \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_{2m}^{\infty} d\mu \, \delta(\mu) \frac{e^{-\mu^2}}{2} \right\} = \\ &= \frac{ze}{2} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{\alpha e^{-2z}}{4\sqrt{\pi} z^3}, & z \gg 1 \\ 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln z, & z \ll 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

В области $z \gg \frac{1}{m_c} = 1$ поляризация вакуума дает экспоненциально малую поправку к кулоновскому потенциалу $\frac{Ze}{z}$, а при $z \rightarrow 0$ отклонение от закона Кулона растет логарифмически (и становится существенным при $z \sim e^{-137}$). Укажем еще на недавнюю работу Мигдала /26/, в которой рассматривается поляризация вакуума, вызванная точечным зарядом с $Z \gg 137$. В этой работе обсуждаются также принципиальные вопросы квантовой электродинамики, связанные с проблемой "нуль-заряда".

3.2. Обратимся теперь к ситуации, возникающей, когда заряд ядра Z проходит через критическое значение Z_c (в дальнейшем изложении мы следуем работе /27/). При этом существенно, что кулоновский потенциал $V = -\frac{Z}{z}$ становится ограниченным в области $z < R \sim 10$ (реальные значения радиусов тяжелых ядер). Такие значения параметра обрезания R приводят к тому, что уровни ε_n подходят к нижнему континууму по-одиночке. Это позволяет ограничиться рассмотрением лишь того состояния дискретного спектра, для которого возникает критическая ситуация. Допустим для простоты, что это - уровень $1/2$. При $Z = Z_c$ резкие изменения испытывают только волновые функции $\psi_{1/2}(z)$ с энергией ε , близкой к -1 , а именно:

1) при $Z < Z_c$ в сумме (+) содержится слагаемое $|\psi_{1/2}(z)|^2$, отвечающее уровню $1/2$, а при $Z > Z_c$ оно исчезает из полного набора одночастичных состояний;

2) зато при $Z > Z_c$ функции нижнего континуума с $j = 1/2$, $\varepsilon = -1$ испытывают сильное возмущение (резко подрастают при $z \sim 1$):

$$|\psi_{1/2}(z)|^2 \simeq \Delta(\kappa) \rho_c(z), \quad \rho_c(z) = |g_c(z)|^2 + |f_c(z)|^2 \quad (3.6)$$

где $k = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, $\Delta(k)$ имеет вид (2.5), а g_c и f_c - решения уравнения Дирака при $z = z_c$, $\varepsilon = -1$ (см. формулу (1.14));

3) для всех остальных состояний точка $z = z_c$ ничем не примечательна, и они дают в ρ_{vac} фон, плавно меняющийся с z .

Результирующее изменение ρ_{vac} при переходе через $z = z_c$ равно:

$$\Delta \rho_{vac}(z) = -e \left\{ \rho_c(z) + \int_0^\infty dk \Delta(k) \rho_c(z) \right\} = -2e \rho_c(z). \quad (3.7)$$

(множитель 2 учитывает двукратное вырождение по проекции спина).

При $z > z_c$ вакуум становится заряженным. Суммарный заряд вакуума равен $-2e$, т.к. $\int_0^\infty \rho_c(z) z^2 dz = 1$. Если при $z < z_c$ мы имели незаряженный вакуум (т.е. голое ядро, у которого уровень $1s$ не был занят электронами), то при добавлении нескольких протонов произойдет спонтанное чпспускание двух позитронов, а вакуум приобретет две единицы отрицательного заряда. Плотность $-2e \rho_c(z)$ соответствует продолжению K -оболочки в сверхкритическом атоме.

Во избежание недоразумений следует отметить, что волновые функции $\psi_\varepsilon(z)$ с $\varepsilon < -1$ сами по себе не описывают физические состояния, а относятся к ненаблюдаемому дираковскому "фону". Однако эти состояния нельзя просто отбросить, так как при этом нарушилась бы полнота системы собственных функций гамильтониана $H = \vec{z} \vec{p} + \beta m + V$. Физический смысл имеет отсутствие частицы (дырка) в нижнем континууме [1]. Из этих соображений ясно, почему для реального рождения позитрона при сверхкритическом $z > z_c$ необходимо, чтобы границу

$\xi = -I$ пересекал именно незаполненный уровень.

Пороговое поведение вероятности рождения позитронов w определяется барьером в эффективном потенциале $U(z)$. Для кулоновского поля $V(z) = -\frac{Z}{z}$ этот барьер имеет вид (I.10), т.е. содержит отталкивательный кулоновский "хвост" при $z \rightarrow \infty$. Поэтому с точностью до предэкспоненты вероятность w совпадает с проницаемостью кулоновского барьера $\exp(-\frac{2\pi Z}{k})$. Когда $(z - z_c) \ll z_c$, то практически все позитроны вылетают с одной и той же энергией ξ_0 :

$$\xi_0 = 1 + \beta(z - z_c) + O((z - z_c)^2) \quad (3.8)$$

Коэффициент β определяет наклон уровня, входящего в нижний континуум. В приближении $\Lambda \gg 1$ имеем: $\beta = 3\Lambda^3/5\pi^2$, см. (I.23). Численный расчет β для реальных значений радиусов R см. в работе /10/. Окончательная формула имеет вид /22/:

$$w = \gamma_0 \exp \left\{ -b \sqrt{\frac{z_c}{z - z_c}} \right\}, \quad b = 2\pi \sqrt{\frac{z_c}{2\beta}} \quad (3.9)$$

Вероятность рождения позитронов выражена здесь в единицах

$m_e c^2 / \hbar \approx 10^{21} \text{ сек.}^{-1}$. Относительно предэкспоненциального множителя γ_0 см. обсуждение в конце раздела. Для $z_c = 170$ коэффициент $b \approx 1,7$, откуда следует, что при $z = z_c + 1$ экспонента в (3.9) имеет величину порядка 10^{-10} .

Отметим также, что в тот момент $(z = 185)$, когда к границе $\xi = -I$ подходит уровень $2p_{1/2}$, первый уровень $1s$ углубляется в нижний континуум на величину $\sim m c^2$, сравнимую с высотой барьера в $U(z)$. При этом вероятность w перестает быть экспоненциально малой.

Итак, при $z > z_c$ в интеграле от плотности заряда по сплош-

ному спектру $\xi < -I$ возникает дополнительное резонансное слагаемое, локализация которого в пространстве следует плотности заряда уровня $\rho_c(z)$ в критической точке. Вот эта дополнительная плотность заряда вакуума и соответствует (после перенормировки) двум связанным электронам.

До сих пор мы рассматривали голые ядра. Если же уровень $1s$ занят электронами, то никаких видимых эффектов при переходе через $z = z_c$ не возникает. Электронное облако, несущее заряд $-2e$, при $z < z_c$ образовано двумя электронами на дискретном уровне $1s$, а при $z > z_c$ - возмущением функции нижнего континуума вблизи энергии $\xi = -\epsilon_+$, являющейся продолжением этого уровня в закритическую область (см. формулы (1.23) и (3.8)). Хотя формально K -оболочка при $z > z_c$ исчезает (из одночастичных решений уравнения Дирака), но ее роль берет на себя сплошной спектр. Поэтому, например, электроны внешних оболочек атома каких-либо изменений в точке z_c в этом случае не замечают. Свойства внешних оболочек атома (определяющие, в частности, менделеевскую периодичность химических свойств) закономерно продолжают в закритическую область.

Облако вакуумного заряда $\rho_c(z)$ является несколько необычным объектом. Прежде всего $\rho_c(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, т.е. плотность $\rho_c(z)$ локализована в пространстве. Однако $\rho_c(z)$ при $z > z_c$ не совпадает с квадратом какой-либо одночастичной функции дискретного спектра, а в соответствии с (3.4) размазана по континууму. Правда, при $z \rightarrow z_c$ полоса энергий в нижнем континууме, дающих вклад $\rho_c(z)$, порядка γ , т.е. экспоненциально мала. Далее, сверхкритический атом с вакуумной K -оболочкой должен давать узкий резонанс при рассеянии позитронов. Наглядно это можно описать так: внешний

позитрон проникает сквозь кулоновский барьер и безизлучательно аннигилирует с одним из электронов, сидящих на "уровне" 1_s . В результате возникает метастабильная система с дыркой на K -оболочке, которая за время $t \sim 1/\gamma$ спонтанно рождает позитрон и возвращается в исходное состояние. Этот процесс аналогичен возбуждению атома фотоном с последующим спонтанным излучением фотона той-же частоты (в пределах ширины линии γ).

Существенным для всего рассмотрения является тот факт, что мы имеем дело с фермионами и действует принцип Паули. Легкие заряженные бозоны, если бы таковые существовали в природе, могли бы при $Z \rightarrow Z_c$ виртуально рождаться в любом числе и заэкранировать весь избыток $Z - Z_c$. Этот вопрос был подробно рассмотрен А.Б.Мигдалом /23/. Для электронов же, вследствие принципа Паули, имеется только 2 места на K -оболочке. Поэтому учет многочастичных эффектов не приведет к качественным изменениям всей картины, а может лишь изменить Z_c на величину $\sim 2Z_c \approx 1$.

3.3. В справедливости изложенной выше картины можно убедиться также, рассмотрев предельный случай $R \rightarrow 0$, когда выполняется условие (I.19). Такое приближение будем называть логарифмическим. В этом случае решение задачи можно получить в явном виде /22/, используя уравнение (I.22), определяющее ход уровня в окрестности $\varepsilon = -1$. Обозначим через $f(\varepsilon)$ функцию, стоящую в (I.22) слева:

$$f(\varepsilon) = f_1 - i f_2 = - \left[\ln \lambda + \psi\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) + \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon+\lambda} \right] \quad (3.10)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

($\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ - логарифмическая производная Γ - функции).

Учитывая равенство $(-\infty < y < \infty)$

$$\operatorname{Im} \psi(iy) = \frac{1}{2y} + \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \pi y,$$

находим:

$$f_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 < \varepsilon < 1. \\ \frac{\pi}{2} [\operatorname{th}(\pi \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}}) - 1], & \text{при } \varepsilon < -1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что точка $\varepsilon = -1$ является особой для функции $f(\varepsilon)$. Заметим, что эта особенность связана не с обращением в бесконечность самой функции или ее производных $^{*)}$, а с появлением мнимой части f_2 на разрезе $-\infty < \varepsilon < -1$. При $\varepsilon \rightarrow -1$ имеем:

$$f_1(\varepsilon) = \frac{5}{3} \left(x + \frac{73}{100} x^2 + \frac{346}{525} x^3 + \dots \right), \quad x = 1 + \varepsilon$$

$$f_2(\varepsilon) = \pi \exp \left\{ -\pi \sqrt{\frac{2}{|x|}} \right\} \theta(-x) \quad (3.12)$$

т.е. точка $\varepsilon = -1$ — существенная особенность для $f(\varepsilon)$ (поэтому, в частности, ряд для f_1 по степеням $x = 1 + \varepsilon$ — не сходящийся, а только асимптотический, в чем можно убедиться непосредственно /22/).

Учитывая разложения (3.12), решим уравнение (1.22) для энергии уровня. При $\zeta < \zeta_c$ энергия $\varepsilon = \varepsilon(\zeta)$ определяется формулой (1.23). При $\zeta > \zeta_c$ энергия ε становится комплексной, т.е. связанное состояние превращается в квазистационарное.

$^{*)}$ Легко видеть, что $f(-1) = 0$ и что все производные $\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}$ в точке $\varepsilon = -1$ существуют и конечны.

Полагая $\varepsilon = -(\varepsilon_0 - i\delta/2)$, где $\varepsilon_0 > 1$, находим из (I.22) и (3.12):

$$\varepsilon_0 = 1 + \beta(\zeta - \zeta_c) + \dots, \quad \gamma = \gamma_0 \exp\left\{-\varrho \sqrt{\frac{\zeta_c}{\zeta - \zeta_c}}\right\} \quad (3.13)$$

где

$$\beta = \frac{3\Lambda^3}{5\pi^2}, \quad \gamma_0 = \frac{6\pi}{5}, \quad \varrho = \pi \sqrt{\frac{2\zeta_c}{\beta}} \approx 18\Lambda^{-1/2} \quad (3.14)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (3.13) можно рассматривать как решение точного уравнения (I.18) в логарифмическом приближении $\Lambda \gg 1$. Таким образом, связанное состояние $1s$ имеет аналитическое продолжение в закритическую область $\zeta > \zeta_c$. Им служит полюс S -матрицы при комплексной энергии

$\varepsilon = -(\varepsilon_0 - i\delta/2)$, отвечающий вылету позитрона (для перехода к позитронным решениям нужно изменить знак ε в уравнении Дирака, после чего получаем полюс в точке $\varepsilon_0 - i\delta/2$, т.е. в физической области позитронных состояний). Вероятность спонтанного рождения позитронов $w = \gamma$ экспоненциально мала на пороге $\zeta \rightarrow \zeta_c$. Из (3.11) непосредственно видно, что рождение позитронов является пороговым эффектом и наступает лишь при $\zeta > \zeta_c$.

Формула (3.13) для γ полностью согласуется с (3.9). Что же касается входящих в нее параметров, то нужно заметить, что β и ϱ сильно зависят от радиуса обрезания R . В реальной области тяжелых ядер $R \approx 10\varphi$, $\Lambda \sim 3,5$ и логарифмическое приближение количественно еще не очень точно. Поэтому для определения величин β и ϱ нужно прибегать к численным расчетам (значения β приведены в работе /10/, ϱ - в /22,27/). В то же время предэкспонента γ_0 имеет конечный предел при $R \rightarrow 0$ и слабо зависит от R .

Логарифмическое приближение удобно тем, что позволяет найти явную формулу для энергии уровня ε и исследовать аналитические свойства зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\zeta)$ в критической точке $\zeta = \zeta_c$. В реальном случае условие $\Lambda \gg 1$ выполняется с натяжкой, и поэтому необходимо вернуться к точному уравнению (I.18). Это уравнение, ввиду своей громоздкости, доступно лишь численным расчетам. Однако не вызывает сомнений, что качественные результаты при этом не изменяются.

4. Критический заряд для сталкивающихся ядер.

Для наблюдения описанных выше эффектов требуется $Z > 170$, что далеко от области известных в настоящее время тяжелых элементов. Обнаружение или синтез атомов со столь большими Z маловероятны, по крайней мере в ближайшем будущем. Наиболее смелые предложения об островах ядерной стабильности не идут дальше магических $Z = 114$ и 126 (см., например, /31/). Заметим, впрочем, что теоретически предсказывается "остров стабильности" даже вблизи $Z = 164$, и свойства соответствующих элементов (структура электронных оболочек, физические и химические свойства) вычисляются с помощью ЭВМ в ряде работ /32/.

Однако нужная нам ситуация может быть осуществлена и другим (видимо, более реальным) способом: /28,29/ при столкновении двух голых ядер с зарядами Z_1 и Z_2 такими, что Z_1 и $Z_2 < Z_c$, но $Z_1 + Z_2 > Z_c$. В тот момент, когда ядра сблизятся на расстояние $R \sim 1$, электрическое поле аналогично полю ядра с суммарным зарядом $Z_1 + Z_2$; поэтому уровень может войти в нижний континуум, после чего начнется спонтанное рождение позитронов.

Для количественных предсказаний нужно найти то расстояние

между ядрами $R_c = R_c(z_1, z_2)$, при котором нижний уровень дискретного спектра опускается до границы $\xi = -1$. При z_1 ,

$z_2 < 137$ каждое из ядер можно считать точечным,^{ж)} благодаря чему эта задача сводится к релятивистской задаче двух центров. К сожалению, переменные в ней уже не разделяются,^{жж)} что приводит к трудностям вычислительного характера. Для вычисления R_c в задаче двух центров был предложен вариационный метод /29/.

В настоящее время такие расчеты проводятся; предварительные результаты опубликованы в /30/.

Поскольку эти расчеты еще не закончены, мы ограничимся здесь качественным описанием. Для простоты положим $z_1 = z_2 = z$ (симметричная задача двух центров), $z = z/137$.

4.1. В виду большой массы ядер их движение можно считать классическим. Траектория частицы с массой μ в кулоновском поле неподвижного центра $V = \frac{\alpha}{z}$ имеет вид (см. рис.7):

$$z = R \frac{e-1}{e \cos \varphi - 1}, \quad (-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0) \quad (4.1)$$

где R - расстояние наименьшего сближения, e - эксцентриситет гиперболы, $\cos \varphi_0 = 1/e$. Угол рассеяния $\Theta = \pi - 2\varphi_0$ равен /34/:

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{\alpha}{\mu v^2 \rho} = \frac{R_0}{2\rho} \quad (4.2)$$

ж) При $z < 137$ в уравнении Дирака с потенциалом $V(z) = -\frac{Z}{z}$ нет "падения на центр". Поэтому область малых $z < R$ не существенна, и конечными размерами ядра можно пренебречь.

жж) В отличие от нерелятивистской задачи двух центров (ионизированная молекула водорода), когда разделение переменных имеет место в эллиптических координатах. См. например, /3/, стр. 331, а также /33/.

где v - скорость частицы на бесконечности, ρ - прицельный параметр, $R_0 = \frac{2a}{\mu v^2}$ - расстояние наименьшего сближения при лобовом столкновении. Измерение угла θ фиксирует все величины, определяющие траекторию:

$$e = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad R = R_0 \frac{1+e}{2}, \quad \rho = \frac{R_0}{2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (4.3)$$

Минимальное значение скорости частицы отвечает точке А (см. рис.7) и равно

$$v_{\min} = v \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = v \operatorname{tg} \frac{\pi-\theta}{4} \quad (4.4)$$

(в лобовом столкновении $\theta = \pi$, $e = 1$, $R = R_0$). Если в лабораторной системе одно из ядер первоначально покоится, а другое движется со скоростью v , то угол рассеяния $\theta_L = \frac{\theta}{2}$, $v_0 = v/2$ (v_0 - скорость ядер в системе ц.и.).

Приведем еще несколько кинематических формул (в системе ц.и.). Расстояние наименьшего сближения R_0 при лобовом столкновении ядер равно:

$$R_0 = 1,85 \cdot 10^{-3} \frac{Z^2}{E} = 35 \frac{\zeta^2}{E} \quad (4.5)$$

$$\frac{v_0}{c} = \frac{1}{70} \sqrt{\frac{\zeta}{R_0}}$$

Здесь $E = \frac{1}{2} M v_0^2$ - кинетическая энергия каждого из ядер в Мэв, R_0 - в единицах $\hbar/mc = 386 \text{ ф}$ (малый параметр $I/70$

в буквенном выражении есть $\sqrt{Z_m/A m_p}$). Для ядер урана

$\zeta = 2/3$, $v_0/c = 0,012$ и $0,03$ при $R_0 = 1$ и $0,1$, соответственно. Таким образом, движение ядер является нерелятивистским.

Далее, можно пренебречь уменьшением кинетической энергии ядер при рождении пары e^+e^- , т.к.

$$\frac{mc^2}{M v_0^2} = \frac{1}{137} \frac{R_0}{\tilde{r}^2} \ll 1$$

В силу этого движение ядер происходит по заданной траектории. В случае лобового столкновения она имеет вид:

$$z = R_0 \cosh u, \quad v = v_0 \tanh u, \quad t = \tau_c \frac{\sinh 2u + 2u}{4}, \quad (4.6)$$

где z - расстояние между ядрами, τ_c - время столкновения:

$$\tau_c = \frac{R_0}{v_0} = 70 R_0^{3/2} \tilde{r}^{-1/2} \quad (4.7)$$

(в единицах $\hbar/mc^2 = 1,3 \cdot 10^{-21}$ сек). Уровни энергии электрона вблизи $\xi = -1$ и критический заряд $\tilde{Z}_c$ можно находить в адиабатическом приближении, рассматривая ядра как покоящиеся на расстоянии наименьшего сближения R . Помимо указанных выше соображений, в пользу этого приближения можно заметить также, что скорость движения ядер минимальна именно вблизи точки $z = R$ *).

4.2. Оценим сначала вероятность рождения позитронов ω в самом грубом приближении. Представим себе, что ядра слились друг с другом, образовав одно сверхтяжелое ядро с зарядом

$2Z > \tilde{Z}_c = 170$. Вычисляя ω для покоящихся ядер по формуле (3.9) (где $\gamma_0 = 6\pi/5$, $\ell = 1,7$), получим для среднего времени рождения позитрона $\tau_+ = 1/\omega$ следующие значения (τ_+ дается в единицах $\hbar/mc^2 = 1,3 \cdot 10^{-21}$ сек).

*) Медленность движения ядер вблизи точки поворота приводит к тому, что характерное время столкновения численно несколько больше τ_c . Например, из (4.6) следует, что ядра находятся на расстоянии $z < 2R$ в течение времени $\Delta t = 2,4 \tau_c$.

Z	$2Z - Z_c$	τ_+	ν
86	2	$2,5 \cdot 10^6$	10^{-6}
90	10	300	10^{-2}
92	14	100	1/40
100	30	15	0,17
110	50	6	0,4

Эти значения нужно сравнить с временем τ_0 , в течение которого $\xi < -1$ и сталкивающиеся ядра рожают позитроны. Рождение e^+ возможно, пока $z < R_c$. Полагая $R_0 = 20\phi = 0,05$ (что отвечает соприкасающимся ядрам с радиусом 10ϕ), $R_c = 40\phi$, получим: *) $\tau_0 = 2,4 \tau_c \sim 2,5$. Вероятность рождения e^+ в лобовом столкновении ядер есть $\nu = \tau_0/\tau_+$ (см. таблицу). Величина ν быстро увеличивается с ростом $2Z - Z_c$.

4.3. Более строго задача ставится так. Рассмотрим 2 ядра, покоящиеся на расстоянии R . Обозначим

$$\frac{Z_c(R)}{Z_c(R=\infty)} = f(R) \quad (4.8)$$

Функция $f(R)$ показывает, насколько уменьшается критический заряд при сведении ядер на расстояние R (очевидно, $f(\infty) = 1$, $f(0) = 1/2$). Для определения $f(R)$ нужно решить уравнение Дирака при $\xi = -1$.

Поскольку характерные черты релятивистской кулоновской задачи (вид эффективного потенциала U , движение уровней с

*) При этом, согласно (4.5), $v_0/c \sim 1/20$, т.е. движение ядер все еще можно считать нерелятивистским. Кулоновский барьер для сближения ядер на расстояние R_0 равен $(Ze)^2/R_0 \sim 800$ Мэв для урана.

ростом Z , зависимость Z_c от радиуса ядра и т.д.) одинаковы для скалярных и спинорных частиц /9,13/, то начнем с более простого случая спина $S = 0$. Полагая в (1.9) $\xi = -1$ и переходя к эллиптическим координатам

$$\xi = \frac{z_1 + z_2}{R}, \quad \eta = \frac{z_1 - z_2}{R} \quad (1 \leq \xi < \infty, -1 \leq \eta \leq 1),$$

(см. рис.8), приходим к уравнению для $Z_c(R)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(\xi^2 - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}] + \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 - \eta^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}] + (-2\xi R \xi + \frac{4\xi^2 \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}) \Psi = 0 \quad (4.9)$$

Последний член в (4.9), мешающий разделению переменных, происходит от слагаемого $-\frac{1}{2}V^2$ в эффективном потенциале U .

Реально превышение $2Z$ над $Z_c = 170$ невелико (для урана $(2Z - Z_c)/Z_c = 0,08$), и потому для рождения e^+ требуются малые $R \sim 0,1$. Покажем, что в области $R \ll 1$ для $f(R)$ можно получить асимптотическую формулу.

Из (4.9) нетрудно определить поведение волновой функции вблизи ядер /29/:

$$\Psi(\xi, \eta) \sim (\xi^2 - \eta^2)^{-\frac{\sigma}{2}}, \quad \sigma = 1 - \sqrt{1 - 4\xi^2} \quad (4.10)$$

С другой стороны, при $z \gg R$ ядра практически можно рассматривать как слившиеся (с суммарным зарядом $2Z$), что дает

$$\Psi \approx C z^{-\frac{1}{2}} K_{iv}(4\sqrt{\xi}z), \quad v = 2\sqrt{(2\xi)^2 - \frac{1}{4}} \quad (4.11)$$

(для решения, убывающего на бесконечности). При $R \ll 1$ имеется промежуточная область $R \ll z \ll 1$, в которой

асимптотики (4.10) и (4.11) сшиваются друг с другом. Действительно, в этой области $\xi \approx \frac{2z}{R} \gg 1$ и (4.10) принимает вид: $\psi \sim \xi^{-\frac{1}{2}}$. С другой стороны, поскольку $z \ll 1$, то в (4.11) можно использовать асимптотику функции $K_{iv}(z)$ при $z \rightarrow 0$:

$$\psi \approx C_1 \xi^{-\frac{1}{2}} \sin\left(-\frac{\gamma}{2} \ln 2\xi R \xi + \arg \Gamma(1+iv)\right) \approx C_2 \xi^{-\frac{1}{2}(1+v \operatorname{ctg} \varphi)}$$

где $\varphi = \arg \Gamma(1+2iv) - \frac{\gamma}{2} \ln 2\xi R$ а C , C_1 и C_2 - некоторые константы (не зависящие от ξ). При получении последней формулы использовано условие $v \ln \xi \ll 1$

В случае малых v имеется область $1 \ll \xi \ll e^{\frac{2}{v}}$, в которой $\psi(\xi, \eta)$ зависит только от ξ , и притом степенным образом. Из условия сшивания внутреннего и внешнего решений находим: $1 + v \operatorname{ctg} \varphi = \sigma$, откуда

$$R = \frac{1}{2\xi} \exp \left\{ -\frac{2}{v} \left[\arccotg \frac{1 - \sqrt{3-v^2}}{v} - \arg \Gamma(1+iv) \right] \right\}$$

$$v = \sqrt{16\xi^2 - 1}, \quad 1/4 < \xi < 1/2 \quad (4.12)$$

Этим уравнением определяется критический заряд ξ_c для скалярной частицы при данном расстоянии между ядрами R .

Обобщение на спин $s = 1/2$ не является проблемой.

В этом случае вместо (4.10) и (4.11) имеем следующие асимптотики:

$$\psi \sim \begin{cases} \xi^{\gamma-1} & , \text{ при } \xi \rightarrow 0 \quad (\gamma = \sqrt{1-\xi^2}) \\ \frac{1}{2} K_{iv}(4\sqrt{\xi^2}) & , \text{ при } z \gg R \end{cases} \quad (4.13)$$

сшивание которых приводит к соответствующему уравнению для $\xi_c(R)$:

$$R = \frac{1}{2\zeta} \exp \left\{ -\frac{2}{v} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{v} \sqrt{3 - \frac{v^2}{4}} \right) - \arg \Gamma(1 + iv) \right] \right\} \quad (4.14)$$

где теперь $v = 2\sqrt{4\zeta^2 - 1}$ ($\frac{1}{2} < \zeta < 1$). Построенные по формулам (4.12), (4.14) графики функций $f(R)$ для $s=0$, $1/2$ приведены на рис. 9.

Как видно из самого вывода, эти формулы являются асимптотическими и справедливы при $R \ll 1$. Повидимому, в этой области R они имеют хорошую точность. *) Значения R_c , полученные с помощью (4.14), представлены на рис. 10 (напомним, что R_c - "критическое" расстояние между ядрами, при котором нижний уровень дискретного спектра опускается до $\xi = -1$). При $R < R_c$ становится возможным рождение позитронов. На пороге $R \rightarrow R_c$ вероятность рождения позитронов ω экспоненциально мала из-за кулоновского барьера (ср. с формулой (3.9)), однако ω быстро растет с уменьшением R . Когда уровень углубится в нижний континуум на величину $\sim mc^2$, сравнимую с высотой кулоновского барьера, то $\omega \sim 1$ и $\tau_+ \sim \tau_0$, т.е. практически все ядра рожают по два позитрона. Соответствующее значение R (обозначим его через R'_c) показано на рис. 10 пунктиром. На этом процесс рождения позитронов за счет нижнего уровня $1s$ заканчивается. Рождение позитронов станет возможным вновь при таких R , когда границу $\xi = -1$ пересекают

*) Приближенная формула для ζ_c , аналогичная (4.14), может быть получена и в случае одного ядра /10/, когда возможно сравнение с точным решением задачи /9/. Это сравнение показывает, что в области $R \sim 0,03$ асимптотика дает ζ_c с точностью порядка 0,5%.

следующие уровни: $2p_{1/2}$, $2s$, $3p_{3/2}$ и т.д.

4.4. Кривые рис. 10 позволяют оценить сечение σ рождения позитронов при столкновении ядер. Грубо можно считать, что рождение позитронов имеет место в каждом столкновении, для которого $R < R'_c$. Отсюда с помощью (4.3) получаем

$$\sigma(E) \sim R_c'^2 \left(1 - \frac{E'}{E}\right), \quad E > E' \quad (4.15)$$

где E' - энергия, необходимая для сближения ядер на расстояние R'_c (при лобовом столкновении). При $R'_c \sim 20\text{ ф}$ получаем $\sigma \sim 10^{-24} \text{ см}^2$. Разумеется, эта оценка носит предварительный характер. ж)

Сделаем несколько заключительных замечаний.

1) В релятивистской задаче двух центров с $Z_1 = Z_2$ (одинаковые ядра) уровень $1s$ расщепляется на два - четный (g) и нечетный (u). В этом отношении ситуация напоминает термы H_2^+ или H_2 . Полученные выше формулы (4.12) и (4.14) относятся к четному состоянию Σ_g , которое обладает меньшей энергией.

2) Для одного точечного ядра кривая уровня $\varepsilon = \varepsilon(\zeta)$ обрывается, не дойдя до нижнего континуума (см. формулы (1.1), (1.3)). Возникающая при этом трудность с "падением на центр" преодолевается явным введением конечных размеров ядра. В отличие от этого, в задаче двух центров с точечными ядрами "падение

ж) Более точно величину σ можно будет определить после численного расчета функции $f(R)$ из (4.8). Однако можно думать, что приведенная выше оценка σ по порядку величины правильна, т.к. она основывается на той части кривой рис. 9, ^{рис} кривая лежит при $R \lesssim 0,1$ - а в этой области приближение $R \ll 1$ довольно правдоподобно.

на центр" не возникает, и кривая $\xi = \xi(\zeta)$ спокойно продолжается до границы $\xi = -1$. Чтобы показать это, рассмотрим произвольный потенциал притяжения:

$$V(\vec{r}) = -\zeta v(\vec{r}) \quad (4.16)$$

где $v(\vec{r}) \geq 0$ — фиксированная функция, а константу связи ζ будем менять. Пусть при данном значении ζ имеется уровень с энергией ξ и волновой функцией ψ . Вычисляя по теории возмущений ^{жж)} изменение энергии уровня при бесконечно малом углублении потенциала, находим:

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = - \int v(\vec{r}) \psi^* \psi d^3z < 0 \quad (4.17)$$

(эта формула является точной, если ψ — точная волновая функция уровня с энергией ξ). Отсюда сразу видно, что с ростом ζ (при данном $v(\vec{r})$, т.е. при фиксированном расстоянии между ядрами) всякий уровень дискретного спектра монотонно опускается. Особенность энергии ξ может проявиться только как расходимость интеграла (4.17) при малых z (при $z \rightarrow \infty$,

$\psi \sim e^{-\lambda z}$ и интеграл сходится). В кулоновском поле $V(z) = -\zeta/z$ имеем: $\psi(z) \underset{(z \rightarrow 0)}{\approx} z^{\gamma-1}$, где

$\gamma = \sqrt{1-\zeta^2}$. В случае двух ядер такой вид имеет ψ при

$z_1 \rightarrow 0$ или $z_2 \rightarrow 0$. Поэтому "опасная" часть интеграла (4.17) имеет вид $\int_0^z \frac{dz}{z^{1-2\gamma}}$, т.е. интеграл конечен, пока $\gamma > 0$ или $\zeta < 1$. Т.к. $\zeta_c(R) < 1$ при любом

^{ж)} Например, в задаче двух центров

$$v(\vec{r}) = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{4\zeta}{R(\zeta^2 - \gamma^2)}$$

^{жж)} Здесь существенно, что потенциал V входит линейно в уравнение Дирака $(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m + V)\psi = \xi \psi$

конечном R , то ход энергии нижнего уровня выглядит примерно так (см. рис. II). Отметим, что при $\zeta > 1$ и в задаче двух центров необходимо учитывать конечные размеры ядра.

3) Относительно получения асимптотики (4.14) можно заметить следующее. Имеется 3 области изменения z : (I) $z_1 \ll R$ или $z_2 \ll R$; (II) $z_1, z_2 \gg R$; (III) переходная область $z_1, z_2 \sim R$ (см. рис.8). Находясь во внутренней области I, электрон в основном "чувствует" поле одиночного ядра и потому $\psi \sim (z, z_2)^{\gamma-1}$; пока $\zeta < 1$, нет необходимости обрезать кулоновский потенциал, т.к. поправки на конечные размеры ядер малы. Во внешней области II действует суммарное поле ядер ($\zeta \rightarrow 2\zeta$), т.е. "падение на центр" возникает уже при $\zeta \geq 1/2$. Спецификой релятивистской кулоновской задачи является то, что при любом ζ есть решение с энергией $\varepsilon = -1$, быстро убывающее на бесконечности:

$$\psi \sim \exp(-4\sqrt{\zeta}z), \quad z \rightarrow \infty \quad (4.18)$$

Однако это решение, вообще говоря, не сливается с решением во "внутренней" области I.

Связанный уровень электрона на край нижнего континуума существует лишь при тех $\zeta = \zeta_c$, когда внутреннее ψ_I и внешнее ψ_{II} решения сливаются. Таким образом, все определяется поведением ψ в промежуточной области III ($R \ll z \ll 1$), где зависимость ψ от ζ степенная:

$$\psi_I \sim \zeta^{-(1-\gamma)}, \quad \gamma = \sqrt{1-\zeta^2} \quad (4.19)$$

$$\psi_{II} \sim \begin{cases} \xi^{-(1+\gamma')} & , \quad \text{при } \zeta < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\xi} \left(\xi^{ig} e^{i\varphi} + \xi^{-ig} e^{-i\varphi} \right) & , \quad \text{при } \zeta > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.20)$$

($\gamma' = \sqrt{1-4\zeta^2}$, $g = \sqrt{4\zeta^2-1}$) . Поведение ψ_{II} при $\zeta > 1/2$ характерно для всех задач с "падением на центр". Пока $\zeta < 1/2$, $1-\gamma < 1+\gamma'$, и сшивание решений невозможно. Оно становится возможным при $\zeta > 1/2$ благодаря появлению в (4.20) произвольной фазы φ :

$$\psi_{II} \sim \xi^{-(1+g\alpha g\varphi)} \quad (\text{при } g \ln \xi \ll 1)$$

Сравнение показателей в ψ_I и ψ_{II} непосредственно приводит к уравнению (4.14) для $\zeta_c(R)$.

4) Сравнительно большая величина сечения рождения позитронов при столкновении тяжелых ядер (см. оценку (4.15)) облегчает проверку теории. К сожалению, эксперимент значительно усложняется требованием иметь пучки из голых ядер.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А.М.Дирак. Принципы квантовой механики, М., Физматгиз, 1960.
2. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, Гостехиздат, 1958.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Физматгиз, 1963.
4. H. Weyl, Math. Ann. 68, 220 (1910);
см. также Э.Коддингтон, Н.Левинсон, Н.Левинсон. Теория
обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
5. K.M. Case Phys. Rev. 80, 797 (1950).
6. А.М.Переломов, В.С.Попов. ТМФ 4, 48 (1970).
7. W.M. Frank, D.J. Land, R.M. Spector Rev. Mod. Phys.
43, 36 (1971).
8. I. Pomeranchuk, Ya. Smorodinsky Journ. of Phys. USSR
9, 97 (1945).
9. В.С.Попов. ЯФ 12, 429 (1970).
10. В.С.Попов. ЯФ 15, 1069 (1972).
11. W. Pieper, W. Greiner Zs. Phys. 218, 327 (1969).
12. В. П. Крайнов. Письма в ЖЭТФ 13, 359 (1971).
13. В.С.Попов. ЖЭТФ 60, 1228 (1971).
14. А.М.Переломов, В.С.Попов. ЯФ 14, 661 (1971).
15. Я.Б.Зельдович, Е.М.Рабинович. ЖЭТФ 37, 1296 (1959).
16. V.M. Galitsky, V.F. Cheltsov Nucl. Phys. 56, 86 (1964).
17. А.Б.Мигдал, А.М.Переломов, В.С.Попов. ЯФ 14, 874 (1971).
18. А.М.Переломов, В.С.Попов. ЖЭТФ 61, 1743 (1971).
19. Ю.Н.Демков, Г.Ф.Друкарев. ЖЭТФ 49, 661 (1965).
20. А.Б.Мигдал. ЯФ, в печати (1972).
21. L.I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg Phys. Rev.
57, 315 (1940).
22. В.С.Попов. ЖЭТФ 59, 965 (1970).

23. А.Б.Мигдал. ЖЭТФ 61, 2209 (1971).
24. E.H. Wichman, N.M. Kroll Phys. Rev. 96, 232 (1954);
101, 843 (1956)
25. E.A. Uehling Phys. Rev. 48, 55 (1935)
26. A.B. Migdal Vacuum polarization in strong homogeneous
fields. Препринт ЦТФ, 1972
27. Я.Б.Зельдович, В.С.Попов. УФН 105, 403 (1971).
28. С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович, ЖЭТФ 57, 654 (1969);
Nuovo Cim. Lett. 1, 835. (1969)
29. В.С.Попов. ЯФ 14, 458 (1971).
30. В.С.Попов, Т.И.Рождественская. Письма в ЖЭТФ 14, 267 (1971).
31. Г.Н.Флеров, В.А.Друин, А.А.Плеве. УФН 100, 45 (1970).
32. G.T. Seaborg, J.L. Bloom Sci. Amer. 220, 56 (1969)
33. П.Гомбаш. Проблема многих частиц в квантовой механике.
ИЛ, 1953, стр.27, 93, 206.
34. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика, Физматгиз, 1958.

Примечание: Более полный список литературы по вопросам, затро-
нутым в лекции, можно найти в работе /27/, а по
вопросам, связанным с "падением на центр" в кван-
товой механике - в обзоре /7/.

РИСУНКИ

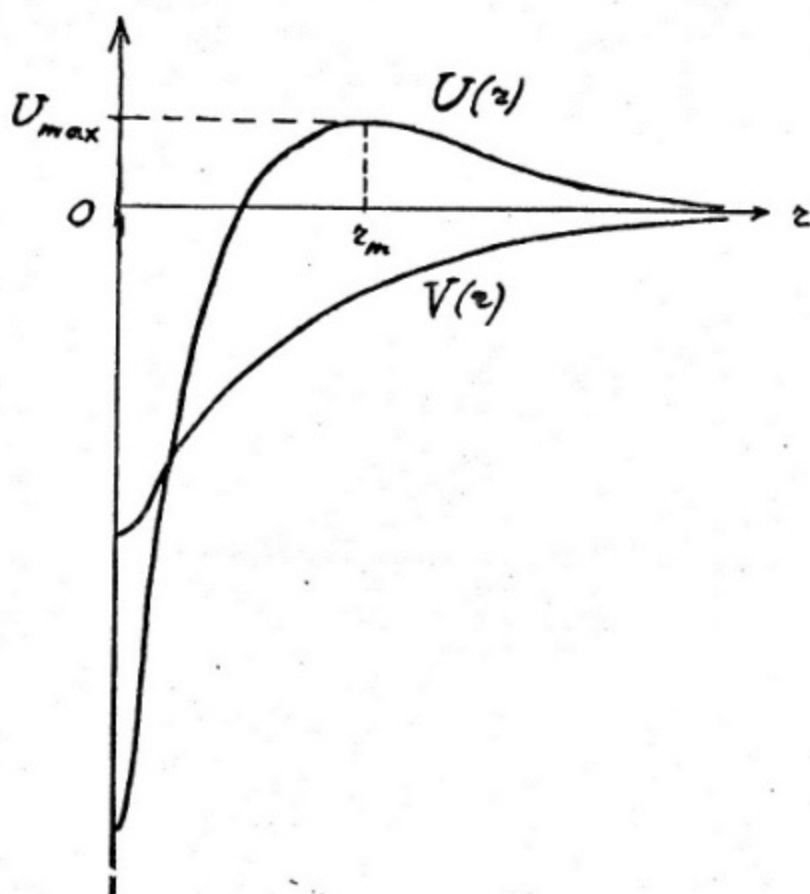


Рис. I Потенциал $V(z)$ и эффективный потенциал $U(z)$ для кулоновской задачи при $\xi = -1$ ($z = z_c$).



Рис. 2. Логарифмическая производная ξ на краю ядра: 1) $\alpha = -I$, модель обрезания I; 2) $\alpha = -I$, модель II; 3) $\alpha = I$, модель II.

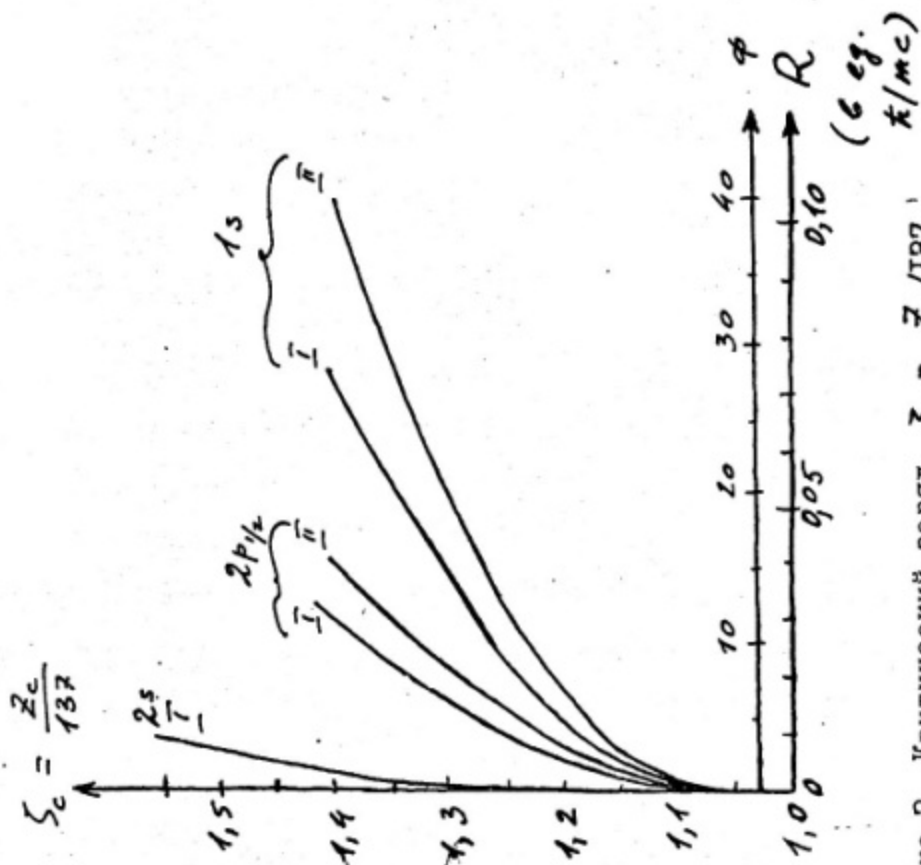


Рис. 3. Критический заряд $Z_c = Z_c / 137$ для наиболее низко лежащих уровней. Цифры I и II соответствуют двум моделям обрезания при $z < R$ (см. текст).

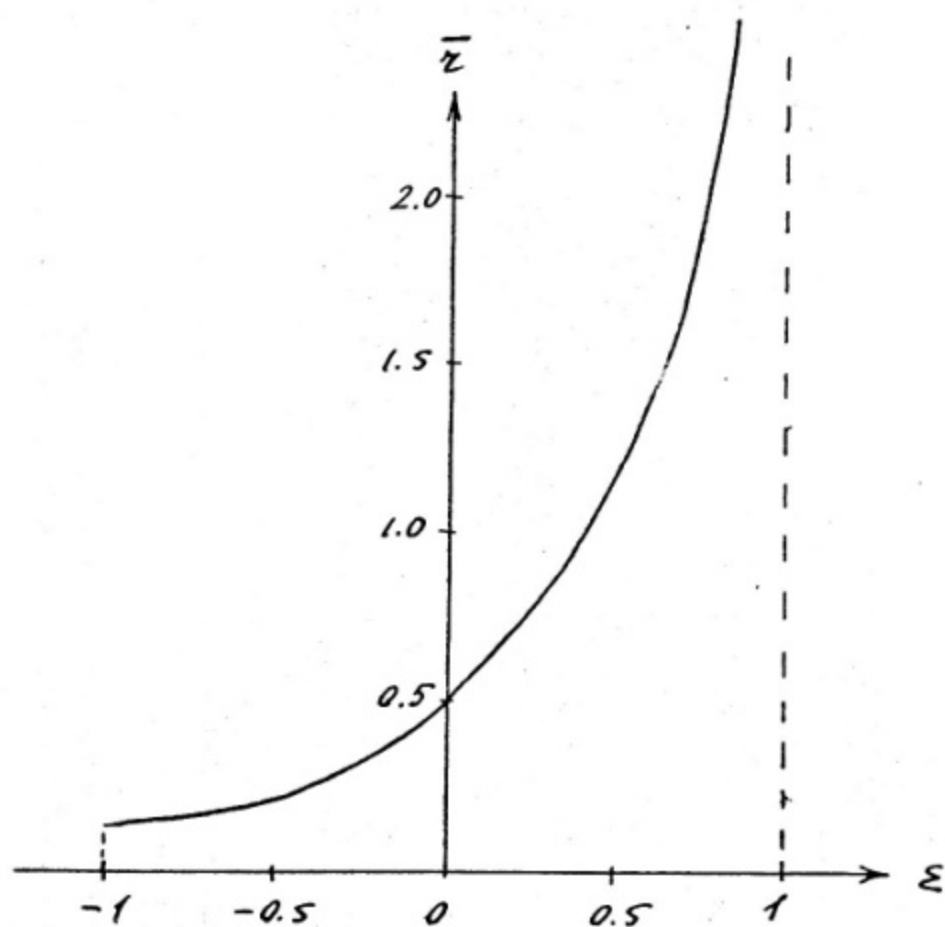


Рис.4 Средний радиус $\bar{z}$ уровня $1s$ в случае $\Lambda = \ln \frac{1}{R} \gg 1$

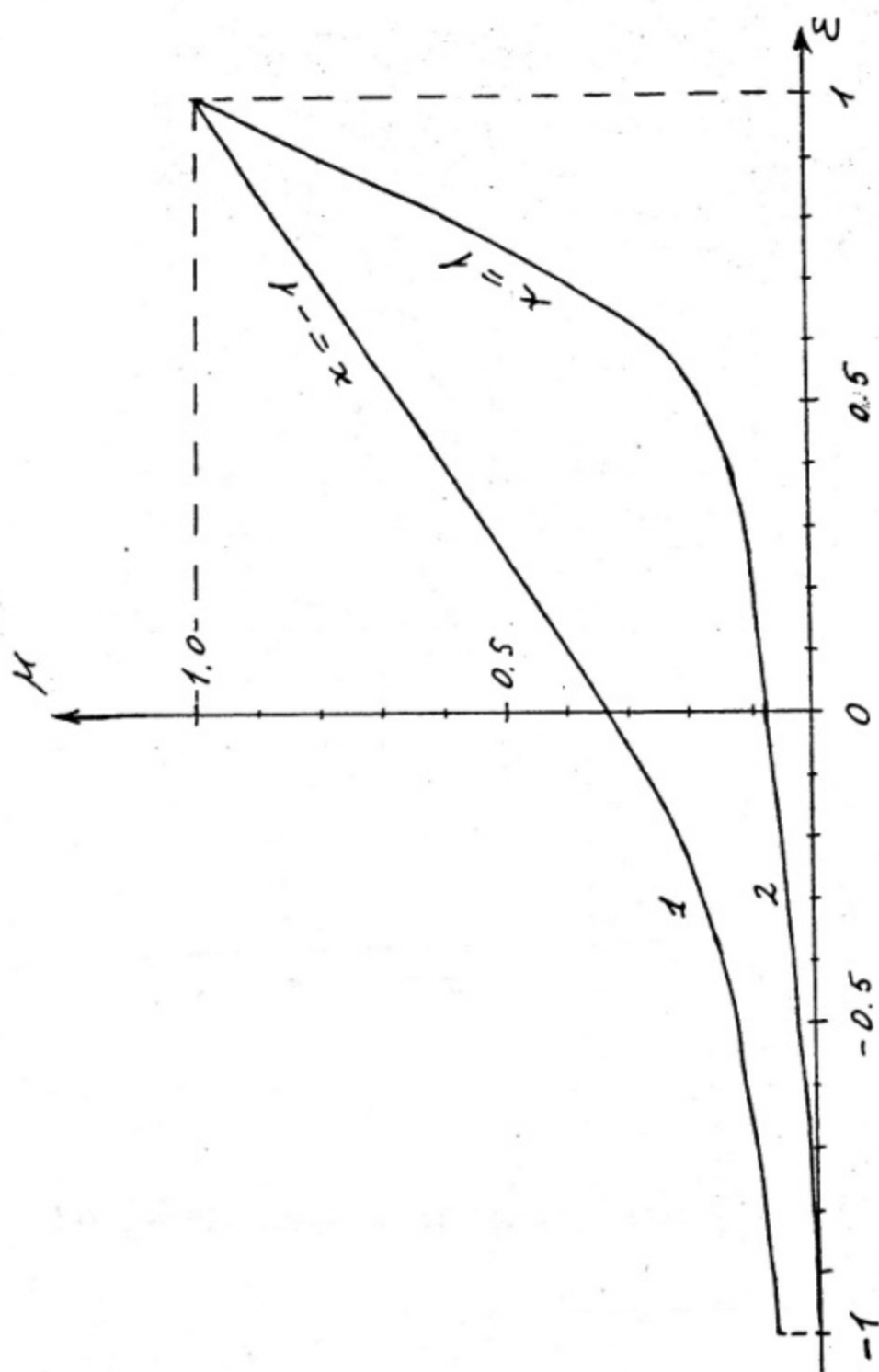


Рис.5 Магнитный момент связанного электрона в зависимости от энергии уровня ε (при $\lambda \gg 1$). Кривые 1 и 2 относятся к уровням $1\frac{3}{2}$ и $2p\frac{1}{2}$.

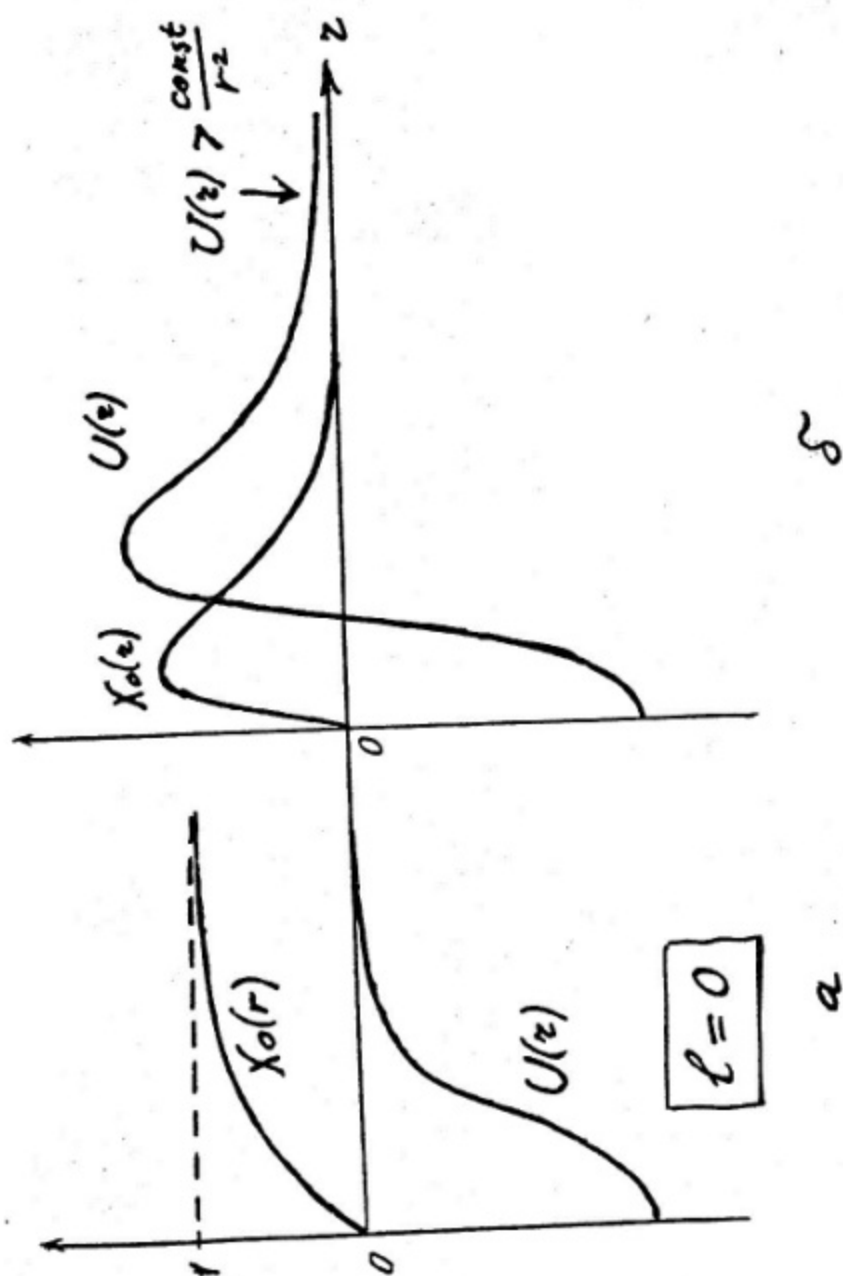


Рис.6 Потенциал $U(z)$ и волновая функция $\chi_0(z)$ в момент возникновения уровня: а) $l = 0$, случай притяжения; б) потенциал с барьером типа кулоновского или центростремительного.

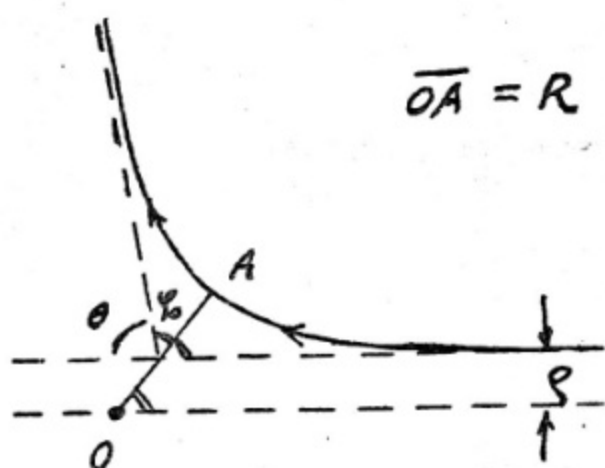
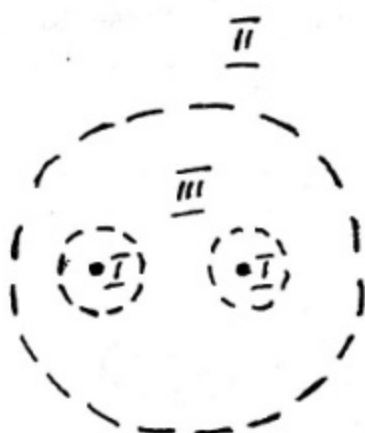
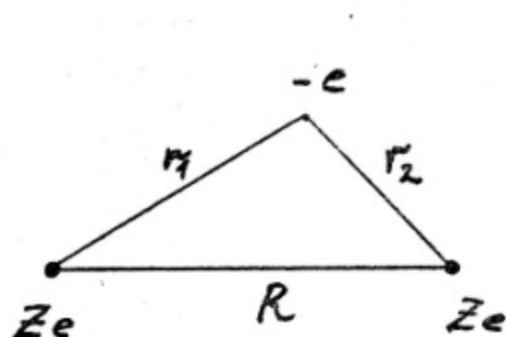


Рис.7 Траектория частицы в кулоновском поле.



3 области конфигурационного пр-ва

Рис.8 Переменные r_1 , r_2 , R в задаче двух центров и 3 характерные области конфигурационного пространства.

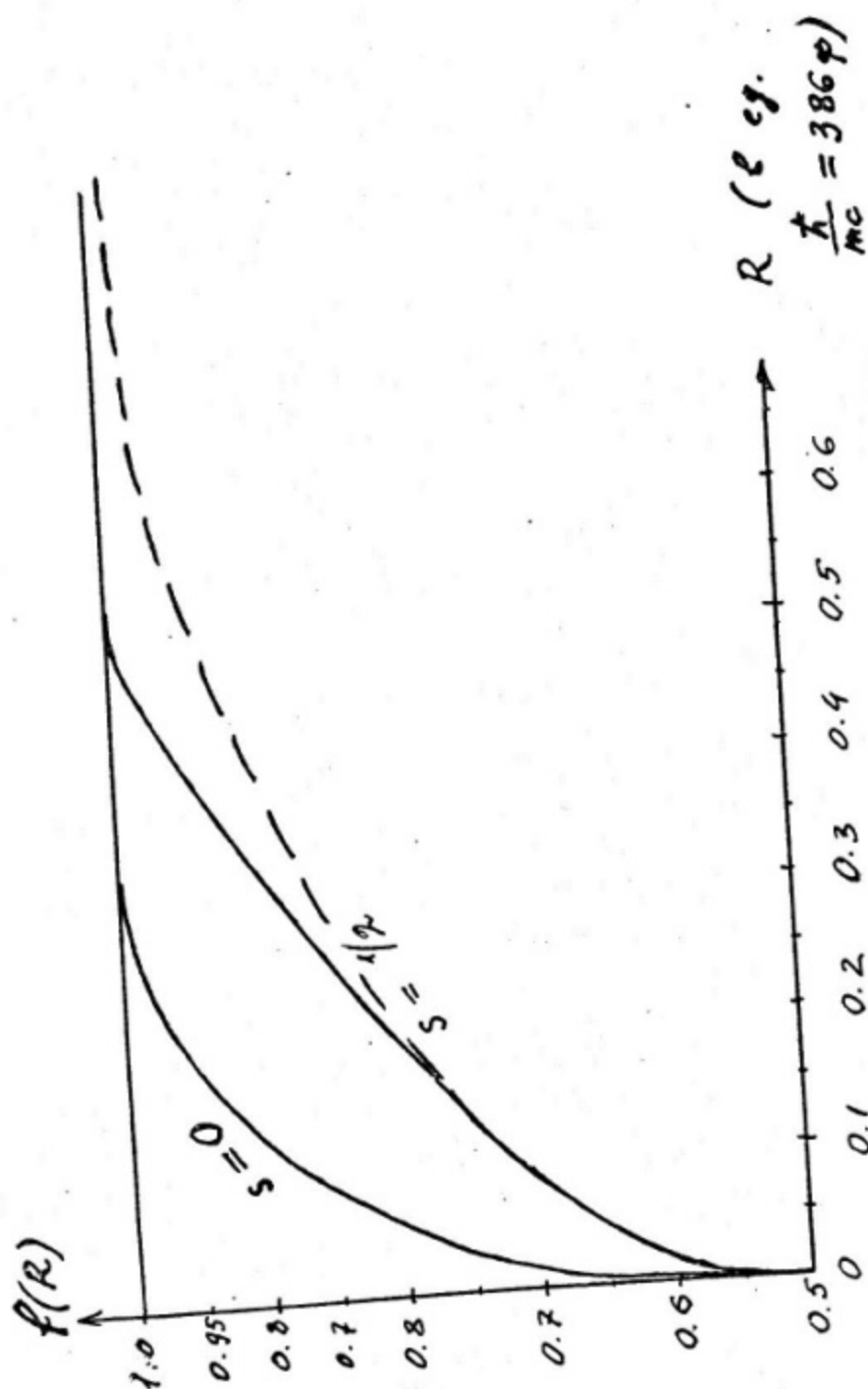


Рис. 9 Функции $f(R)$ из (4.8). Для спина $s = 1/2$ значение $f(R)$ совпадает с критическим зарядом $z_c(R)$ для задачи двух центров. Предполагаемый результат точного расчета $f(R)$ показан пунктиром.

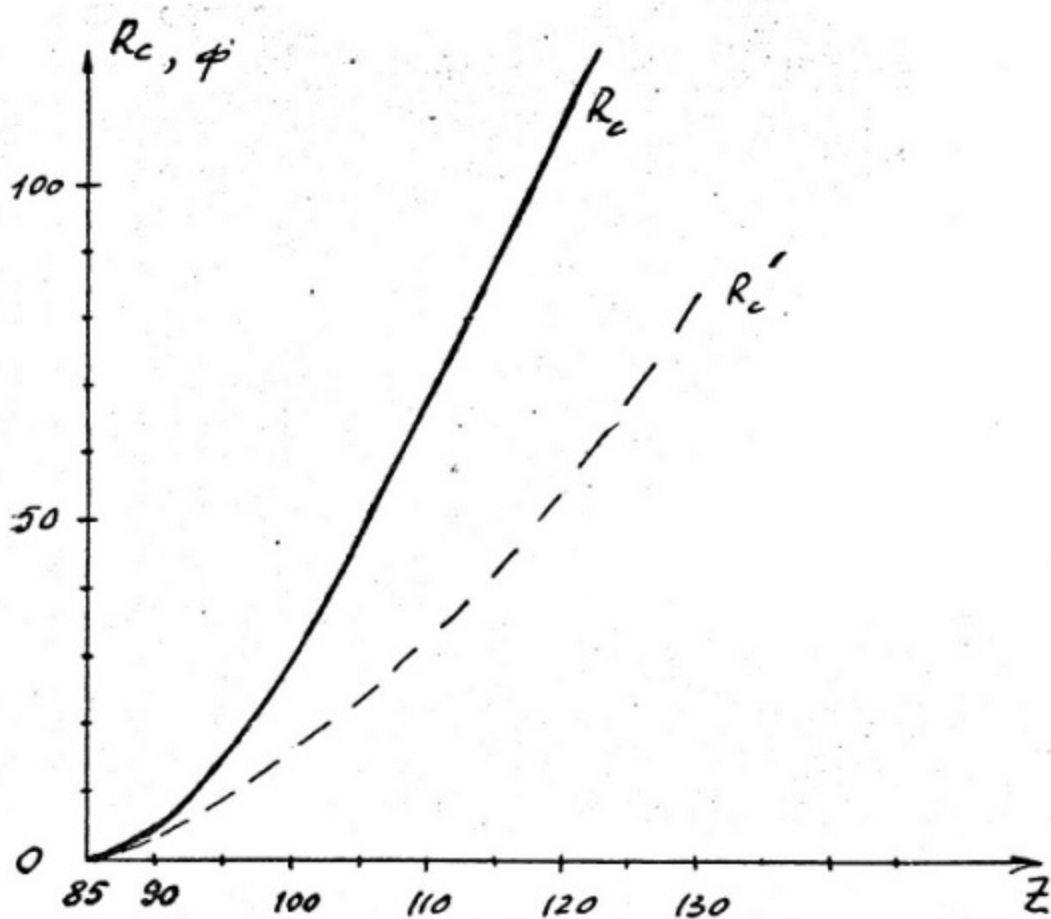


Рис.10 Зависимость критического расстояния R_c от заряда ядер Z .

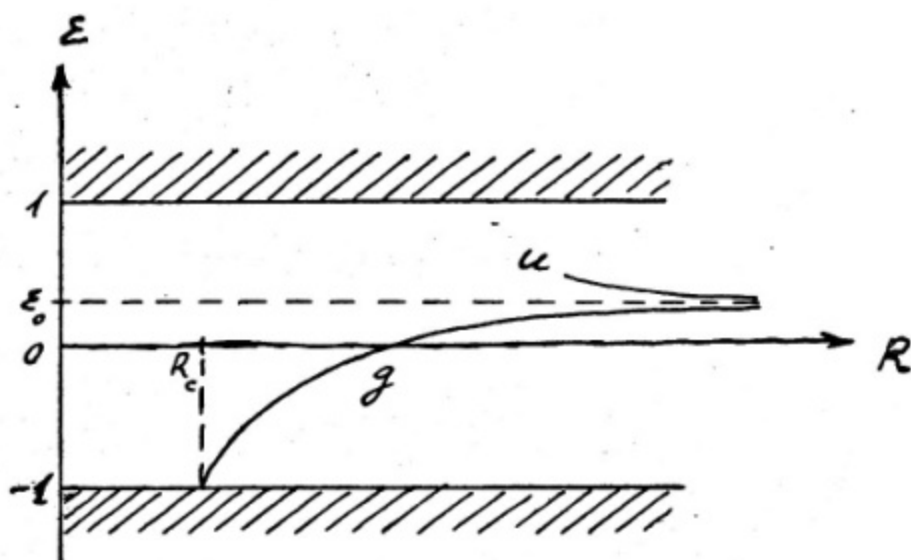


Рис. II Ход уровня ϵ при сближении ядер (R - расстояние между ядрами, ϵ_0 - энергия уровня в изолированном ядре Z). Кривые g и u соответствуют чётной и нечётной $\psi(r_1, r_2)$; вид $\epsilon_u(R)$ известен лишь при $R \rightarrow \infty$.