МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Всесоюзная школа по теоретической ядерной физи[ке]

5 сессия Конспект лекций на тему:

«НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ
ЯДРА»

Часть II

А. М. ПЕРЕЛОМОВ

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП,
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

МОСКВА — 1974

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Московский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-физический институт

Всесоюзная школа по теоретической ядерной физике

Конспект лекций на тему:

5 сессия

"НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ
ТЕОРИИ ЯДРА"

Часть П

А.М. ПЕРЕЛОМОВ

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Москва – 1974г.

ВВЕДЕНИЕ

Соображения симметрии и инвариантности уже давно играют важную роль в физике вообще и, в частности, в ядерной физике. Математический метод изучения симметрий, как известно, дает теория групп. Такие группы как группа вращений трехмерного пространства и группа перестановок стали использоваться в ядерной физике сразу же после ее возникновения, т.е. начиная с 30-х годов. Применению теории этих этих групп посвящена обширная литература ж) (см. например книги Вигнера [1], Любарского [2], Хаммермеша [3], Ванагаса [4], и лекции Рака́ [5], Беймана [6], и Биденхарна [7]).

Группа вращений трехмерного пространства является простейшей из "классических групп" [8]. Существуют четыре серии "классических групп": A_n, B_n, C_n и D_n. Группа A_n (часто используется обозначение $SU(N)$) состоит из унитарных матриц порядка ($n+1$) с определителем равным единице. Группа $B_n(SO(2n+1))$ эта группа вращений ($2n+1$) - мерного пространства, а группа D_n ($SO(2n)$) - группа вращений $2n$ - -мерного пространства. Наконец группа C_n ($Sp(2n)$)

ж) Общая теория групп Ли и их представлений подробно изложена в ряде монографий. Отметим, из них книги Г.Вейля [8], Желобенко [9] и Кириллова [10].

состоит из так называемых симплектических преобразований $2n$ -мерного пространства.

Все эти группы находят применение в ядерной физике.

Так например группа $SU(4)$ еще в 1937 г. была использована Вигнером [11] при построении им теории ядерных супермультиплетов (см. также более позднюю работу [12]). Классификация уровней ядер в модели оболочек основывается на теории представлений группы $SU(N)$ [5, 6] . Учет квадрупольного взаимодействия в модели оболочек может быть проведен с помощью группы. $SU(3)$ [13] .

Группа $SO(2n)$ описывает канонические преобразования n фермионных операторов. Группа $SO(N)$ применяется в методе гиперсферических гармоник [14] , а группа $SO(3)$ – в так называемой модели квазиспина [15]. Группа $Sp(2n)$ является группой канонических преобразований n бозонных операторов и используется также при рассмотрении $j-j$ связи в модели оболочек [6].

Отметим еще некомпактную группу $SU(1,1)$ – группу матриц второго порядка с определителем равным единице, оставляющих инвариантной форму $|z_1|^2-|z_2|^2$. Эта группа встречается при анализе коллективных степеней свободы ядра [16] . Хорошо известные в теории сверхтекучести канонические преобразования Боголюбова [17] также образуют группу $SU(1,1)$.

Наконец методы теории групп используются в статистической теории уровней сложных ядер, развитой в работах Дайсона [18] .

В данных лекциях будут рассмотрены два вопроса из теории представлений групп, имеющих отношение к ядерной физике.

1. В задаче о классификации многочастичных состояний и при расчете энергетических уровней ядер по модели оболочек необходимо знать собственные значения инвариантных операторов (операторов Казимира) (см. работы [5-7] и [19]). В первой части лекций будут получены явные формулы для собственных значений операторов Казимира произвольного порядка для всех компактных классических групп Ли.

В последнее время в ряде разделов физики оказалась удобной и широко используется система так называемых когерентных состояний. Эта система связана с определенной группой – группой Гейзенберга-Вейля. В работе [20] было показано, что аналогичную систему – систему обобщенных когерентных состояний можно определить и для произвольной группы Ли. Использование таких систем значительно упрощает решение задач, обладающих динамической симметрией. Свойства таких систем для простейших групп Ли будут рассмотрены во второй части лекций.

1. ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ.

1. Введение и постановка задачи.

Оператором Казимира[ж)] в теории групп Ли называют построенный из генераторов инвариантный оператор, т.е. оператор, коммутирующий с генераторами группы.

Эти операторы представляют интерес как с чисто математической точки зрения, так и для приложений. Применение операторов Казимира в квантово-механических расчетах связано с тем, что они входят в "полный набор наблюдаемых" и естественным образом возникают в задачах, связанных со снятием вырождения при наложении возмущений. Они используются например для классификации многочастичных состояний и расчета энергетических уровней атомов и ядер по модели оболочек (см.напр. работы Рака́ [5], [19], книгу Беймана [6] и обзор Биденхарна [7]).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением компактных

ж) В честь Казимира, показавшего в 1931 г. [21], что для полупростой группы Ли квадратичный инвариантный оператор существует и определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Соответствующий оператор на n-мерной сфере совпадает с лапласианом. По этой причине операторы Казимира называют также операторами Лапласа.

простых групп Ли. Заметим, однако, что полученные результаты переносятся и на некомпактные полупростые группы Ли.

Согласно лемме Шура, оператор Казимира $\hat{C}$ для произвольного непроводимого представления D алгебры Ли сводится к числу $C(D)$, которое мы будем называть собственным значением этого оператора. Представление D определяется старшим весом $\vec{m}$; соответственно собственное значение $C(D)$ является функцией старшего веса $\vec{m}$: $C(D) = C(\vec{m})$ и имеет вид некоторого полинома от координат веса $\vec{m}$.

Хорошо известно (см. работы [5], [22], [23], [24]), что для любой простой алгебры Ли L ранга n существует ровно n операторов Казимира $\hat{C}_{p_1}, \hat{C}_{p_2}, \ldots \ldots \hat{C}_{p_n}$, обладающих следующими свойствами:

1. Оператор $\hat{C}_p$ имеет порядок p , т.е. является однородным полиномом степени p от элементов алгебры L .

2. Произвольный оператор $\hat{C}$ полиномиально выражается через $\hat{C}_{p}, \ldots, \hat{C}_{p_n}$. Иными словами операторы $\hat{C}_{p_1}, \ldots, \hat{C}_{p_n}$ являются образующими в алгебре всех инвариантных операторов.

3. Совокупность чисел $\lambda_i = C_{p_i}(\vec{m})$ однозначно характеризует неприводимое представление $D(\vec{m})$

алгебры Ли.

Заметим, что выбор таких операторов $\hat{C}_{p_i}$ не является однозначным. В дальнейшем мы фиксируем его определенным образом, с тем, чтобы получить наиболее простые формулы для собственных значений $C_p(\vec{m})$.

Вычисление собственных значений операторов Казимира представляет несомненный интерес как для самой теории групп, так и с точки зрения ее приложений к физике. Для простейшего случая $p = 2$ эта задача была решена Рака в 1951 г. [5]. Попыткам обобщения формулы Рака на случай произвольного p было посвящено большое число работ [25], [26], [27], [28], [29], [30], в которых были найдены явные формулы для собственных значений операторов Казимира при $p \leq 5$ для классиче ских групп. Особенностью этих работ является весьма громоздкая техника вычислений, видимо неизбежная при рассмотрении структурных постоянных к картановском базиосе.

Полное решение задачи было дано в серии работ [31-34]. В этих работах были получены простые формулы для собственных значений операторов Казимира произвольного порядка. Решение задачи удалось существенно упростить за счет специального выбора образующих $\hat{C}_{p_i}$ в алгебре всех инвариантных операторов. Для классических групп было получено также выражение для производящей функции для собственных значений операторов Казимира. Содержание этих работ излагается ниже.

Отметим еще работу 35 , где для другого выбора образующих были также получены формулы для собственных значений операторов Казимира произвольного порядка. Вычисление $C_p(\vec{m})$ по этим формулам сводится к действию дифференциального оператора высокого порядка на функцию переменных.

2. Построение операторов Казимира.

Пусть L – компактная простая алгебра Ли, т.е. компактная алгебра Ли, не содержащая инвариантных подалгебр. Перестановочные соотношения для генераторов X_μ алгебры L ($\mu = 1,2, \dots d$; d – размерность алгебры L) имеют вид:

$$[X_\mu, X_\nu] = C^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda \tag{2.1}$$

Из структурных постоянных $C^\lambda_{\mu\nu}$ построим метрический тензор

$$g_{\mu\nu} = - C^\sigma_{\mu\rho} C^\rho_{\nu\sigma} \tag{2.2}$$

Для простой алгебры Ли этот тензор не является особым. Следовательно существует обратный тензор $g^{\mu\nu}$, с помощью которого мы можем поднимать индексы. Например

$$X^{\mu} = g^{\mu\nu} X_{\nu} \qquad (2.3)$$

Построим оператор

$$\hat{C}_2 = g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} \qquad (2.4)$$

Нетрудно проверить, что оператор $\hat{C}_2$ коммутирует со всеми операторами X_{λ} и, следовательно, является оператором Казимира.

Для вычисления собственного значения оператора $\hat{C}_2$ используем картановский базис в алгебре L. Напомним, что этот базис образуют элементы $X_{\alpha}, X_{-\alpha}$ и H_i, где α –пробегает множество положительных корней алгебры L, а $i = 1, \ldots, r$ (r – ранг алгебры L). Перестановочные соотношения (2.1) в этом базисе принимают вид:

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = C^{\gamma}_{\alpha\beta} X_{\gamma}, \ \gamma = \alpha+\beta, \ \beta \neq -\alpha \qquad (2.5)$$

$$[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = C^{i}_{\alpha-\alpha} H_i \qquad (2.6)$$

$$[H_i, X_{\alpha}] = C^{\alpha}_{i\alpha} X_{\alpha}, \quad [H_i, H_j] = 0 \qquad (2.7)$$

Соответственно квадратичный оператор Казимира $\hat{C}_2$ дается формулой:

$$\hat{C}_2 = \sum_{\alpha} g_{\alpha-\alpha} X^{\alpha} X^{-\alpha} + \sum_{i=1}^{r} H_i H^i \qquad (2.8)$$

Пусть D – произвольное неприводимое представление алгебры L. Известно, что в пространстве представления D существует вектор старшего веса $|\psi_0\rangle$, т.е. вектор, удовлетворяющий условиям: $X_{-\alpha}|\psi_0\rangle = X^{\alpha}|\psi_0\rangle = 0$ для всех положительных корней α ;

$$H^i|\psi_0\rangle = m^i|\psi_0\rangle \qquad (2.9)$$

Применяя оператор $\hat{C}_2$ к $|\psi_0\rangle$ и учитывая (2,9) получаем:

$$\hat{C}_2|\psi_0\rangle = \Big(\sum_{\alpha>0}\big[X_{-\alpha}, X^{-\alpha}\big] + \sum_{i=1}^{r} m_i m^i\Big)|\psi_0\rangle \qquad (2.10)$$

Откуда находим окончательное выражение для $C_2(\vec{m})$ (формулу Рака [5]).

$$C_2(\vec{m}) = \sum_{i=1}^{r} m_i(m^i + 2r^i) = \sum_{i=1}^{r}(\ell_i\ell^i - r_i r^i),\ \ell_i = m_i + r_i \qquad (2.11)$$

Здесь $\vec{r}$ – полусумма положительных корней алгебры L :

$$r^i = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} C_{-\alpha_0}^{\,0-\alpha,\,i} \qquad (2.12)$$

Для построения операторов Казимира высших порядков воспользуемся методом работы [30] . Пусть D_0 – некоторое фиксированное представление группы G и A_μ его генераторы ($\mu = i, \alpha$). Они являются матрицами $(A_\mu)^a_b$, где $a, b = 1, 2, \ldots d_0$. (d_0 – размерность представления D_0). Из генераторов A_μ построим тензор $g_{\mu_1 \cdots \mu_p}$:

$$g_{\mu_1, \dots \mu_p} = Sp\,(A_{\mu_1} \dots A_{\mu_p}) \qquad (2.13)$$

С помощью этого тензора из генераторов X^μ произвольного представления алгебры L образуем оператор степени p

$$\hat{C}_p(D; D_0) = g_{\mu_1 \cdots \mu_p} X^{\mu_1} \dots X^{\mu_p} \qquad (2.14)$$

Нетрудно проверить, что оператор $\hat{C}_p$ коммутирует со всеми операторами X^λ и, следовательно, является инвариантным оператором порядка p .

Введем обозначение

$$(\hat{A})^a_b = (A_\mu)^a_b X^\mu \qquad (2.15)$$

Формулу (2.14) теперь можно переписать в виде:

$$\hat{C}_p(D_1 D_0) = \sum_{a_1, \dots a_{p-1}}^{d_0} (\hat{A})^{a_1}_{a_2} \dots (\hat{A})^{a_p}_{a_1} = Sp\,(\hat{A})^p. \qquad (2.16)$$

(Шпур берется лишь в пространстве действия операторов A_μ)*). Перейдем к вычислению собственных значений операторов $\hat{C}_p$.

---

*) Взяв шпур в пространстве действия операторов X^μ из (2.14) получаем "теорему двойственности":
$d\, C_p(D; D_0) = d_0\, C_p(D_0; D)$. Здесь d и d_0 размерности представлений D и D_0 соответственно.

3. Собственные значения операторов Казимира для унитарной группы.

Основная идея вычисления собственных значений $C_p(\vec{m})$ яснее всего видна на примере группы $U(n)$ – группы унитарных матриц порядка n.

Выберем в качестве D_0 простейшее фундаментальное представление $D(\vec{m})$, $\vec{m} = (1, 0, \ldots, 0)$ – представление по которому преобразуется вектор X^i ($i = 1, \ldots, n$). В этом случае имеют место следующие соотношения:

$$\alpha = \binom{i}{j}, -\alpha = \binom{j}{i}, g^{\alpha, -\alpha} = -1, A^{\alpha} = -A_{-\alpha} = -A^i_j \tag{3.1}$$

$$(A_\alpha)^a_b = (A^j_i)^a_b = -\delta^a_i \delta^j_b, \quad (\hat{A})^a_b = X^a_b \tag{3.2}$$

Здесь X^j_i – генераторы групп $U(n)$ и $SU(n)$, удовлетворяющие стандартным перестановочным соотношениям (см.напр. [5]).

$$[X^i_j, X^k_l] = \delta^k_j X^i_l - \delta^i_l X^k_j, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{3.3}$$

причем в случае группы $SU(n)$ выполняется дополнительное условие

$$\sum_{i=1}^{n} X^i_i = 0 \tag{3.4}$$

Соотношение (2.16) принимает теперь вид:

$$\hat{C}_p = Sp(\hat{A})^p = X^{i_1}_{i_2} X^{i_2}_{i_3} \; . \; . \; . \, X^{i_p}_{i_1} \qquad (3.5)$$

Операторы $\hat{C}_p$ при $p = 1,2, \ldots, n$ являются независимыми в случае группы $U(n)$; при переходе к $SU(n)$ $\hat{C}_1$ обращается в нуль и остается ($n - 1$) независимый оператор.

Для вычисления собственного значения $C_p(\vec{m})$ применим оператор $\hat{C}_p$ к старшему вектору $|\Psi_0\rangle$ неприводимого представления, задаваемого схемой Юнга $[f_1, \ldots, f_n]$, где f_i – число клеток в i-ой строке; $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \; . \; . \; . \geqslant f_n \geqslant 0$.

Из (3,3) видно, что генераторы $X^i_i \; (i = 1, \ldots n)$ соответствуют H_i в картановском базисе, а X^i_j с $i \neq j$ отвечают корневым операторам X_α. При этом если X^i_j отвечает корню α, то X^j_i отвечает корню $(-\alpha)$. Удобно считать, что X^i_j с $i < j$ соответствуют положительным корням алгебры Ли. Тогда:

$$X^i_j \, |\Psi_0\rangle = 0 \quad \text{при} \quad i < j \quad ; \qquad (3.6)$$

а старший вектор $|\Psi_0\rangle$ отвечает показанному на рис. 1 размещение индексов $1,2, \ldots, n$ в клетках схемы Юнга.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2			
n-1	n-1	n-1	n-1	n-1							
n	n										

Рис. 1.

Отсюда находим старший вес $\vec{m}$ рассматриваемого представления

$$X^i_i|\Psi_0\rangle = m_i|\Psi_0\rangle$$

$$m_i = \begin{cases} f_i & \text{для группы } U(n) \\ f_i - \dfrac{f}{n} & \text{для группы } SU(n),\ f = \sum\limits_j f_j \end{cases} \qquad (3,7)$$

Перепишем (3.5) в виде $\hat{C}_p = (T_{p-1})^i_j X^j_i$, где по определению

$$(T_q)^i_j = X^i_{i_1} X^{i_1}_{i_2} \ldots X^{i_{q-1}}_j, \quad (T_1)^i_j = X^i_j \qquad (3,8)$$

Замечаем, что оператор $(T_q)^i_j$ имеет те же трансформационные свойства относительно группы $U(n)$, что и генератор X^i_j . Поэтому

$$\left[X^i_j, (T_q)^k_\ell\right] = \delta^k_j (T_q)^i_\ell - \delta^i_\ell (T_q)^k_j \quad (3.9)$$

$$(T_q)^i_j\,|\psi_0\rangle = 0 \quad \text{при} \quad i<j \tag{3.10}$$

Отсюда получаем:

$$\hat{C}_p|\psi_0\rangle = \sum_{i=1}^{n}(T_{p-1})^i_i X^i_i|\psi_0\rangle + \sum_{i>j}\left[(T_{p-1})^j_i, X^i_j\right]|\psi_0\rangle = \sum_{i=1}^{n}(m_i+n+1-2i)(T_{p-1})^i_i\,|\psi_0\rangle \tag{3.11}$$

Величину $(T_{p-1})^i_i|\psi_0\rangle$ можно вычислять рукуррентным образом:

$$(T_{q+1})^i_i|\psi_0\rangle = \sum_{j=1}^{n}(T_q)^2_j\,X^j_i\,|\psi_0\rangle = \left\{m_i(T_q)^i_i + \sum_{j=i+1}^{n}\left[(T_q)^i_j, X^j_i\right]\right\}|\psi_0\rangle = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(T_q)^j_j\,|\psi_0\rangle, \tag{3.12}$$

где матрица a_{ij} равна:

$$a_{ij} = (m_i+n-i)\delta_{ij} - \theta_{ij}, \quad \theta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i<j \\ 0 \text{ при } i\geqslant j \end{cases} \tag{3.13}$$

Постепенно понижая с помощью (3.12) степень T_q и принимая во внимание тождества:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij} = m_j+n+1-2j, \quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij} = m_i \tag{3.14}$$

приходим к окончательному результату:

Собственное значение оператора $\hat{C}_p$, определенного согласно (3.5) для произвольного неприводимого представления $D(\vec{m})$ группы $U(n)$ или $SU(n)$ дается формулой

$$C_p(\vec{m})=\sum_{i,j=1}^{n}(a^p)_{ij} = S_p\,(a^p E) \qquad (3.15)$$

(матрица a_{ij} определена в (3.13), старший вес представления $D(\vec{m})$ в (3.7). Здесь введена матрица E, целиком состоящая из единиц: $E_{ij} = 1$ при любых i и j.

Формула (3.15) в принципе решает вопрос о вычислении собственных значений операторов $\hat{C}_p$ для унитарной группы, сводя его к элементарной задаче о возведении матрицы a в p-ую степень. Она также полезна для установления общих свойств операторов Казимира.

Например, из (3.15) вытекает связь между собственными значениями операторов Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$. Согласно (3.7) и (3.13) имеем:

$$a^{(su)}=a^{(u)}-\frac{f}{n}I\,, \qquad f=\sum_{i=1}^{n} f_i\,, \qquad (3.16)$$

где 1 означает единичную матрицу. Отсюда с помощью (3.15) получаем:

$$C_p^{(u)}=\sum_{q=0}^{p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\left(\frac{f}{n}\right)^{p-q}C_q^{(su)}$$

$$C_p^{(su)}=\sum_{q=0}^{p}\frac{p!}{q!(p-q)!}\left(-\frac{f}{n}\right)^{p-q}C_q^{(u)}, \qquad (3.17)$$

где

$$C_0^{(u)}=C_0^{(su)}=n\,,\quad C_1^{(u)}=f\,,\quad C_1^{(su)}=0$$

Простейшими представлениями групп $U(n)$ и $SU(n)$ являются фундаментальные представления (1,0, ... 0), (0,1,0, ... 0), (0,0, ... 0,1), которым соответствуют схемы Юнга $[1^k]$, состоящие из одного столбца, а также полностью симметричные представления, которым отвечает схема Юнга $[f]$, состоящая из одной строки. С помощью (3.15) для группы $U(n)$ получаем:

$$C_p([f]) = f(f+n-1)^{p-1} \tag{3.18}$$

$$C_p([1^k]) = k(n-k+1)^{p-1} \tag{3.19}$$

Формула (3.15) дает возможность вычислить собственные значения любого оператора C_p. Приведем явные выражения для первых шести операторов Казимира для группы $SU(n)$:

$$C_1 = 0,\; C_2 = S_2,\; C_3 = S_3 - \left(n - \frac{3}{2}\right) S_2 \tag{3.20}$$

$$C_4 = S_4 - (n-2) S_3 - \frac{1}{2}(3n-4) S_2$$

$$C_5 = S_5 - \left(n - \frac{5}{2}\right) S_4 - \frac{1}{2} S_2^2 - \frac{2}{3}(3n-5) S_3 - \frac{1}{2}(4n-5) S_2$$

$$C_6 = S_6 - (n-3) S_5 - S_3 S_2 - \frac{5}{2}(n-2) S_4 + \frac{1}{2}(n-3) S_2^2 - \frac{5}{3}(2n-3) S_3 - \frac{1}{2}(5n-6) S_2$$

Степени суммы S_k в (3.20) определены формулой:

$$S_K=\sum_{i=1}^{n}(m_i+n-i)^K-\sum_{i=1}^{n}(n-i)^K \qquad (3.21)$$

Соответствующие формулы для группы $U(n)$ могут быть получены отсюда с помощью (3.17). Заметим, что в случае группы $SU(6)$ приведенные в (3.20) операторы дают полный набор независимых инвариантных операторов.

В качестве частного случая из (3.20) получаем собственное значение квадратичного оператора $\hat{C}_2$, найденное ранее Рака [5].

$$\hat{C}_2=X_j^i X_i^j=2n\left\{\sum_{K=1}^{n-1}H_K^2+\sum_{\alpha>0}\left(X_\alpha X_{-\alpha}+X_{-\alpha}X_\alpha\right)\right\} \qquad (3.22)$$

$$C_2(\vec{m})=\sum_{i=1}^{n-1}\left[f_i^2+(n+1-2i)f_i\right]-\frac{f^2}{n} \qquad (3.23)$$

Приведем еще выражения для собственных значений операторов Казимира для группы $SU(3)$:

$$C_2(\vec{m})=\frac{2}{3}\left(p^2+q^2+pq+3p+3q\right) \qquad (3.24)$$

$$C_3(\vec{m})=\frac{1}{9}(p-q)\left[(p+2q)(2p+q)+9(p+q+1)\right]+\frac{3}{2}C_2(\vec{m}) \qquad (3.25)$$

Эти формулы уже применялись в расчетах (см.напр. работу [36]).

Мы ограничились здесь рассмотрением простейших свойств операторов Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$. Более детальное рассмотрение свойств собственных значений содержится в работах 31–34 .

4. Производящая функция для собственных значений операторов Казимира.

Полученная в предыдущем разделе формула (3.15) в принципе решает вопрос о собственных значениях $C_p(\vec{m})$ операторов Казимира. Однако вычисление $C_p(\vec{m})$ при больших p является довольно сложной задачей. Решение этой задачи значительно упрощается с помощью производящей функции для собственных значений $C_p(\vec{m})$, для которой удается получить явное выражение. Производящую функцию $G(z)$ определим формулой:

$$G(z) = \sum C_p(\vec{m}) z^p \tag{4.1}$$

Если теперь привести матрицу a в (3.13) к диагональному виду, то $C_p(\vec{m})$ выразится через собственные значения λ_i этой матрицы:

$$C_p(\vec{m}) = \sum \xi_i \lambda_i^p \tag{4.2}$$

где

$$\xi_i = \prod_{j \neq i} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\right), \quad \lambda_i = m_i + n - i \tag{4.3}$$

Выражение для производящей функции $G(z)$ принимает теперь вид

$$G(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{1 - \lambda_i z} \tag{4.4}$$

Эту формулу можно преобразовать к значительно более простому виду

$$G(z)=\frac{1-\Pi(z)}{z}\ , \qquad (4.5)$$

где

$$\Pi(z)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{1-\lambda_i z}\right). \qquad (4.6)$$

Простая проверка заключается в разложении $G(z)$ в (4.5) на простейшие дроби. При этом получаем формулу (4.4).

Логарифмируя $\Pi(z)$ приходим к формуле:

$$\Pi(z)=(1-nz)\,e^{-\varphi(z)} \qquad (4.7)$$

Соответственно

$$G(z)=n e^{-\varphi(z)}+\frac{1-e^{-\varphi(z)}}{z} \qquad (4.8)$$

Здесь

$$\varphi(z)=\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k,\quad a_k=\sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{\ell!\,(k-\ell)!}S_\ell \qquad (4.9)$$

и введены стандартные степенные суммы

$$S_\ell=\sum_{i=1}^{n}\left[(m_i+n-i)^\ell-(n-i)^\ell\right] \qquad (4.10)$$

(для единичного представления все S_ℓ обращаются в нуль).

Введем теперь величины B_p , определяемые из разложения:

$$\frac{1-e^{-\varphi(z)}}{z}=\sum B_n z^n, \qquad B_0=0 \tag{4.11}$$

Тогда из (4.8) находим окончательную формулу для собственных значений:

$$C_p = B_p - nB_{p-1} \tag{4.12}$$

Для получения явных выражений $C_p(\vec{m})$ через суммы S_k остается выразить с помощью (4.11) коэффициенты B_p через S_K

$$B_n = -\sum \frac{(-1)^{\nu_2+\ldots+\nu_{n+1}}}{\nu_2!\,\nu_3!\ldots\nu_{n+1}!}\, a_2^{\nu_2}\ldots a_{n+1}^{\nu_{n+1}}, \tag{4.13}$$

где a_K даются формулой (4.9), а сумма берется по всем значениям ν_i, удовлетворяющим условию $2\nu_2+3\nu_3+\ldots+(n+1)\nu_{n+1}=n+1$. Подставляя в (4.13) выражения для a_K из (4.9) получаем окончательную формулу:

$$C_p(\vec{m}) = S_p - \sum \alpha^{(p)}_{q_1\ldots q_2} S_{q_1}\ldots S_{q_2}, \tag{4.14}$$

где

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_2 \geqslant 1, \quad q_1+q_2+\ldots+q_2 \leqslant p+1.$$

Таблица коэффициентов $\alpha^{(p)}_{q_1\ldots q_2}$ при $p\leqslant 6$ приведена в работе [33].

5. Операторы Казимира для ортогональной и симплектической групп.

Группа $SU(n)$ является компактной простой группой Ли ранга $(n-1)$. Из теории непрерывных групп известно, что помимо групп такого типа имеется еще три типа простых групп Ли, существующих при произвольном значении ранга группы n (т.е. числа диагональных генераторов соответствующей алгебры Ли). Это группы вращений $SO(2n+1)$ и $SO(2n)$ и симплектическая группа $Sp(2n)$ (так называемые "классические группы", см. книгу Г.Вейля [8]).

Для вычисления собственных значений операторов Казимира для остальных классических групп, т.е. для ортогональной и симплектической групп используем метод предыдущего раздела.

Напомним, что ортогональная группа $SO(N)$ состоит из всех вращений N -мерного пространства, а симплектическую группу $Sp(2n)$ образуют преобразования $2n$ -мерного пространства, сохраняющие билинейную форму:

$$[x,y]=\sum_{i,j=-n}^{n} h_{ij}x^i y^j=\sum_{i=1}^{n}(x^i y^{-i}-x^{-i}y^i), \tag{5.1}$$

где h_{ij} – метрический тензор:

$$h_{ij}=\varepsilon_i\delta_{i-j}\,,\quad \varepsilon_i=\begin{cases}1 & \text{при } i>0\\ -1 & \text{при } i<0\end{cases} \tag{5.2}$$

Чтобы рассмотреть эти группы единым образом, перейдем в случае ортогональной группы от декартовых координат к "сферическим" $x^i(i=\pm 1, \pm 2, \dots)$:

$$x^1=\frac{\xi_1+i\xi_2}{\sqrt{2}}\,,\quad x^{-1}=\frac{\xi_1-i\xi_2}{\sqrt{2}},\dots x^0=\xi_0 \tag{5.3}$$

после чего инвариантная форма для ортогональной группы принимает вид, аналогичный (5.1):

$$(x,y)=\sum_{i,j=-n}^{n} g_{ij}x^i y^j,\quad g_{ij}=\delta_{i-j} \tag{5.4}$$

Генераторы X^i_j удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\left[X^i_j, X^k_\ell\right]=\delta^k_j X^i_\ell-\delta^i_\ell X^k_j+\begin{cases}\delta^{-\ell}_j X^k_{-i}-\delta^k_{-i}X^{-j}_\ell & \text{в случае } SO(N)\\ \varepsilon_i\varepsilon_j\delta^{-\ell}_j X^k_{-i}+\varepsilon_j\varepsilon_k\delta^k_{-i}X^{-j}_\ell & \text{в случае } S_p(2N)\end{cases} \tag{5.5}$$

Отсюда вытекают перестановочные соотношения для всякого тензора T^k_ℓ , имеющего те же трансформационные свойства, что и генератор X^k_ℓ

$$\left[X^i_j, T^k_\ell\right] = \delta^k_j T^i_\ell - \delta^i_\ell T^k_j + \begin{cases} \delta^{-\ell}_j T^k_{-i} - \delta^k_{-i} T^{-j}_\ell & \text{для } SO(N) \\ \varepsilon_i \varepsilon_j \delta^{-\ell}_j T^k_{-i} + \varepsilon_j \varepsilon_k \delta^k_{-i} T^{-j}_\ell & \text{для } Sp(2n) \end{cases} \tag{5.6}$$

В частности

$$\left[X^i_j, T^j_i\right] = \left(1 \mp \delta^i_{-j}\right)\left(T^i_i - T^i_j\right), \tag{5.7}$$

где знак $(+)$ относится к ортогональной (симплектической) группе.

Все инвариантные операторы, которые можно построить из генераторов X^i_j имеют вид

$$\hat{C}_p = \sum X^{i_1}_{i_2} X^{i_2}_{i_3} \ldots X^{i_p}_{i_1} \tag{5.8}$$

(единственным исключением является случай группы $SO(2n)$ см. ниже).

Для нахождения собственного значения оператора $\hat{C}_p$ подействуем им на старший вектор неприводимого представления. Для симплектической группы все неприводимые представления описываются схемами Юнга, состоящими не более чем из n строк, с длинами строк $f_n \geqslant f_{n-1} \geqslant \ldots f_1 \geqslant 0$. Из (5.5) следует, что диагональные генераторы X^i_i коммутируют между собой и отвечают операторам H_i картановского базиса, а генераторы X^i_j с $i > j$ отвечают положительным корням алгебры $Sp(2n)$. При этом:

$$X_i^i|\psi_0\rangle = m_1|\psi_0\rangle, \qquad m_1 = \begin{cases} f_i\,, & i>0 \\ -f_{-i}\,, & i<0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Сказанное выше относится к тензорным представлениям групп $SO(2n+1)$ и $SO(2n)$. Однако в случае ортогональной группы помимо тензорных, имеются еще и спинорные представления, которые, вообще говоря, не могут быть описаны на языке схем Юнга.

Для дальнейшего существенно лишь следующее свойство $|\psi_0\rangle$, верное для любых представлений

$$\begin{aligned} &X_j^i|\psi_0\rangle = 0, \quad \text{при} \quad i>j \\ &X_i^i|\psi\rangle = m_i|\psi_0\rangle, \quad m_i = -m_i \end{aligned} \tag{5.10}$$

Числа m_i (компоненты старшего веса $\vec{m}$) однозначно определяют любое неприводимое представление групп $SO(N)$ и $Sp(2n)$ и собственное значение оператора $\hat{C}_p$ будет выражено через них.

Дальнейшие выкладки аналогичны проведенным в разделе 4 для унитарной группы. Для собственного значения $C_p(\vec{m})$ оператора $\hat{C}_p$ попрежнему получаем выражение:

$$C_p = \sum_{i,j=-n}^{n} (a^p)_{ij}\,. \tag{5.11}$$

где матрица $a = [a_{ij}]$ имеет вид:

$$a_{ij}=(\ell_i+\alpha)\delta_{ij}-\theta_{ji}+\beta\frac{1+\varepsilon_i}{2}\delta_{i,-j} \qquad (5.12)$$

Здесь введены обозначения

$$\ell_i=m_i+r_i\,, \qquad (5.13)$$

$$\theta_{ji}=1 \quad \text{при } j<i, \quad \theta_{ji}=0 \quad \text{при } j\geq i$$

(Напомним, что индексы i, j считаются расположенными в убывающем порядке: $n, n-1, \ldots -n$, так что a_{ij} соответствует верхней треугольной матрице). Постоянные α и β и компоненты вектора r_i для различных групп приведены в таблице. Заметим, что n в случае группы $U(n)$ матрица a_{ij} имеет вид (5.12), только индексы i, j пробегают значения $1,2, \ldots n$.

Таблица

Группа обозн. Картана	Др.обозн.	α	β	r_i	Индекс i пробегает значения.
A_{n-1}	$SU(n)$	$\frac{n-1}{2}$	0	$\frac{n+1}{2}-i$	$1,2,\ldots n$
B_n	$SO(2n+1)$	$n-\frac{1}{2}$	1	$\left(n+\frac{1}{2}\right)\varepsilon_i-i$	$1,2,\ldots n,0,-n,\ldots -1$
C_n	$Sp(2n)$	n	-1	$(n+1)\varepsilon_i-i$	$1,2,\ldots n,-n,\ldots,-1$
D_n	$SO(2n)$	$n-1$	1	$n\varepsilon_i-i$	$1,2,\ldots n,-n,\ldots,-1$

<u>Примечание:</u> При выводе формул (5.11) и (5.12) строки схемы Юнга были занумерованы числами $n, n-1, \ldots,$, 1 в убывающем порядке. Окончательные результаты, приведенные в таблице, сформулированы в общепринятых обозначениях, в которых f_i есть число клеток в i -ой строке, $f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n$. При этом компоненты всех векторов (m_i, r_i, ℓ_i) нумеруются числами i в порядке, указанном в последнем столбце настоящей таблицы.

Напомним, что группы $Sp(2n), SO(2n+1)$ и $SO(2n)$ – группа ранга n . Следовательно в каждой из них имеется n независимых операторов Казимира. Для $Sp(2n)$ и $SO(2n+1)$ таковыми являются $C_2, C_4, \ldots, C_{2n}$, что нетрудно показать явным вычислением якобиана

$$\frac{\partial(C_2, C_4, \ldots, C_{2n})}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f)} .$$

Несколько иная ситуация возникает в случае группы $SO(2n)$. Здесь для получения полного набора инвариантных операторов следует заменить C_{2n} на новый оператор C_n :

$$\hat{C}'_n = \sum \varepsilon^{j_1 \ldots j_n}_{i_1 \ldots i_n} X^{i_1}_{j} \ldots X^{i_n}_{j_n} \qquad (5.14)$$

Оператор $\hat{C}'_n$ является обобщением псевдоскалярного оператора $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\mu\nu} M^{\rho\sigma}$ для группы Лоренца. Заметим, что в группе $SO(2n+1)$ оператор аналогичный $\hat{C}'_n$ построить нельзя.

Вычисление собственного значения $C'_n(\vec{m})$ дает

$$C'_n(\vec{m}) = (-i)^{n^2} 2^n n! \quad \ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n, \ell_i = m_i + \tau_i \qquad (5.15)$$

Заметим, что множитель $(-i)^{n^2}$ равен 1 при четном n и $-i$ при нечетном n ; таким образом, собственные значения C'_n при нечетном n – чисто мнимые, т.е. $\hat{C}'_n$ – антиэрмитов оператор.

Приведем явные формулы для простейших операторов $\hat{C}_p$ (их вывод см. в работе [32]).

$$\begin{aligned} C_2 &= 2S_2 \\ C_3 &= \left(\alpha - \frac{\beta-1}{2}\right) C_2 \\ C_4 &= 2S_4 - (2\alpha\beta + \beta - 1) S_2 \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Они справедливы для любой из групп $SO(N)$ и $Sp(2n)$. Степенные суммы S_{2k} в (5.16) определяются формулами

$$S_{2k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\ell_i^{2k} - \tau_i^{2k}\right), \quad \ell_i = m_i + \tau_i ; \qquad (5.17)$$

при k нечетном $S_k \equiv 0$. Соответствующие значения параметров α, β и τ_i приведены в таблице.

Приведем еще выражения для собственных значений операторов Казимира для простейших представлений. Например, полностью симметричное представление групп $S_p(2n)$, $SO(2n)$ и $SO(2n+1)$ характеризуется весовым вектором $\vec{m}=(f,0,\ldots,0)$, а соответствующее собственное значение дается формулой

$$C_p(f,0,\ldots 0)=(f+2\alpha)^p+(-f)^p+(2\alpha+\beta-1)+ \tag{5.18}$$
$$+(2\alpha-1)\left(1+\frac{\beta+1}{2(\alpha-1)}\right)\left[\frac{(-f)^p-1}{f+1}-\frac{(f+2\alpha)^p-1}{f+2\alpha-1}\right]+\frac{\alpha(\beta+1)}{2(\alpha-1)}\frac{(f+2\alpha)^p-(-f)^p}{f+\alpha}.$$

Другим простым случаем являются фундаментальные представления $\{1^K\}$, для которых $\vec{m}=\{1,1,\ldots,1,0\ldots 0\}$ здесь единица повторяется K раз. Эти представления полностью антисимметричны. Собственные значения для них имеют вид:

$$C_p(\{1^K\})=-(2\alpha+2-K)^p-K^p+(-1)^p(2\alpha+\beta+3)+ \tag{5.19}$$
$$+(2\alpha+3)\left(1+\frac{\beta-1}{2(\alpha+2)}\right)\left[\frac{K^p-(-1)^p}{K+1}+\frac{(2\alpha+2-K)^p-(-1)^p}{2\alpha+3-K}\right]+$$
$$+\frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{2(\alpha+2)}\,\frac{K^p-(2\alpha+2-K)^p}{\alpha+1-K}$$

Для ортогональных групп в числе фундаментальных представлений входят такие спинорные представления старшие веса которых равны:

$$\vec{m} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) & \text{для } SO(2n+1) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2}\right) & \text{для } SO(2n) \end{cases} \quad (5.20)$$

Приведем значения $C_p(\vec{m})$ для этих представлений:

$$C_p(\vec{m}) = \begin{cases} n\left[n^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для } SO(2n+1) \\ \left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^{p-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right] & \text{для } SO(2n) \end{cases} \quad (5.21)$$

В заключение сделаем несколько замечаний относительно общего случая.

1. Как показано в работе [34] формула типа (5.11) для собственных значений, за исключением нескольких случаев, справедлива для всех компактных простых групп Ли. (детали см. в работе [34]).

2. Для классических групп можно получить явное выражение для производящей функции $G(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} C_p(\vec{m}) z^p$ для собственных значений. Именно:

$$G(z) = \left[1 + \frac{\beta z}{2-(2\alpha+1)z}\right] \frac{1-\Pi(z)}{z} \quad (5.22)$$

где $$\Pi(z) = \prod_i \left(1 - \frac{z}{1-\lambda_i z}\right), \quad \lambda_i = \ell_i + \alpha. \quad (5.23)$$

При этом следует иметь в виду, что

$$\Pi\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}\right) = \begin{cases} -1 & \text{для группы } B_n \\ +1 & \text{для группы } C_n \text{ и } D_n \end{cases} \quad (5.24)$$

Отметим еще, что собственные значения $C_p(\vec{m})$ обладают определенной симметрией (см. [34]).

II. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ.

6. Обычная система когерентных состояний.

В ряде разделов физики оказалось удобной и в последнее время широко используется система так называемых когерентных состояний (см. [37] , [38] , [39] , [40]). Обычно когерентные состояния определяют как собственные состояния бозонного оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle, \quad [a,a^+]=I, \tag{6.1}$$

I – единичный оператор.

Отсылая за деталями к книге Клаудера и Сударшана [38] , напомним некоторые свойства таких состояний.

Заметим, прежде всего, что спектр оператора a заполняет всю комплексную плоскость α . Иными словами состояние $|\alpha\rangle$ при любом комплексном α можно нормировать: $\langle\alpha|\alpha\rangle=1$. Разлагая это состояние по собственным состояниям $|n\rangle$ оператора числа частиц a^+a получаем

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (6.2)$$

Когерентные состояния не ортогональны друг к другу

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\bar{\alpha}\beta\right)\right], \qquad (6.3)$$
$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha-\beta|^2\right)$$

и образуют сверхполную систему состояний.

Имеет место важное тождество – так называемое разложение единицы (Клаудер, [41]).

$$\int d\mu(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi}d^2\alpha \qquad (6.4)$$

С его помощью можно разложить произвольное состояние $|\psi\rangle$ по состояниям $|\alpha\rangle$:

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha)\,C(\alpha)|\alpha\rangle, \quad C(\alpha) = \langle\alpha|\psi\rangle \qquad (6.5)$$

Заметим, что если в качестве $|\psi\rangle$ выбрать когерентное состояние $|\beta\rangle$, то равенство (6.5) определит линейную зависимость между различными когерентными состояниями. Отсюда следует в частности, что система когерентных состояний является сверхполной, т.е. из нее можно выделять подсистемы, являющиеся полными.

Пусть $|\psi\rangle$ – произвольное состояние, а

$$\psi(\alpha) = \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\langle\psi|\alpha\rangle \qquad (6.6)$$

Тогда из (6.2) следует, что функция $\psi(\alpha)$ является целой (т.е. не имеет особенностей в конечной части α - плоскости) и удовлетворяет неравенству:

$$|\psi(\alpha)| \leq \exp\left(\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\|\psi\|, \quad \|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle \tag{6.7}$$

Условие нормировки теперь можно записать так

$$\|\psi\|^2 = I = \int d\mu(\alpha) e^{-|\alpha|^2} |\psi(\alpha)|^2 = 1, \tag{6.8}$$

а разложение (6.5) принимает вид

$$|\psi\rangle = \int d\mu(\alpha) \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \psi(\bar{\alpha}) |\alpha\rangle \tag{6.9}$$

Таким образом установлено взаимнооднозначное соответствие между векторами гильбертова пространства $|\psi\rangle$ и целыми аналитическими функциями $\psi(\alpha)$ для которых интеграл I в (6.8) конечен. Это соответствие определяется формулами (6.6) и (6.9).

Когерентные состояния тесно связаны с определенной нильпотентной группой - так называемой группой Гейзенберга-Вейля [42]. Алгебра Ли этой группы изоморфна алгебре Ли, образованной операторами a, a^+ и единичным оператором I

$$[a, a^+] = I, \quad [a, I] = [a^+, I] = 0 \tag{6.10}$$

Общий элемент этой алгебры имеет вид:

$$tI + i(\bar{\alpha}a - \alpha a^{+}) \tag{6.11}$$

Отсюда следует, что операторы:

$$T(g)=\exp(it)D(\alpha),\ D(\alpha)=\exp(\alpha a^{+}-\bar{\alpha}a),\ g=(t,\alpha) \tag{6.12}$$

образуют группу W_1. Это и есть группа Гейзенберга-Вейля.

Можно показать, что закон перемножения операторов $D(\alpha)$ имеет вид:

$$D(\alpha)\,D(\beta)=e^{i\,Im(\alpha\bar{\beta})}\,D(\alpha+\beta) \tag{6.13}$$

Обозначая через (t,α) элемент g группы W_1, соответствующий (6.12) получаем закон умножения в группе Гейзенберга-Вейля:

$$(s,\alpha)(t,\beta)=(s+t+Im(\alpha\bar{\beta}),\alpha+\beta) \tag{6.14}$$

Приведем еще выражение для оператора $D(\alpha)$ в так называемой нормальной форме записи:

$$D(\alpha)=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\exp(\alpha a^{+})\exp(-\bar{\alpha}a) \tag{6.15}$$

Из этого выражения сразу же следует, что когерентное состояние $|\alpha\rangle$ получается из вакуумного состояния $|0\rangle$ под действием оператора $D(\alpha)$:

$$|\alpha\rangle D(\alpha)|0\rangle, \tag{6.16}$$

или

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)\exp(\alpha a^+)|0\rangle \tag{6.17}$$

7. Когерентные состояния для произвольной группы Ли[x)].

Как было показано в предыдущем разделе когерентные состояния, связанные с группой Гейзенберга-Вейля, можно определить или (как это обычно делается) с помощью формулы (6.1) или с помощью формулы (6.16). Эти два подхода можно распространить и на случай более общих групп Ли, но здесь они уже оказываются не эквивалентными друг другу.

Система состояний, определенныя формулами типа (6.1) (6.1), была рассмотрена в работе Барута и Жирардело [43]. Однако, их подход применим не ко всем группам Ли и в частности не годится для компактных групп. Кроме

[x)] В этом разделе при рассмотрении общей конструкции системы когерентных состояний используются некоторые новые математические термины. Читатель, которому этот раздел покажется слишком сложным, может его опустить и перейти к рассмотрению следующего раздела.

того получающееся при таком подходе множество состояний не инвариантно относительно действия операторов представления группы.

Способ обобщения, использующий формулу типа (6.16), был предложен в работе [20]. Этот способ применим к любой группе Ли и согласован с действием группы на множестве обобщенных когерентных состояний. Такие обобщенные системы когерентных состояний естественным образом возникают в ряде физических задач (см. [44]).

Дадим краткое описание этого способа.

Пусть G – произвольная группа Ли, а $T(g)$ – ее неприводимое унитарное представление, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Возьмем некоторый фиксированный вектор $|\psi_0\rangle$ пространства $\mathcal{H}$ и образуем множество векторов $\{|\psi_g\rangle\}$, где $|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle$, а g пробегает всю группу G. Обозначим через $H = \{h\}$ множество всех элементов группы G, оставляющих состояние $|\psi_0\rangle$ неизменным, т.е. множество h таких что

$$T(h)|\psi_0\rangle = e^{i\alpha(h)}|\psi_0\rangle. \tag{7.1}$$

Очевидно, что H – подгруппа группы G и мы назовем ее стационарной подгруппой состояния $|\psi_0\rangle$.

Нетрудно видеть, что для всех g, входящих в один левый класс смежности G по H, (т.е. для элементов группы G вида gh, где h пробегает всю группу H], векторы $|\Psi_g\rangle$ отличаются друг от друга лишь фазовым множителем и, следовательно, определяют одно состояние.

Обозначим через $X=\{x\}=G/H$ множество левых классов смежности группы G по подгруппе H. Выбирая в каждом классе x по одному представителю $g(x)$ группы G, получаем множество состояний $\{|x\rangle\}$, где $|x\rangle=T(g(x))|0\rangle, |0\rangle=|\Psi_0\rangle$. Это и есть множество обобщенных когерентных состояний типа $(T(g),|\Psi_0\rangle)$. В дальнейшем, для краткости такие состояния мы будем называть просто когерентными.

Таким образом, когерентное состояние $|x\rangle$ определяется точкой факторпространства $X=G/H$, где H – стационарная подгруппа состояния $|0\rangle=|\Psi_0\rangle$.

Заметим, что если подгруппа H связана, то вектор $|\Psi_0\rangle$ является собственным вектором инфинитевимальных операторов представления группы H.

Оператор представления группы $T(g)$ переводит одно когерентное состояние в другое

$$T(g)|x\rangle=e^{i\phi(x,g)}|x'\rangle,\ x'=x_{g^{-1}}, \qquad (7.2)$$

где x_g определяется действием группы G на однородном пространстве $X=G/H$.

Система когерентных состояний полна. Это сразу же следует из неприводимости представления $T(g)$. Однако, когерентные состояния, вообще говоря, не ортогональны друг другу.

Пусть $d\mu(x)$ – инвариантная мера на однородном пространстве $X=G/H$. Предполагая, что условия сходимости выполнены, рассмотрим оператор

$$B=\int d\mu(x)|x\rangle\langle x|, \tag{7.3}$$

где $|x\rangle\langle x|$ – проекционный оператор на состояние $|x\rangle$.

Из определения B, инвариантности меры $d\mu(x)$ и формулы (7.2) следует, что

$$T(g)B(T(g))^{-1}=B. \tag{7.4}$$

Таким образом оператор B коммутирует со всеми операторами $T(g)$ и потому, в силу неприводимости представления $T(g)$, операторов B кратен единичному

$$B=cI. \tag{7.5}$$

Для нахождения постоянной c вычислим среднее значение оператора B в состоянии $|y\rangle$ $(\langle y|y\rangle=1)$

$$c=\langle y|B|y\rangle=\int|\langle y|x\rangle|^2 d\mu(x)=\int|\langle 0|x\rangle|^2 d\mu(x). \tag{7.6}$$

Отсюда видно в частности, что необходимым условием существованием оператора B является сходимость интеграла (7.6). Этот случай мы будем называть случаем квадратично-интегрируемой системы когерентных состояний$^{x)}$. В дальнейшем мы нормируем меру $d\mu(x)$ так, что постоянная c в (7.6) стала равной единице. При этом равенство (7.5) (разложение единицы) принимает вид:

$$\int d\mu(x)|x\rangle\langle x| = \hat{I}. \qquad (7.7)$$

С его помощью можно разложить произвольное состояние $|\psi\rangle$ по когерентным состояниям

$$|\psi\rangle = \int d\mu(x) c(x)|x\rangle, \quad \text{где} \quad c(x) = \langle x|\psi\rangle \qquad (7.8)$$

При этом

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d\mu(x)|c(x)|^2, \qquad (7.9)$$

а функция $c(x)$ не является произвольной, но должна удовлетворять уравнению

$$c(x) = \int\langle x|y\rangle\, c(y)\, d\mu(y). \qquad (7.10)$$

---

x) К этому случаю относятся в частности все представления компактных полупростых групп Ли и представления дискретных серий вещественных полупростых групп.

Таким образом ядро $K(x,y) = \langle x | y \rangle$ является воспроизводящимся ядром

$$K(x,z) = \int d\mu(y)\, K(x,y)\, K(y,z), \qquad (7.11)$$

а функция $\hat{f}(x) = \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$ удовлетворяет уравнению (7.10) при непроизвольно выбранной функции $f(x)$.

Нетрудно видеть также, что между когерентными состояниями существуют "линейные зависимости". В самом деле из (7.7) следует, что

$$|x\rangle = \int \langle y | x \rangle |y\rangle\, d\mu(y) \qquad (7.12)$$

Это значит, что система когерентных состояний является сверхполной, т.е. в ней существуют подмножества когерентных состояний, являющиеся полными системами.

На этом мы закончим рассмотрение общих систем когерентных состояний и перейдем к изучению систем когерентных состояний для простейших групп Ли.

8. Когерентные состояния для группы вращений.

Группа вращений трехмерного пространства является наиболее изученной из всех неабелевых групп Ли[x]. Она

---

[x] Свойства этой группы подробно рассмотрены например в книгах Гельфанда, Минлоса и Шапиро [45] и Виленкина [46].

локально изоморфна группе $SU(2)$ – группе унитарных матриц второго порядка с определителем равным единице. Когерентные состояния для этой группы были введены в работе [47]. Свойства системы таких состояний изучались в работах [47], [20] и [48]. Эти состояния были использованы в [49] для получения оценок для статистической суммы квантовой системы спинов. В работах [48], [50] такие состояния были применены в так называемой модели Дике, описывающей взаимодействие излучения с веществом.

Перейдем к определению системы когерентных состояний для группы вращений. Напомним, что неприводимое представление этой группы задается неотрицательным числом j –целым или полуцелым. По такому представлению преобразуются состояния частицы со спином j. Инфинитезимальные операторы представления $J_\pm = J_1 \pm i J_2$ и $J_0 = J_3$ удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_-, J_+] = -2 J_0 \qquad (8.1)$$

Базисные векторы $|j,\mu\rangle$ пространства, в котором действует представление, задаются числом μ –проекцией спина на ось x_3

$$J_0 |j,\mu\rangle = \mu |j,\mu\rangle, \quad -j \le \mu \le j \qquad (8.2)$$

Стационарной подгруппой H любого из этих состояний, как нетрудно видеть, является подгруппа вращений вокруг оси z. В качестве фиксированного вектора $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ мы выберем вектор $|j,-j\rangle$. Действуя на него операторами $T(g)$ в соответствии с [20] получаем искомую систему когерентных состояний.

Заметим, что такое состояние является собственным состоянием оператора $(\vec{J}\vec{n})$ с собственным значением равным $-j$.

$$(\vec{n}\vec{J})|\vec{n}\rangle = -j|\vec{n}\rangle \qquad (8.3)$$

Здесь $\vec{n}$ тот вектор, в который переходит вектор $\vec{n}_0 = (0,0,-1)$, под действием преобразования g.

В соответствии с общей теорией [20] когерентное состояние определяется точкой фактор-пространства G/H, которое в данном случае является двумерной сферой $S^2 = \{\vec{n} : \vec{n}^2 = 1\}$. При этом уравнение (8.3) определяет когерентное состояние с точностью до фазового множителя $e^{i\phi(\vec{n})}$.

Полученная система когерентных состояний обладает свойствами во многом аналогичными свойствам обычной системы когерентных состояний.

Это неортогональная система. Скалярное произведение двух таких состояний $|\vec{n}\rangle$ и $|\vec{n}'\rangle$ отлично от нуля за исключением случая $\vec{n}' = -\vec{n}$. Это видно из формулы

$$|\langle\vec{n}|\vec{n}'\rangle|^2 = \left(\frac{1+\vec{n}\vec{n}'}{2}\right)^{2j} \qquad (8.4)$$

Можно показать также, что имеет место разложение единицы

$$\frac{2j+1}{4\pi}\int d\vec{n}\,|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| = I, \qquad (8.5)$$

с помощью которого можно разложить произвольное состояние по когерентным состояниям.

Рассмотрим еще одну параметризацию системы когерентных состояний. Воспользуемся для этого следующим представлением для оператора

$$T(g) = N(\xi)\, e^{\xi J_+}\cdot e^{i\gamma J_0}\, e^{\eta J_-}, \qquad \xi = \beta/\bar{\alpha} \qquad (8.6)$$

где $N(\xi)$ – нормировочный множитель.

Действуя оператором $T(g)$ на состояние $|0\rangle = |j,-j\rangle$ получаем систему состояний:

$$|\xi\rangle = N e^{\xi J_+}|0\rangle = N\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\xi^m (J_+)^m}{m!}|0\rangle \qquad (8.7)$$

С другой стороны $(J_+)^m$ действуя на состояние $|0\rangle$ дает состояние, с определенной проекцией на ось Z :

$$(J_+)^m|0\rangle = \sqrt{\frac{m!(2j)!}{(2j-m)!}}\,|m\rangle, \quad 0\le m\le 2j \qquad (8.8)$$

где $|m\rangle$ – нормированное состояние, отвечающее проекции $\mu = (m-j)$. Таким образом

$$|\xi\rangle = N\sum_{m=0}^{2j}\left[\frac{(2j)!}{m!(2j-m)!}\right]^{1/2}\xi^m\,|m\rangle \qquad (8.9)$$

Теперь нетрудно вычислить нормировочный множитель в (8.7). Именно:

$$N=\left(1+|\xi|^{2}\right)^{-j} \qquad (8.10)$$

Заметим, что рассматриваемая сейчас параметризация получается из предыдущей при помощи стереографической проекции:

$$\xi=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi},\quad 0\leq\theta<\pi,\ 0\leq\varphi<2\pi \qquad (8.11)$$

$$\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta,\ \sin\varphi,\ \cos\theta)$$

Теперь нетрудно вычислить интеграл перекрытия между двумя состояниями:

$$\langle\xi|\eta\rangle=(1+\bar{\xi}\eta)^{2j}(1+|\xi|^{2})^{-j}\,(1+|\eta|^{2})^{-j} \qquad (8.12)$$

и соответственно:

$$|\langle\xi|\eta\rangle|^{2}=\left(1-\frac{|\xi-\eta|^{2}}{(1+|\xi|^{2})(1+|\eta|^{2})}\right)^{2j} \qquad (8.13)$$

Действуя оператором $T(g)$ $\left(g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}, (|\alpha|^{2}+|\beta|^{2}=1)\right.$ - матрица из группы $\left.SU(2)\right)$ на когерентное состояние $|\xi\rangle$ получаем снова когерентное состояние

$$T(g)|\xi\rangle=e^{i\phi}|\xi'\rangle \qquad (8.14)$$

$$\xi'=\xi_{g^{-1}}=(\bar{\alpha}\xi+\bar{\beta})(-\beta\xi+\alpha)^{-1}$$

Т.о. на ξ - плоскости группа G действует как группа дробно-линейных преобразований. При этом на ξ - плоскости существует единственная (с точностью до нормировочного множителя) инвариантная мера $d\mu(\xi)\sim(1+|\xi|^2)^{-2}d^2\xi$ и разложение единицы (8.5) принимает вид:

$$\int d\mu(\xi)|\xi\rangle\langle\xi| = \sum_{m=0}^{2j}|m\rangle\langle m| = I, \tag{8.15}$$

где

$$d\mu(\xi) = \frac{2j+1}{\pi}\,\frac{d^2\xi}{(1+|\xi|^2)^2}. \tag{8.16}$$

Отсюда следует в частности, что для любой функции $f(\xi)$, имеющей вид $P_m(\xi)/(1+|\xi|^2)^j$, где $P_m(\xi)$ - произвольный полином, степени $m\le 2j$, имеет место формула:

$$\int d\mu(\eta)\, f(\eta)\langle\eta|\xi\rangle = f(\xi). \tag{8.17}$$

Заметим, что именно такие функции $f(\xi)$ и образуют гильбертово пространство состояний частицы со спином j.

Представление когерентных состояний удобно использовать для описания матрицы плотности ρ частицы со спином j. Именно матрица плотности полностью определяется или функцией $P(\vec{n})$ или функцией $Q(\vec{n})$ согласно формулам

$$\rho=\int d\mu(\vec{n})P(\vec{n})|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}|, \quad d\mu(\vec{n})=\frac{2j+1}{4\pi}d\vec{n} \qquad (8.18)$$

$$Q(\vec{n})=\langle\vec{n}|\rho|\vec{n}\rangle, \qquad (8.19)$$

причем эти функции при разложении в ряд по сферическим функциям $Y_{\ell m}$ содержат лишь $\ell\leq 2j$. Например

$$P(\vec{n})=\sum_{\ell,m} C_{\ell m}Y_{\ell m}(\vec{n}). \qquad (8.20)$$

Отсюда получаем разложение матрицы плотности

$$\rho=\sum_{\ell,m} c_{\ell m}\hat{P}_{\ell m}, \qquad (8.21)$$

где

$$\hat{P}_{\ell m}=\int d\mu(\vec{n})Y_{\ell m}(\vec{n})|\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| \qquad (8.22)$$

Вычисляя входящий сюда интеграл получаем

$$\langle j\nu'|\hat{P}_{\ell m}|j\nu\rangle=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,(j,\nu';\ell,m/j,\nu)(j\text{-}j;\ell 0|j,\text{-}j), \qquad (8.23)$$

где $(j,\nu;\ell,m|j,\nu')$ – коэффициент Клебша-Гордана.

Приведем еще выражения для инфинитезимальных операторов в представлении когерентных состояний

$$\langle\xi|J_0|\xi\rangle = j\,\frac{1-|\xi|^2}{1+|\xi|^2}, \quad \langle\xi|J_+|\xi\rangle = 2j\,\frac{\xi}{1+|\xi|^2}, \tag{8.24}$$

или

$$\langle\vec{n}|\vec{J}|\vec{n}\rangle = j\vec{n}. \tag{8.25}$$

Заметим, что в пределе больших значений j когерентные состояния для группы вращений переходят в обычные когерентные состояния. Для того, чтобы увидеть это нужно сделать подстановку:

$$J_+ \to \sqrt{2j}\,a^+, \quad \xi = \alpha/\sqrt{2j} \tag{8.26}$$

и устремить j к бесконечности.

В качестве применения метода когерентных состояний решим задачу о движении спина в переменном магнитном поле.

Рассмотрим нейтральную частицу со спином j, обладающую магнитным моментом μ и находящуюся в переменном магнитном поле $\vec{H}(t)$. Тогда изменение состояния с течением времени определяется уравнением Шредингера

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\vec{a}(t)\vec{J}|\psi(t)\rangle = (AJ_+ + \bar{A}J_- + BJ_0)|\psi(t)\rangle, \tag{8.27}$$

где $\vec{a}=-\frac{\mu}{j}\vec{H}$, $A=\frac{1}{2}(a_1-ia_2)$, $B=a_3$

Относительно вектора $\vec{H}(t)$ мы предлагаем лишь, что он достаточно быстро стремится к определенным пределам при $t\to\pm\infty$, так что при $t\to\pm\infty$ существуют асимптотические состояния $|\psi^{\pm}\rangle$.

Заметим, что уже давно известно (см,напр.работы [51], [52]), что задача о частице с произвольным спином j может быть сведена к более простой задаче о движении частицы со спином $\frac{1}{2}$. Использование когерентных состояний для группы вращений позволяет получить решение этой задачи особенно просто. Решение уравнения (8.27) будем искать в виде

$$|\psi(t)\rangle=e^{-i\phi(t)}\,|\xi(t)\rangle. \tag{8.28}$$

Уравнение (8.27) принимает теперь вид

$$i\frac{d}{dt}|\xi(t)\rangle=\left(H(t)-\dot{\phi}\right)|\xi(t)\rangle \tag{8.29}$$

С другой стороны нетрудно показать, что

$$\xi J_+|\xi\rangle=(j+J_0)|\xi\rangle \tag{8.30}$$

$$J_-|\xi\rangle=\xi(j-J_0)|\xi\rangle \text{ и} \tag{8.31}$$

$$\frac{d}{dt}|\xi(t)\rangle=\left[\frac{-j}{1+|\xi|^2}\frac{d}{dt}(1+|\xi|^2)\right]|\xi(t)\rangle+\frac{\dot{\xi}}{\xi}(J_0+j)|\xi(t)\rangle \tag{8.32}$$

Отсюда находим уравнения для величин $\xi(t)$ и $\Phi(t)$:

$$i\overset{\circ}{\xi}=A-\bar{A}\xi^2+B\xi \tag{8.33}$$

$$\frac{1}{j}\overset{\circ}{\Phi}=-i\frac{\overset{\circ}{\xi}}{\xi}+i\left[\frac{1}{1+|\xi|^2}\frac{d}{dt}(1+|\xi|^2)\right]+\frac{A}{\xi}+\bar{A}\xi \tag{8.34}$$

Заметим, что из (8.33) следует равенство

$$i\frac{d}{dt}\left(1+|\xi|^2\right)=\left(A\vec{\xi}-\vec{A}\xi\right)\left(1+|\xi|^2\right) \tag{8.35}$$

с помощью которого получаем:

$$\overset{\circ}{\Phi}=j\ (\vec{\xi}A+\xi\vec{A}-B) \tag{8.36}$$

Таким образом, задача нахождения волновой функции сведена к более простой задаче решению уравнений (8.33) и (8.36).

Заметим, что при параметризации в виде векторов единичной сферы уравнение (8.33) принимает вид:

$$\overset{\circ}{\vec{h}}=-\left[\vec{a}(t),\vec{h}\right] \tag{8.37}$$

Таким образом плоскость ξ (или единичная сф ера S^2) играет роль фазовой плоскости для классической динамической системы[x)].

[x)] Такого рода обобщенные фазовые пространства в последнее время стали играть заметную роль в теории представлений групп (см. напр. книгу [10]).

В простейшем случае при $t \to +\infty$, $A(t) \to 0$, $B(t) \longrightarrow const$ и, как видно из (8.33) $|\xi(t)|^2 \longrightarrow \rho = const$. Отсюда сразу же следует выражение для вероятности перехода из начального состояния $|0\rangle = |j_1 - j\rangle$ в конечное состояние $|m\rangle = |j_1 - j + m\rangle$:

$$W_m = \frac{(2j)!}{m!(2j-m)!} \frac{\rho^m}{(1+\rho)^{2j}} \tag{8.38}$$

Общая формула для вероятностей перехода имеет вид:

$$W_{mn} = \left| d^j_{\mu\nu}(\theta) \right|^2, \tag{8.39}$$

где $\mu = m - j$, $\nu = n - j$, $\rho = tg\frac{\theta}{2}$, а $d^j_{\mu\nu}(\theta)$ – известные матрические элементы представления $T^j(g)$.

9. <u>Некомпактная группа $SU(1,1)$ и канонические преобразования Боголюбова.</u>

В различных вопросах теоретической физики часто возникает задача нахождения спектра и волновых функций гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения бозонов. Например, как было показано Боголюбовым [17], к такой задаче сводится задача о сверхтекучести взаимодействующих бозонов. В той же работе был указан и способ решения задачи состоящий в диагонализации гамильтониана с помощью линейного канонического преобразования, которое получило затем название канонического преобразования Боголюбова.

Множество всех линейных канонических преобразований образует определенную группу именно симплектическую группу $Sp(2n, R)$ [58] (n – число степеней свободы рассматриваемой системы). При этом основное состояние гамильтониана оказывается когерентным состоянием, связанным с определенным представлением группы $Sp(2n,R)$.

В настоящем разделе мы рассмотрим теоретико-групповые аспекты данной задачи и свойства соответствующей системы когерентных состояний для простейшего случая одной степени свободы. В этом случае, как известно, группа $Sp(2,R)$ изоморфна группе $SU(1,1)$ группе матриц второго порядка с определителем равным единице, оставляющих инвариантной форму $|z_1|^2-|z_2|^2$. Она изоморфна также группе $SO(2,1)$ – группе вращений трехмерного псевдоэвклидова пространства.

Напомним сначала некоторые свойства группы $SU(1,1)$ и ее представлений[ж)]. Элемент g этой группы является матрицей

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix},\quad |\alpha|^2-|\beta|^2=1 \qquad (9.1)$$

Группа $SU(1,1)$ имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений и, в частности, две так называемые дискретные серии T^+ и T^- [54, 55]. Из них достаточно рассмотреть лишь одну, например T^+, поскольку все полученные результаты автоматически переносятся на другую. Представления дискретной серии бесконечномерны, однако они во многом аналогичны конечномерным представлениям группы $SU(2)$.

Алгебра Ли группы $SU(1,1)$ образована тремя генераторами K_1, K_2 и K_0. Переостановочные соотношения для них имеют вид

$$[K_1,K_2]=-iK_0,\ [K_2,K_0]=iK_1,\ [K_0,K_1]=iK_2 \qquad (9.2)$$

Как и в случае группы $SU(2)$ здесь удобно перейти к новым генераторам

$$K_\pm=K_1\pm iK_2 \qquad (9.3)$$

ж) Детальное рассмотрение свойств представлений группы $SU(1,1)$ дано в работе [54] и книге [55].

после чего переостановочные соотношения (9.2) принимают вид

$$[K_0 K_\pm] = \pm K_\pm , \quad [K_- , K_+] = 2K_0 \tag{9.4}$$

Нетрудно проверить, что оператор

$$\hat{C}_2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = K_0^2 - \frac{1}{2}(K_+ K_- + K_- K_+) \tag{9.5}$$

является оператором (оператором Казимира), т.е. коммутирует со всеми операторами K_i. В силу леммы Шура такой оператор для неприводимого представления кратен единичному оператору

$$\hat{C}_2 \sim K(K-1)\,\hat{I} \tag{9.6}$$

Таким образом представление группы $SU(1,1)$ характеризуется одним числом K ; для дискретной серии это число принимает значения $K = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$

Здесь необходимо отметить существенное различие между группами $SU(2)$ и $SU(1,1)$: группа $SU(2)$ односвязна, тогда как группа $SU(1,1)$ не является таковой. Это означает, что каждый замкнутый путь в $SU(2)$ может быть деформирован в точку. В то же время можно показать, что в группе $SU(1,1)$ путь, соответствующий повороту на угол $2\pi n$ (n – целое) в плоскости X_1 , X_2 невозможно непрерывно деформировать в точку. Это значит, что группа $SU(1,1)$ является бесконечно-связной. Известно, что объединяя достаточное число экземпляров (или, как говорят, листов) неодносвязной группы G и соответствующим образом склеивая их можно получить уже односвязную группу $\tilde{G}$ – так называемую универсальную накрывающую группы G.

В нашем случае группа $\widetilde{SU(1,1)}$ содержит бесконечное число листов. Представления этой группы также определяются числом K однако теперь K меняется непрерывно от нуля до бесконечности: $0 < K < \infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению представлений группы $SU(1,1)$, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов a и a^+, $[a, a^+] = 1$. Из них можно построить три квадратичных оператора: a^2, $(a^+)^2$ и $\frac{1}{2}(a^+a + aa^+)$. Вычисление коммутаторов показывает, что они образуют алгебру Ли изоморфную алгебре Ли группы $SU(1,1)$. Этот изиморфизм устанавливается с помощью формул

$$K_+ = \frac{1}{2}(a^+)^2, \quad K_- = \frac{1}{2}a^2, \quad K_0 = \frac{1}{4}(a^+a + aa^+) \qquad (9.7)$$

Вычисляя с помощью (9.7) оператор Казимира (9.5) получаем

$$C_2 = -\frac{3}{16} \qquad (9.8)$$

Отсюда следует, что

$$K = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad K = \frac{3}{4} \qquad (9.9)$$

Нетрудно видеть далее, что гильбертово пространство осцилляторных состояний с базисом $\{|n\rangle\}$ приводимо относительно действия операторов (9.7). Именно состояния с четным n образуют пространство неприводимого представления с $K=\frac{1}{4}$; соответственно состояния с четным n – пространство неприводимого представления с $K=\frac{3}{4}$. Следует однако иметь в виду, что эти представления, строго говоря, не являются представлениями группы $SU(1,1)\sim Sp(2,R)$, а являются представлениями группы $\overline{SU(1,1)}\sim \overline{Sp(2,R)}$ – группы, получающейся из двух экземпляров группы $SU(1.1)$ $(Sp(2,R))$, соответствующим образом склеенных. Эта группа была названа в [56] метаплектической группой.

Итак все пространство состояний $\mathcal{H}$ разбивается на неприводимые пространства $\mathcal{H}^+$ (состояния с четными n) и $\mathcal{H}^-$ (состояния с нечетными n): $\mathcal{H}=\mathcal{H}^+\oplus\mathcal{H}^-$. На пространствах $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$ действуют неприводимые представления $T^{1/4}$ и $T^{3/4}$ метаплектической группы $\overline{SU(1,1)}$.

Рассмотрим теперь эрмитов гамильтониан, квадратичный по операторам a и a^+

$$H=A(a^+)^2+\bar{A}a^2+B(a^+a+aa^+) \qquad (9.10)$$

Его можно переписать в виде

$$H=\Lambda_0K_0-\Lambda_1K_1-\Lambda_2K_2, \qquad (9.11)$$

где Λ_0, Λ_1 и Λ_2 – вещественные числа.

Заметим, прежде всего, что с помощью унитарного преобразования $H\to UHU^+$, $U=\exp(i\alpha K_0)$, H можно привести к виду

$$H=\tilde{A}\left((a^+)^2+a^2\right)+\tilde{B}(a^+a+aa^+)=\tilde{\Omega}_0K_0-\tilde{\Omega}_1K_1 \quad (9.12)$$

где $\tilde{\Omega}_0=\Omega_0$, $\tilde{\Omega}_1=\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}$, а числа $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – вещественны.

Теперь попытаемся упростить выражение для H с помощью канонического преобразования Боголюбова, т.е. линейного преобразования, сохраняющего перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} b&=ua+va^+ \\ b^+&=\bar{v}a+\bar{u}a^+, \quad |u|^2-|v|^2=1 \end{aligned} \qquad (9.13)$$

Нетрудно видеть, что преобразования (9.13) образует группу SU (1.1), а преобразование обратное к (9.13) имеет вид

$$\begin{aligned} a&=\bar{u}b-vb^+ \\ a^+&=-\bar{v}b+ub^+ \end{aligned} \qquad (9.14)$$

Подставляя эти выражения для a и a^+ с чисто вещественными u и v в (9.12) получаем

$$H=\Omega_0'K_0-\Omega_1'K_1, \qquad (9.12^1)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_0'&=\operatorname{ch}\tau\,\Omega_0+\operatorname{sh}\tau\,\Omega_1 \\ \Omega_1'&=\operatorname{sh}\tau\,\Omega_0+\operatorname{ch}\tau\,\Omega_1 \\ \operatorname{ch}\tau&=(u^2+v^2),\ \operatorname{sh}\tau=2uv. \end{aligned} \qquad (9.15)$$

Таким образом преобразование (9.15) представляет гиперболический поворот на угол τ в плоскости X_0, X_1.

Рассмотрим отдельно три различных случая

1. $\Omega_0^2 - \Omega_1^2 = 4\lambda^2 > 0, \quad \Omega_0 > 0$

Тогда полагая

$$u = ch(\tau/2), \quad v = sh(\tau/2), \quad th\tau = -\Omega_1/\Omega_0 \qquad (9.16)$$

приводим гамильтониан H к обычному гамильтониану осциллятора

$$H = \lambda\left(b^+b + \frac{1}{2}\right) \qquad (9.17)$$

Этот случай обычно и осуществляется в физических задачах. Спектр оператора H здесь дискретен и ограничен снизу.

П. $\Omega_0^2 - \Omega_1^2 = -4\mu^2 < 0$

В этом случае полагаем

$$u = ch\frac{\tau}{2}, \quad v = sh\frac{\tau}{2}, \quad th\tau = -\Omega_0/\Omega_1, \qquad (9.18)$$

после чего гамильтониан H принимает вид

$$H = 2\mu K_1 \qquad (9.19)$$

Спектр такого гамильтониана непрерывен и неограничен ни снизу ни сверху. Тем не менне такой гамильтониан возникает как эффективный гамильтониан в задаче об осцилляторе с переменной частотой, периодически зависящей от времени [57]. В классическом случае это соответствует зоне неустойчивости.

Ш. $\Omega_0^2 - \Omega_1^2 = 0, \quad \Omega_0 = -\Omega_1 > 0$

$$H = \Omega_0 (K_0 + K_1), \qquad (9.20)$$

Здесь спектр гамильтониана непрерывен и ограничен снизу. Такой гамильтониан отвечает границе зоны устойчивости в задаче об осцилляторе с переменной частотой, периодически зависящей от времени.

Во всех трех случаях преобразованный гамильтониан содержит операторы b^+ и b – операторы рождения и уничтожения квазичастиц, а в интересующем нас случае 1 основное состояние $|\psi_0\rangle$ гамильтониана H есть состояние без квазичастиц, т.е.

$$b|\psi_0\rangle = 0 \qquad (9.21)$$

Состояние же с определенным числом квазичастиц определяется обычно формулой

$$|\psi_n\rangle = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}}|\psi_0\rangle \qquad (9.22)$$

Состояния $\{|\psi_n\rangle\}$ образуют новый базис в гильбертовом пространстве, причем как нетрудно видеть

$$|\psi_n\rangle = T(g)|n\rangle, \qquad (9.23)$$

где $T(g)$ – оператор представления $T^{1/4}$ или $T^{3/4}$, отвечающий каноническому преобразованию (9.13)

$$T(g)\,a\,T^{-1}(g) = b = ua + va^+ \qquad (9.24)$$

Таким образом разложение одного базиса по другому определяется матричными элементами оператора $T(g)$. Для получения явных формул удобно использовать систему когерентных состояний для представлений $T^{1/4}$ и $T^{3/4}$ группы

$\overline{SU(1,1)}$.

Заметим прежде всего, что имеет место разложение, аналогичное разложению предыдущего раздела

$$T(g) = N e^{\xi K_+} e^{i\alpha K_0} e^{-\eta K_-} , \qquad (9.25)$$

где $|\xi|<1$, N – нормировочный множитель.

При этом

$$K_- |\varphi_0\rangle = 0, \qquad (9.26)$$

где $|\varphi_0\rangle = |0\rangle$ для $T^{1/4}$ и $|\varphi_0\rangle = |1\rangle$ для $T^{3/4}$.

Следовательно когерентное состояние $|\xi\rangle$ можно определить формулой

$$|\xi\rangle = N e^{\xi K_+} |\varphi_0\rangle . \qquad (9.27)$$

Отсюда получаем разложение когерентного состояния $|\xi\rangle$ по обычной системе состояний

$$|\xi\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} \xi^n |2n\rangle \quad \text{для } K=\frac{1}{4} \qquad (9.28^1)$$

$$|\xi\rangle = N' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^n n!} \xi^n |2n+1\rangle \quad \text{для } K=\frac{3}{4} \qquad (9.28^{П})$$

Нормировочные множители N и N' нетрудно найти из условия нормировки

$$N = (1-|\xi|^2)^{1/4} , \quad N' = (1-|\xi|^2)^{3/4} \qquad (9.29)$$

Отсюда следует, что основное состояние $|\psi_0\rangle$ гамильтониана (9.10) является когерентным состоянием

$$|\Psi_0\rangle = |\xi\rangle, \ \xi = \operatorname{th}\frac{\tau}{2}, \ \operatorname{th}\tau = |A|/B \qquad (9.30)$$

При этом из формулы (9.24) следует, что когерентное состояние $|\xi\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{B}|\xi\rangle = (ua + va^+)|\xi\rangle = 0, \ \xi = -v/u, \ |\xi| < 1 \qquad (9.31)$$

Таким образом когерентное состояние $|\xi\rangle$ определяется точкой ξ единичного круга $D = \{\xi : |\xi| < 1\}$. Этот круг согласно общей теории, является фактор-пространством $G/H = SU(1,1)/U(1)$; следовательно, его можно рассматривать как плоскость Лобачевского. Теперь из (9.28^1) и (9.28^2) нетрудно получить выражение для скалярного произведения двух когерентных состояний.

$$\langle\xi|\xi'\rangle = (1-|\xi|^2)^K (1-|\xi'|^2)^K (1-\bar{\xi}\xi')^{-2K}, \ K = \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \qquad (9.32)$$

Таким образом когерентные состояния неортогональны друг другу. При этом для системы когерентных состояний с $K = \frac{3}{4}$ имеет место разложение единицы

$$\frac{1}{2}\int d\mu(\xi)|\xi\rangle\langle\xi| = \hat{I}, \qquad (9.33)$$

где $d\mu(\xi)$ – инвариантная мера на плоскости Лобачевского

$$d\mu(\xi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1-|\xi|^2)^2}, \qquad (9.34)$$

$|\xi\rangle\langle\xi|$ – проекционный оператор на состояние $|\xi\rangle$, а $\hat{I}$ – единичный оператор.

Интегралы аналогичные (9.33) в случае $K = \frac{1}{4}$ расходятся и, соответственно, разложение единицы в этом слу - чае имеет более сложный вид.

Пусть $|\psi\rangle$ – произвольный вектор гильбертова пространства. Ему можно поставить в соответствие функцию $\psi(\xi)$:

$$\langle\psi|\xi\rangle=(1-|\xi|^2)^K\,\psi(\xi)\,,\quad K=\frac{1}{4}\,,\;K=\frac{3}{4} \qquad (9.35)$$

Нетрудно показать, что функция $\psi(\xi)$ аналитична в единичном круге $D=\{\xi:|\xi|<1\}$ и при $K=\frac{3}{4}$

$$\|\psi\|^2=\int d\mu_{3/4}(\xi)\,|\psi(\xi)|^2<\infty,\quad d\mu_{3/4}(\xi)=\frac{1}{2\pi}(1-|\xi|^2)^{-1/2} \qquad (9.36)$$

При этом из неравенства Шварца следует

$$|\psi(\xi)|\leq(1-|\xi|^2)^{-K}\,\|\psi\|,\quad K=\frac{1}{4},\frac{3}{4} \qquad (9.37)$$

Отметим, что в данной задаче плоскость Лобачевского играет роль фазовой плоскости. Такого рода обобщенные фазовые пространства в последние годы стали играть заметную роль в теории представлений групп (см.книгу [10]).

Отметим некоторые свойства рассматриваемой системы когерентных состояний.

1. Оператор $T(g)$ переводит одно когерентное когерентное состояние в другое

$$T(g)|\xi\rangle=e^{i\phi(g,\xi)}\,|\xi_{g^{-1}}\rangle,\quad g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix} \qquad (9.38)$$

где

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix},\quad \xi_{g^{-1}}=(\bar\alpha\xi-\bar\beta)(-\beta\xi+\alpha)^{-1} \qquad (9.39)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор

$|\eta\rangle$ получаем производящую функцию для матричных элементов представлений $T^{\kappa}(g)$ $(\kappa=\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

$$G(\bar\eta,\xi)=\sum \eta^{-m}\xi^{n} C_m C_n T^{\kappa}_{mn}(g)=$$
$$=(\alpha-\beta\xi+\bar\eta\bar\beta-\bar\eta\xi\bar\alpha)^{-2\kappa}, \quad C_m=\sqrt{\frac{\Gamma(m+2\kappa)}{m!\,\Gamma(2\kappa)}} \qquad (9.40)$$

Приведем выражение для квадрата модуля матричного элемента $|T^{\kappa}_{mn}|^2$, $(\kappa=\frac{1}{4},\ \kappa=\frac{3}{4})$, полученное ранее иным способом в работе [58] *.

$$|T^{\kappa}_{mn}|^2=\frac{n_<!}{n_>!}\sqrt{1-\rho}\,\left|\,P^{\frac{1}{2}|m-n|}_{\frac{1}{2}(m+n)}\left(\sqrt{1-\rho}\right)\right|^2 \qquad (9.41)$$

Здесь $\rho=|\beta|^2/|\alpha|^2=\mathrm{th}^2\frac{\tau}{2}$, $P^m_n(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра. Заметим, что величина $|T^{\kappa}_{mn}|^2$ дает вероятность нахождения n частиц в состоянии с m квазичастицами. При $m=0$ выражение (9.41) значительно упрощается

$$|T^{\kappa}_{0n}|^2=\begin{cases}\sqrt{1-\rho}\,\dfrac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\rho^{\ell}, & n=2\ell,\ \kappa=\dfrac{1}{4}\\[2ex] (1-\rho)^{3/2}\dfrac{(2\ell+1)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\rho^{\ell}, & n=2\ell+1,\ \kappa=\dfrac{3}{4}\end{cases} \qquad (9.42)$$

Формула (9.42) дает распределение по числу частиц в основном состоянии гамильтониана (9.10).

---

*Простой вывод формулы (9.41) дан в книге [59].

Отметим еще, что, как показано в работе [60] матричные элементы произвольного представления $T^{к}$ дискретной серии выражаются через известные матричные элементы группы вращений (группы $SU(2)$).

В заключение заметим, что с помощью системы когерентных состояний квантовая задача о системе с квадратичным гамильтонианом, коэффициенты которого произвольным образом зависят от времени, сводится без какого-либо приближения к более простой классической задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигнер Е., Теория групп, ИИЛ (1961).
2. Любарский Г.Я., Теория групп и ее применения в физике. Гостехиздат, (1957).
3. Хаммермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам "МИР" (1966).
4. Ванагас В.В., Алгебраические методы в теории ядра, Вильнюс (1971).
5. Racah G., Group theory and spectroscopy, Lecture notes, Princeton (1951), Ergebn. Extract. Naturwiss. 37, 28 (1965)
6. Бейман Б.Ф., Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии, физматгиз (1961).
7. Biedenharn L.C., Lectures in theoretical physics, v. 5, 258, N.Y. (1963).
8. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ (1947).
9. Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления, "Наука" (1970).
10. Кириллов А.А., Элементы теории представлений, "Наука" (1972).
11. Wigner E.P., Phys. Rev. 51, 106 (1937).
12. Franzini P., Radicati L., Phys. Lett. 6, 322 (1963).
13. Elliott J.P., Proc. Roy. Soc. A245, 128, 562 (1958).
14. Симонов Ю.А., ЯФ 3, 360 (1966); 7, 1210 (1968).
15. Macfarlane M.H., Lectures in theoretical physics v. 8C, 583 (1966).
16. Goshen S., Lipkin H.J., Ann. Phys. 6, 301 (1959)
17. Боголюбов Н.Н., Изв.АН СССР, сер.физ. 11, 77 (1947)
18. Дайсон Ф., Статистическая теория энергетических уровней сложных систем, ИИЛ (1963).
19. Racah G., Farkas memorial volume, Jerusalem, p. 294 (1952)

20. Perelomov A.M., Commun. Math. Phys. 26, 222 (1972).

21. Casimir H.B.G., Proc. Ned. Akad. Wet. 34, 844 (1931).

22. Гельфанд И.М., Математ.сб. 26, 103 (1950).
23. Racah G., Rend. Lincei 8, 108 (1950).
24. Chevalley C., Amer. J. Math. 77, 778 (1955).

25. Umezawa M., Nucl. Phys. 48, 111 (1963); 53, 54; 57, 65 (1964).

26. Umezawa M., Proc. Ned. Akad. Wet. ser. B69, 579, 592, 607, 620 (1966).
27. Micu M., Nucl. Phys. 60. 353 (1964).
28. Biedenharn L.C., Jour. Math. Phys. 4, 436 (1963)

29. Baird G.E., Biedenharn L.C., Journ Math. Phys. 4, 1449 (1963).
30. Gruber B., O'Raifeartaigh L., Jour, Math. Phys. 5, 1796 (1964).
31. Переломов А.М., Попов В.С., Письма в ЖЭТФ 1, 15 (1965). ЯФ 3, 924 (1966).
32. Переломов А.М., Попов В.С., Письма в ЖЭТФ 2, 34 (1965); ЯФ 3, 1127 (1966).
33. Переломов А.М., Попов В.С., ЯФ 5, 693 (1967); ЯФ 7, 460 (1968).
34. Переломов А.М., Попов В.С., Изв. АН.СССР, сер.мат. 32, 1368 (1968).
35. Березин Ф. А. Функц. анализ и его приложения 1, № 2, 1 (1967).
36. Rosen S.P., Phys. Rev. B135. 1041 (1964).

37. Glauber R.J., Phys. Rev. 130, 2529, 131, 2766 (1963).

38. Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы квантовой оптики "МИР" (1970).
39. Зельдович Б.Я., Переломов А.М., Попов В.С., препринты ИТЭФ №№ 612, 618 (1969).

40. Когерентные состояния в квантовой теории, "МИР" (1972).
41. Klauder J.R., Ann. Phys. 11, 123 (1960).
42. Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig (1928).
43. Barut A.O., Girardello L., Commun. Math. Phys. 21, 41 (1971).
44. Переломов А.М., Докторская диссертация, ИТЭФ (1973).
45. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., представления групп вращений и групп Лоренца, Физматгиз (1958).
46. Виленкин Н.Я., Специальные функции и теория представлений групп "Наука" (1965).
47. Radcliffe J.M., Jour. Phys. A4, 313 (1971).
48. Arecchi F.T., Courtens E., Gilmore R., Thomas H., Phys. Rev. A6, 2211 (1972).
49. Lieb E.H., Commun. Math. Phys. 31, 327 (1973).
50. Hepp K., Lieb E.H., Phys. Rev. A8, 2517 (1973).
51. Majorana E., Nuovo Cim. 9, 43 (1932).
52. Rabi I.I., Phys. Rev. 51, 652 (1937).
53. Березин Ф.А., Метод вторичного квантования, "Наука" (1965).
54. Bargmann V., Ann. Math. 48, 568 (1947).
55. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз (1962).
56. Вейль А., Математика 13:5, 33 (1969).
57. Переломов А.М., Попов В.С., ТМФ 1, 360 (1969).
58. Попов В.С., Переломов А.М., ЖЭТФ 56, 1375 (1969).
59. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М., Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., "Наука" (1971).
60. Переломов. А.М., Reps. Math. Phys. 2, 277 (1971).

Л 50273. Под. к печати 12/У-74 г. Цена 30 к.
Заказ 558. Тираж 250.

Типография МИФИ, Каширское шоссе, д.1.