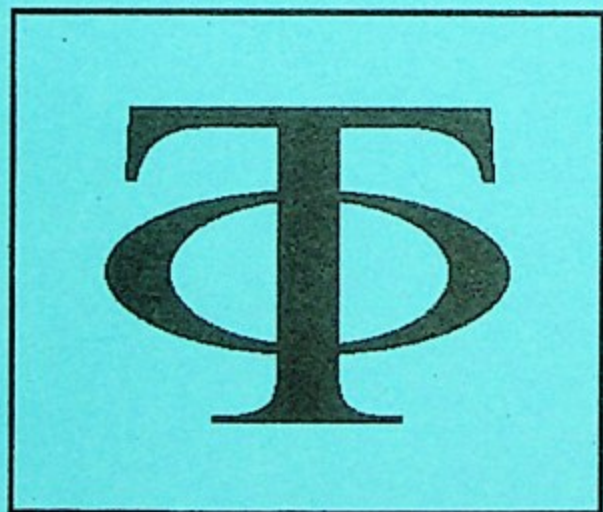




МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

---

*Квантовая физика  
на микро- и макроуровне*



XXV СЕССИЯ  
МЕЖДУНАРОДНОЙ  
ШКОЛЫ МИФИ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКЕ  
им. В.М. ГАЛИЦКОГО

МОСКВА 2002

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

МИНИСТЕРСТВО ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ РФ

МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ, НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ РФ

РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

**КВАНТОВАЯ ФИЗИКА  
НА МИКРО- И МАКРОУРОВНЕ**

XXV СЕССИЯ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ МИФИ  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ им. В.М. ГАЛИЦКОГО

ТЕКСТ ЛЕКЦИЙ

ЧАСТЬ I

Москва 2002

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>"Сверхтекучий газ при нулевой температуре в ловушках",</i> Ю.М. Каган, Л.А. Максимов.....	3
<i>"Модели высокотемпературной сверхпроводимости",</i> Ю. В. Копаев.....	43
<i>"Исследования молекулярных нанообъектов с помощью сканирующего оптического микроскопа ближнего поля",</i> А. Г. Витухновский.....	57
<i>"Лазеры на квантовых ямах с когерентной электронной подсистемой"</i> В.Ф. Елесин.....	88

## Сверхтекучий газ при нулевой температуре в ловушках.

Ю.Каган, Л.А. Максимов

### ВВЕДЕНИЕ.

В идеальном бозе-газе при низкой температуре имеет место явление накапливания макроскопического числа частиц на нижнем уровне - конденсация, предсказанная в 1924 г. Бозе и Эйнштейном. Она наступает, когда тепловая длина волны де-Бройля частиц ( $\lambda \simeq \hbar / (mT)^{1/2}$ ) с понижением температуры начинает превышать межатомное расстояние  $1/n^{1/3}$ . Конденсация существует и в неидеальном бозе-газе. Конденсат в неидеальном газе обладает замечательным свойством - сверхтекучестью. Сверхтекучесть была открыта Петром Капицей в конденсированной среде - в бозе-жидкости. Такой жидкостью является низкотемпературный гелий. Все другие плотные вещества при температуре, близкой к нулю, находятся в твердом состоянии. Сверхтекучий жидкий гелий имеет нулевую вязкость и его течение по капиллярам не затухает.

В двадцатом веке Россия подарила миру двух великих физиков-теоретиков, внесших выдающийся вклад в развитие этой области. Это - Лев Ландау и Николай Боголюбов. Ландау дал принципиальное объяснение явления и построил феноменологическую теорию сверхтекучей жидкости (1941). Боголюбов создал микроскопическую теорию сверхтекучести, основанную на модели слабонеидеального бозе-газа (1947). Эта модельная теория превратилась в теорию, адекватную физическому явлению, после открытия сверхтекучести газов щелочных металлов.

В 1995 г. Кеттерли, Корнелл и Виман поместили в магнитную ловушку

газ рубидия и понизили температуру до рекордно низкой величины порядка  $10^{-6}$ . Атом щелочного металла  $^{85}\text{Rb}$  имеет нечетное число электронов (37) и нечетное число нуклонов (85) и является бозе-частицей. Было экспериментально показано, что при достигнутых температурах в газе образуется бозе-эйнштейновская конденсация. А наличие в нем незатухающих колебаний указывает на наличие второго удивительного свойства бозе-систем - на сверхтекучесть. Позже сверхтекучесть была наблюдаена у других газов щелочных металлов (Li, Na), а также у поляризованного атомарного водорода и метастабильного газа гелия. В прошлом году Кеттерли, Корнелл и Виман стали лауреатами Нобелевской премии.

Бурное развитие экспериментальных исследований газов в магнитных ловушках привлекло внимание к этому явлению большого числа теоретиков. Настоящая лекция посвящена краткому и далеко не полному обзору теоретических работ, которые опубликованы в последнее время. Кроме того, хотя большинство слушателей Школы знакомо с предметом в рамках девятого тома курса "Теоретической физики", мы в нескольких словах напомним теорию Боголюбова.

План лекции.

А Газ в однородном пространстве.

А1. Нелинейное уравнение Шредингера, конденсат, уравнение Гросса-Питаевского.

А2. Элементарные возбуждения неидеального бозе-газа. Сверхтекучесть.

А3. Энергия и волновая функция основного состояния.

А4. Солитоны и стационарный эффект Джозефсона.

А5. Решеточный газ.

А6. Прямое наблюдение коэффициентов боголюбовского преобразования.

В. Газ в ловушках.

В1. Уравнение Гросса-Питаевского в магнитной ловушке. Основное состояние в приближении Томаса-Ферми.

В2. "Гидродинамические уравнения" бозе-газа при нулевой температуре. Возбуждения конденсата в ловушках.

В3. Осцилляции основного состояния.

В4. Излучение боголюбовских возбуждений в осциллирующем газе, обусловленное статическим дефектом.

В5. "Черенковское излучение"

В6. Параметрический резонанс как механизм релаксации осцилляций.

#### А1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА, КОНДЕНСАТ, УРАВНЕНИЕ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО.

Итак, рассмотрим неидеальный бозе-газ в ловушке  $V(\vec{r})$ , которая создается внешним магнитным полем. Для простоты ограничимся температурой, близкой к нулю, когда тепловых возбуждений очень мало  $T \ll T_c \simeq (\hbar^2/m)n^{2/3}$ . Полный гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H}_{tot} = \int d^3r [\hat{\Psi}^\dagger(t, \vec{r}) (\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu_0) \hat{\Psi}(t, \vec{r}) + \frac{1}{2} U_0 \hat{\Psi}^\dagger(t, \vec{r}) \hat{\Psi}^\dagger(t, \vec{r}) \hat{\Psi}(t, \vec{r}) \hat{\Psi}(t, \vec{r})]. \quad (1)$$

Величина постоянной  $\mu_0$  произвольна и, фактически, фиксирует начало отсчета энергии. Ниже ее значение будет выбрано так, чтобы функция основного состояния не зависела от времени. Имея ввиду описание явлений, слабо меняющихся на масштабах парного взаимодействия атомов, потенциальная энергия взаимодействия записана в локальной форме. Параметр  $U_0$  имеет размерность энергия  $\times$  объем и записывается в виде

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (2)$$

Величина  $a$  называется длиной рассеяния. Производная по времени от гайзенберговских операторов равна

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(t, \vec{r}) = [\hat{\Psi}(t, \vec{r}), \hat{H}]. \quad (3)$$

Приходим к нелинейному "уравнению Шредингера"

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(t, \vec{r}) = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu_0 \right) \hat{\Psi}(t, \vec{r}) + U_0 \hat{\Psi}^\dagger(t, \vec{r}) \hat{\Psi}(t, \vec{r}) \hat{\Psi}(t, \vec{r}). \quad (4)$$

Разложим функцию бозе-поля  $\hat{\Psi}$  по собственным функциям одночастичной задачи

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu_0 \right) \varphi_k(\vec{r}) = \xi_k \varphi_k(\vec{r}) \quad (5)$$

$$\hat{\Psi} = \sum_k \hat{a}_k(t) \varphi_k(\vec{r}). \quad (6)$$

В первой части лекции для простоты будем рассматривать газ в отсутствие потенциала ловушки, когда функции  $\varphi_k(\vec{r}) = V^{-1/2} \exp(i\vec{k}\vec{r})$  суть плоские волны в ящике  $V = L^3$  с периодическими граничными условиями  $\varphi_k(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r} + \vec{L})$ .

В основном состоянии (при нулевой температуре) все частицы идеального бозе-газа находятся в конденсате, т.е. имеют нулевой импульс. В неидеальном газе при  $T = 0$  большинство частиц  $N_0$  остаются в конденсате, но из-за отталкивания небольшая доля частиц имеют ненулевые импульсы. Поэтому из операторной функции (6) целесообразно выделить оператор с нулевым импульсом

$$\hat{\Psi} = \varphi_0(\vec{r}) \hat{a}_0 + \hat{\Psi}_1, \quad \langle \hat{\Psi}_1 \rangle = 0, \quad (7)$$

$$\hat{\Psi}_1 = \sum_{k \neq 0} \hat{a}_k(t) \varphi_k(\vec{r}) \quad (8)$$

В представлении вторичного квантования конденсат из  $N_0$  частиц с нулевым импульсом описывается вектором состояния, образованном многократным действием на состояние вакуума оператора рождения

$$|N_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_0!}} (\hat{a}_0^\dagger)^{N_0} |0\rangle, \quad \langle N_0 | N_0 \rangle = 1 \quad (9)$$

Когерентным состоянием называется собственное состояние оператора поглощения

$$\hat{a}_0 |A\rangle = A |A\rangle. \quad (10)$$

Это состояние есть суперпозиция состояний с разным числом  $n$  частиц с нулевым импульсом.

$$|\Psi_{00}\rangle = |A\rangle = e^{-\frac{1}{2}|A|^2} \sum_n \frac{A^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \langle A| |A\rangle = 1, \\ N_0 = \langle A| \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 |A\rangle = |A|^2. \quad (11)$$

В макроскопическом ( $N_0 \rightarrow \infty$ ) когерентном состоянии относительная флуктуация числа частиц в конденсате, стремится к нулю. Поэтому в макроскопическом пределе векторы состояния (9) и (11) эквивалентны. Ниже, мы будем считать, что вектор основного состояния конденсата имеет форму (11).

Все наблюдаемые величины при низких температурах являются средними по состоянию конденсата. Поэтому, имея ввиду (10), можно в (7) первый член заменить на классическую функцию конденсата

$$\hat{\Psi} = \Psi + \hat{\Psi}_1 \quad (12)$$

Амплитуда плотности конденсата  $\Psi$  в слабо неравновесном случае есть классическое бозе-поле  $\Psi(t, \vec{r})$ , аналогичное скалярному потенциалу классического электрического поля. Чтобы найти эволюцию конденсата, следует подставить (12) в (4) и пренебречь операторной частью поля, описывающей надконденсатные частицы  $\hat{\Psi}_1$ . Имеем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi(t, \vec{r}) + U_0 \Psi^*(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) - \mu_0 \Psi(t, \vec{r}). \quad (13)$$

Это есть нелинейное уравнение Шредингера. В физике сверхтекучего бозе-газа оно называется уравнением Гросса-Питаевского (1961), которые первые



обосновали возможность описания движения конденсата уравнением (13).

Основное состояние этого уравнения однородно и не зависит от времени

$$\Psi(t, \vec{r}) = \Psi, \quad (14)$$

если введенная выше константа равна

$$\mu_0 = U_0 \Psi^2. \quad (15)$$

Число частиц и энергия однородного конденсата (см. (1)) связаны с амплитудой конденсата  $\Psi$  формулами

$$N_0 = \int d^3r \Psi^+ \Psi = \Psi^2 V, \quad E_{00} = \frac{1}{2} U_0 \int d^3r \Psi^+ \Psi^+ \Psi \Psi = \frac{U_0 N_0^2}{2V} \quad (16)$$

Дифференцируя энергию по числу частиц, находим химический потенциал

$$\mu = \frac{\partial E_{00}}{\partial N_0} = \frac{U_0 N_0}{V} = U_0 \Psi^2. \quad (17)$$

Сравнивая это выражение с (15), мы убеждаемся, что постоянная  $\mu_0$  есть химический потенциал. При этом  $E_{00} = \frac{1}{2} \mu_0 N_0$ . В отличие от идеального газа, неидеальный бозе-газ в основном состоянии обладает отличным от нуля давлением

$$P = -\frac{\partial E_{00}}{\partial V} = \frac{U_0 N_0^2}{2V^2} \quad (18)$$

и гидродинамической скоростью звука

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{U_0 \rho}{m^2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{m}}. \quad (19)$$

( $\rho = mN_0/V$  - плотность газа). Здесь мы пренебрегаем отличием  $N_0$  от полного числа частиц  $N$ .

Одним из первых доказательств появления бозе-конденсации в ультрахолодном газе было обнаружение в 1997 г. уменьшения в шесть раз трехчастичной рекомбинации, ранее предсказанного Каганом и Шляпниковым. В том же году Кеттерли продемонстрировал когерентные свойства газа, наблюдая интерференцию при слиянии двух конденсатов.

**A2 ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ВОЗЕ-ГАЗА.  
СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ.**

Даже при нулевой температуре небольшая часть частиц не принадлежит конденсату и имеет отличные от нуля импульсы. Свойства этих частиц описываются операторной функцией  $\hat{\Psi}_1$  в (12). Эволюция этого оператора описывается линейной по  $\hat{\Psi}_1$  частью основного уравнения (4).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_1(t, \vec{r}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} \hat{\Psi}_1(t, \vec{r}) + 2U_0 \Psi^2 \hat{\Psi}_1(t, \vec{r}) + U_0 \Psi^2 \hat{\Psi}_1^+(t, \vec{r}) - \mu \hat{\Psi}_1(t, \vec{r}). \quad (20)$$

С учетом (17) приводим это уравнение к компактному виду

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}_1 = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \mu \right) \hat{\Psi}_1 + \mu \hat{\Psi}_1^+. \quad (21)$$

Для каждого члена разложения (8) имеем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_k(t) = \xi_k \hat{a}_k(t) + \mu \hat{a}_{-k}^+(t). \quad (22)$$

В этом уравнении удивительным образом перемешаны бозе-операторы  $\hat{a}_k(t)$  и  $\hat{a}_{-k}^+(t)$ . Первый член справа описывает свободное движение частицы, а последний член в приближении самосогласованного поля отражает виртуальное поглощение частицы конденсатом.

Для диагонализации уравнения (22) применим каноническое преобразование Боголюбова

$$\hat{a}_k(t) = [u_k \hat{b}_k e^{-i\xi_k t/\hbar} - v_k \hat{b}_{-k}^+ e^{i\xi_k t/\hbar}] \quad (23)$$

и его эрмитово сопряженное выражение (с заменой знака импульса)

$$\hat{a}_{-k}^+(t) = [u_k \hat{b}_{-k}^+ e^{+i\xi_k t/\hbar} - v_k \hat{b}_k e^{-i\xi_k t/\hbar}]. \quad (24)$$

Здесь введены операторы поглощения  $\hat{b}_k$  и рождения  $\hat{b}_k^+$  квазичастиц, которые удовлетворяют таким же правилам коммутации, что и исходные

операторы "голых частиц".

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+] = \delta_{k,k'}, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}] = [\hat{b}_k^+, \hat{b}_{k'}^+] = 0. \quad (25)$$

Отсюда

$$u_k^2 - v_k^2 = 1 \quad (26)$$

В рассматриваемом приближении квазичастицы ведут себя как частицы идеального газа, и соответствующие операторы являются собственными "функциями" оператора энергии

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_k = \epsilon_k \hat{b}_k, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{b}_k^+ = -\epsilon_k \hat{b}_k^+. \quad (27)$$

с неизвестными пока собственными значениями  $\pm \epsilon_k$ . Коэффициенты преобразования  $u_k, v_k$  полагаются действительными, четными функциями вектора  $k$ . Это всегда можно сделать удачным выбором фаз у операторов  $\hat{b}_k$ .

Смысл формулы (23) состоит в том, что поглощение бозе-частицы, из состояния с импульсом  $k$  эквивалентно поглощению с вероятностью  $u_k^2$  конденсатом одного кванта элементарного возбуждения и рождению с вероятностью  $v_k^2$  из конденсата кванта с противоположным импульсом.

Подставив (23), (24) и (27) в (22), находим энергию квазичастицы

$$\epsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{(\hbar k)^2}{m} \mu + \left(\frac{(\hbar k)^2}{2m}\right)^2}. \quad (28)$$

и коэффициенты преобразования

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_k}{\epsilon_k} + 1 \right)}, \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_k}{\epsilon_k} - 1 \right)}, \quad u_k^2 + v_k^2 = \frac{\xi_k}{\epsilon_k}, \quad 2u_k v_k = \frac{\mu}{\epsilon_k}. \quad (29)$$

Фактически, это коэффициенты поворота в пространстве с гиперболической метрикой (26).

При больших импульсах  $\epsilon_k$  совпадает с энергией свободной частицы

$$\epsilon_k \simeq \frac{(\hbar k)^2}{2m}, \quad \epsilon_k \gg \mu, \quad (30)$$

а длинноволновая часть спектра имеет форму звукового спектра, т.е. линейно зависит от импульса.

$$\epsilon_k = c\hbar k, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \sqrt{\frac{U_0 N_0}{mV}}, \quad \epsilon_k \ll \mu. \quad (31)$$

Величина  $c$  численно равна гидродинамической скорости звука (19). Таким образом, квазичастицы играют в бозе-газе роль звуковых квантов - фононов. Фазовая скорость квазичастиц равна

$$c(k) = \frac{\epsilon_k}{\hbar k} = c \sqrt{1 + \frac{(\hbar k)^2}{4\mu m}} \quad (32)$$

и ее минимальное значение равно  $c$ .

В неидеальном бозе газе нет других низколежащих мод возбуждений. Следовательно, согласно критерию Ландау неидеальный газ при низких температурах является сверхтекучим, пока скорость потока меньше скорости звука

$$v \leq c$$

Одним из прямых доказательств сверхтекучести является наблюдение незатухающих осцилляций газа в магнитной ловушке (см. раздел В).

Из преобразований Боголюбова следует, что среднее по состоянию газа число частиц с импульсом  $k$  равно

$$N_k = \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = v_k^2 + u_k^2 \langle \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \rangle + v_k^2 \langle \hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k} \rangle. \quad (33)$$

При нулевой температуре квазичастицы отсутствуют, и первый член (33) дает

$$N_k^{(0)} = v_k^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_k}{\epsilon_k} - 1 \right). \quad (34)$$

При  $\epsilon_k \ll \mu$  это число весьма велико, но при  $\epsilon_k \gg \mu$  быстро падает. Полное число надконденсатных частиц по порядку величины равно, очевидно, числу состояний свободных частиц с импульсами меньше  $p_{\max} = \sqrt{2m\mu}$ . Это число

равно

$$n_1^{(0)} = \frac{1}{V} \sum N_k^{(0)} \simeq \frac{p_{\max}^3}{(2\pi\hbar)^3} \simeq n_0 \sqrt{n_0 a^3}. \quad (35)$$

Теория Боголюбова опирается на предположение, что в основном состоянии большинство частиц находится в конденсате, и  $n_1^{(0)} \ll n_0$ . Отсюда находим оценку максимальной плотности газа

$$\max n_0 \simeq a^{-3}, \quad (36)$$

Получили естественный результат: газ можно считать разреженным, пока среднее расстояние между частицами велико по сравнению с длиной рассеяния. Заметим, что при этом

$$\frac{\mu}{T_c} \simeq an^{1/3} \ll 1.$$

Это означает что температура, имеющая порядок величины  $\mu$ , много ниже температуры фазового перехода, и существует широкая область температур ( $\mu \leq T \leq T_c$ ), в которой можно пренебрегать отличием квазичастиц от частиц.

Плотность частиц, возбужденных температурой согласно (33) равна

$$n_1^{(T)} = \sum \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} n_{bk}, \quad n_{bk} = \langle \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \rangle.$$

Число квазичастиц определяется температурой и, следовательно, описывается распределением Планка-Бозе-Эйнштейна с нулевым химическим потенциалом

$$n_{bk} = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_k) - 1}.$$

В зависимости от рассматриваемой области температур плотность возужденных частиц по порядку величины равна

$$n_1^{(T)} \simeq \frac{\mu}{T} \left(\frac{T}{c}\right)^3, \quad 0 < T < \mu, \quad (37)$$

$$n_1^{(T)} \simeq \sum N_k \simeq (mT)^{3/2}, \quad \mu < T \ll T_c \frac{\mu}{T_c} = an^{1/3}. \quad (38)$$

Подчеркнем, что энтропия конденсата равна нулю, и при  $T \ll T_c$  вклад в энтропию и теплоемкость дают только надконденсатные частицы.

Важной характеристикой бозе-газа при низких температурах является аномальное среднее

$$A = \frac{1}{V} \langle \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_1 \rangle = -\frac{1}{V} \sum \frac{\mu}{2\epsilon_k} (1 + 2n_{bk}). \quad (39)$$

Абсолютная величина этого аномального среднего по порядку величины совпадает с числом надконденсатных частиц. Отличие этого аномального среднего от нуля явным образом показывает, что сверхтекучий бозе-газ в замкнутом объеме принципиально не описывается волновой функцией или матрицей плотности с фиксированным числом частиц.

Применим выражение (33) к случаю, когда газ, находящийся в основном состоянии, возбужден с образованием  $n_q$  квазичастиц с импульсом  $q$ . Тогда число частиц с импульсами  $q$  и  $-q$  увеличивается:

$$N_q = v_q^2 + u_q^2 n_q, \quad N_{-q} = v_q^2 + v_q^2 n_q.$$

Такое возбуждение недавно было реализовано, соответствующее увеличение частиц с противоположными импульсами было измерено и, тем самым, экспериментально доказана реальность боголюбовского преобразования.

### А3. ЭНЕРГИЯ И ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ.

Из теории Боголюбова следует, что в неидеальном газе при нулевой температуре небольшая часть ( $\sqrt{n_0 a^3}$ ) частиц имеет отличные от нуля импульсы. Поэтому при вычислении полной энергии и построении полной функции основного состояния газа следует учесть вклад надконденсатных частиц.

В гамильтониане системы (1) члены второго порядка по операторам  $\hat{a}_k(t)$  равны

$$\hat{H} = \sum_{k \neq 0} [\xi_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2V} U_0 \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_k \hat{a}_{-k} + \frac{1}{2V} U_0 \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_k^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0], \quad (40)$$

Мы будем пренебрегать членом четвертого порядка  $\sum_{k_i \neq 0} \frac{1}{2V} U_0 \hat{a}_{k_1}^+ \hat{a}_{k_2}^+ \hat{a}_{k_3} \hat{a}_{k_4}$ , который при  $T \ll T_c$  не играет роли.

Полагая, что конденсат находится в когерентном состоянии, заменим оператор  $\hat{a}_0$  на  $\sqrt{N_0}$  и учтем (17). Тогда гамильтониан (40) принимает форму

$$\hat{H} = \sum_{k \neq 0} [\xi_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \frac{1}{2} \mu \hat{a}_k \hat{a}_{-k} + \frac{1}{2} \mu \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_k^+]. \quad (41)$$

Выражение (41) после подстановки (23), (24) принимает диагональную форму

$$\hat{H} = E_1 + \hat{H}_b \quad (42)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} (\epsilon_k - \xi_k), \quad \hat{H}_b = \sum_{k \neq 0} \epsilon_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \quad (43)$$

Заметим, что определение коэффициентов боголюбовского преобразования путем непосредственной диагонализации квадратичной формы (41) является более утомительным способом, чем метод диагонализации линейного уравнения (22).

Гамильтониан  $\hat{H}_b$  описывает суммарную энергию возбуждений. Величина  $E_1$  есть энергия надконденсатных частиц при нулевой температуре. Если обрезать ее на импульсах порядка  $\sqrt{m\mu}$ , она равна небольшой отрицательной величине порядка  $-(a^3 N_0 / V)^{1/2} E_{00}$ . При больших импульсах энергия  $E_1$  расходится. Эта расходимость ликвидируется уточнением выражения для  $U_0$  во втором порядке теории возмущений (Хуанг, Янг, Ли, 1957). В результате полная энергия основного состояния газа равна

$$E_0 = \frac{2\pi \hbar^2 a N^2}{mV} \left[ 1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right].$$

Волновая функция основного состояния газа с учетом частиц с ненулевым импульсом должна содержать нулевое число квазичастиц, и удовлетворять при всех  $k \neq 0$  уравнению

$$\hat{b}_k |\Psi_0\rangle = 0. \quad (44)$$

Волновая функция основного состояния газа имеет очень интересную структуру (Хуанг)

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{k>0} Q_k |\Psi_{00}\rangle, \quad (45)$$

$$Q_k = \sum_{j=0} B_k A_k^j \frac{1}{j!} (\hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+)^j \quad (46)$$

$$A_k = -\frac{\xi_k - \epsilon_k}{\mu}, \quad B_k = 1/\sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\xi_k}{\epsilon_k} + 1 \right)} \quad (47)$$

Здесь  $|\Psi_{00}\rangle$  - вектор состояния конденсата частиц с нулевым импульсом.

Согласно выражению (46) в основном состоянии  $|\Psi_0\rangle$  частицы разбиваются на пары с противоположными импульсами, которые группируются в квазикогерентные состояния, аналогичные (11).

Из (42) и (44) следует, что  $|\Psi_0\rangle$  есть точное решение ур-ия Шредингера

$$\hat{H} |\Psi_0\rangle = E_1 |\Psi_0\rangle \quad (48)$$

Теперь рассмотрим неоднородные состояния конденсата.

#### 4.4. СОЛИТОНЫ И СТАЦИОНАРНЫЙ ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА.

Уравнение (13) кроме тривиального однородного решения (14) имеет точное решение Захарова-Шабата в форме плоской уединенной бегущей волны (кинк или солитон)

$$\Psi(t, x) = \sqrt{n_c} [\sin \theta \tanh(\sin \theta (x - vt) / \lambda) + i \cos \theta], \quad (49)$$

где  $v$  - скорость солитона, которая всегда меньше скорости звука  $c$ ,  $\cos \theta = v/c$ ,  $\lambda = \hbar/\sqrt{m\mu}$  - корреляционная длина,  $n_c = \mu/U_0$  - плотность вдали от



центра. Покоющийся солитон

$$\Psi(t, x) = \sqrt{n_c} \tanh(x/\lambda) \quad (50)$$

имеет толщину  $2\lambda$ , а плотность газа в начале координат обращается в нуль. Длина солитона и плотность газа в центре с увеличением его скорости растут

$$L = \frac{2\lambda}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad |\Psi(t, vt)|^2 = n_c (v/c)^2.$$

Обратим внимание, что вдали от центра движущегося солитона газ неподвижен.

$$\Psi(t, x) = \sqrt{n_c} [\pm \sin \theta - i \cos \theta] = -i\sqrt{n_c} \exp(\pm i\theta), \quad x = \pm \infty$$

и имеет разность фаз

$$\delta\varphi = 2\theta, \quad 0 < \delta\varphi < \pi$$

В работе Хакима /1998/ солитонная функция (в другой форме) была использована при решении задачи о движении одномерной примеси в среде, описываемой нелинейным уравнением Шредингера. Результаты этой работы можно применить для построения модели стационарного эффекта Джозефсона в бозе-газе.

Уравнение Гросса-Питаевского инвариантно относительно перехода в движущуюся систему координат, если кроме преобразования пространственных координат  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$ , произвести калибровочное преобразование

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{i\varphi(t, \vec{r})} \tilde{\Psi}(t, \vec{r}'),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{mv^2}{2\hbar}, \quad \nabla' \varphi = \frac{m\vec{v}}{\hbar}.$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi(t, \vec{r}) + U_0 \Psi^*(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) - \mu \Psi(t, \vec{r}). \quad (51)$$

Это позволяет из (49) найти вид неподвижного солитона в поле конденсата, который движется со скоростью  $v$ . Такой солитон описывается функцией

$$\Psi(t, x) = e^{i\varphi(t, x)} \sqrt{n_c} \{ \sin \theta \tanh[\sin \theta (x + b)] - i \cos \theta \}, \quad (52)$$

$$\varphi(t, x) = \frac{mv}{\hbar} x - \frac{mv^2}{2\hbar} t + \varphi_0, \quad (53)$$

$$\Psi(t, x \rightarrow \pm\infty) = -i\sqrt{n_c} \exp(\pm i\theta) \exp i\varphi(t, x). \quad (54)$$

Прямой проверкой можно убедиться, что (31) удовлетворяет уравнению Гросса питаевского (13).

Вводим бесконечно узкий барьер, неподвижный относительно солитона  $V(x) = g\delta(x)$ . Решение задачи о туннелировании сверхтекучего потока сквозь этот барьер дается функциями, которые слева и справа от барьера имеют вид (52) и отличаются друг от друга только значениями фаз  $\varphi_0$  и положениями центров солитонов. Разные значения  $\cos \theta$  справа и слева невозможны, поскольку справа и слева поток частиц должен быть одинаковым. При  $x > 0$  будем использовать (52), (53), а при  $x < 0$  - функцию

$$\Psi(t, x) = e^{i\varphi(t, x)} \sqrt{n_c} \{ \sin \theta \tanh(\sin \theta (x - b)) - i \cos \theta \}. \quad (55)$$

$$\varphi(t, x) = \frac{mv}{\hbar} x - \frac{mv^2}{2\hbar} t + \varphi_-, \quad (56)$$

$$\Psi(t, x \rightarrow -\infty) = -i \exp(-i\theta) \sqrt{n_c} \exp\left(i \left( \frac{mv}{\hbar} x - \frac{mv^2}{2\hbar} t + \varphi_- \right)\right) \quad (57)$$

На больших расстояниях от начала координат фазы функции имеют вид слева  $(-\frac{1}{2}\pi + \frac{mv}{\hbar} x - \frac{mv^2}{2\hbar} t + \varphi_- - \theta)$  и справа  $(-\frac{1}{2}\pi + \frac{mv}{\hbar} x - \frac{mv^2}{2\hbar} t + \varphi_0 + \theta)$ . Следовательно, асимптотический скачок фазы, обусловленный барьером, характеризуется величиной  $\delta\varphi = 2\theta + \varphi_0 - \varphi_-$ .

На дельтаобразном потенциале функции непрерывны, а их логарифмические производные претерпевают скачок

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(t, +0) &= \bar{\Psi}(t, -0) \\ \frac{\partial}{\partial x'} \bar{\Psi}(t, +0) - \frac{\partial}{\partial x'} \bar{\Psi}(t, -0) &= 2g \end{aligned}$$

Отсюда находим уравнения, задающие величину параметра  $b$  и разность фаз

$$\exp(i\varphi_0)\{A \sin \theta - i \cos \theta\} = \exp(i\varphi_-)\{-A \sin \theta - i \cos \theta\}$$

$$\frac{(1 - A^2) \sin^2 \theta}{\{A \sin \theta - i \cos \theta\}} - \frac{(1 - A^2) \sin^2 \theta}{\{-A \sin \theta - i \cos \theta\}} = 2g, \quad A = \tanh[b \sin \theta]$$

Приведем эти уравнения к виду

$$\frac{A(1 - A^2) \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} = g, \quad \sin(\varphi_0 - \varphi_-) = -\frac{2A \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} \quad (58)$$

В случае высокого барьера ( $g \gg 1, A \ll 1, \cos \theta \ll 1, 2\theta = \pi - 2v/c$ ) эти уравнения принимают вид

$$g = \frac{A}{v^2 + A^2}, \quad \sin(\varphi_0 - \varphi_-) = -gv.$$

Первое равенство имеет решение только при  $v \leq v = c/2g$ . Последнее равенство

можно выразить через скачок фазы (за вычетом  $m v x / \hbar$ ) на больших расстояниях от барьера

$$v = v_c \sin \delta\varphi.$$

Мы видим, что при туннелировании конденсата через высокий барьер сверхтекучий поток связан с максимальным потоком, зависящим от высоты барьера, соотношением того же вида, что и в стационарном эффекте Джозефсона в сверхпроводниках.

#### А5. РЕШЕТОЧНЫЙ ГАЗ.

Недавно появилось новое направление исследований бозе-конденсата в ловушках. Газ помещается в поле стоячей волны лазера, которая образуют периодическую потенциальную решетку. У частиц в решетке квантовым числом является не импульс, а квазиимпульс, и конденсат в решетке принимает ряд новых своеобразных свойств. Чтобы определить, в каком

состоянии находился газ в решетке, был выполнен эксперимент (Педри и др., 2001) по разлету частиц газа после выключения потенциала. На эксперименте в каждой ячейке находилось около 100 частиц, а число ячеек - 200.

Рассмотрим простую модель волновой функции конденсата  $\Psi$  в одномерном периодическом потенциале в сигарообразной ловушке конечной длины  $L$ .

В этой модели функция  $\Psi$  имеет вид блоховской волны, модулированной огибающей функцией Гаусса

$$\Psi(x, t) \sim (1 + 2 \cos Bx) \exp(-x^2/4L^2), B = 2\pi/d \quad (59)$$

Зависимость волновой функции  $\Psi$  от расстояния до оси  $x$  выписывать не будем.

Чтобы понять, результат эксперимента, найдем вид этой функции в импульсном пространстве с точностью до нормировки

$$\begin{aligned} \psi_0(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/4L^2) e^{-ipx} (1 + e^{iBx} + e^{-iBx}) = \\ &= e^{-p^2 L^2} + e^{-(p-B)^2 L^2} + e^{-(p+B)^2 L^2} \end{aligned}$$

Функция имеет вид трех узких пиков: первый расположен в начале координат, а два других в точках обратных векторов решетки  $\pm B$ .

В ходе мгновенного снятия потенциала в момент времени  $t = 0$  каждая частица не успевает изменить свой импульс, и  $[\psi(p)]_{t=0} = \psi_0(p)$ . Пренебрегая взаимодействием частиц в процессе разлета, можно считать, что частицы разлетаются как свободные частицы с сохранением импульса, и написать волновую функцию частиц в реальном пространстве в момент времени  $0 <$

$t \ll mL^2$  в виде функции  $\psi_0(p)$ , умноженной на бегущую волну:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \psi_0(p) e^{ipx - i\frac{1}{2m}p^2 t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx - i\frac{1}{2m}p^2 t} \left( e^{-p^2 L^2} + e^{-(p-B)^2 L^2} + e^{-(p+B)^2 L^2} \right) \sim \\ &\sim \exp(-x^2/4L^2) + e^{iBx - i\frac{1}{2m}B^2 t} \exp\left(-\left(x - \frac{B}{m}t\right)^2/4L^2\right) + \\ &+ e^{-iBx - i\frac{1}{2m}B^2 t} \exp\left(-\left(x + \frac{B}{m}t\right)^2/4L^2\right) \end{aligned} \quad (60)$$

Вклад от  $p \simeq 0$  состоит из неподвижных частиц и остается около начала координат. Частицы с  $p \simeq \pm B$  разлетаются со скоростями  $\pm B/m$ . Такой распад частиц на три облака наблюдался на эксперименте. Это - прямое доказательство существования единой когерентной волновой функции бозе-конденсата. Легко понять, что состояние в решетке, в котором волновые функции конденсата в соседних ячейках имеют случайную разность фаз, после снятия удерживающего потенциала приводит к одному облаку около начала координат, поскольку для образования волновой функции с векторами обратной решетки должно существовать туннелирование конденсата между ячейками с сохранением общей фазы, как у (59).

#### А6. ПРЯМОЕ НАБЛЮДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ БОГОЛЮБОВСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Метод разлета решеточного газа недавно (Вогелс и др., 2002) был использован для прямого наблюдения коэффициентов боголюбовского преобразования.

Применим выражение (33)

$$N_k = \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle = v_k^2 + u_k^2 \langle \hat{b}_k^+ \hat{b}_k \rangle + v_k^2 \langle \hat{b}_{-k}^+ \hat{b}_{-k} \rangle. \quad (61)$$

к случаю, когда газ, находящийся в основном состоянии в решетке, возбужден с образованием  $n_q$  квазичастиц с импульсом  $q$ . Тогда число частиц с

импульсами  $q$  и  $-q$  увеличивается:

$$N_q = v_q^2 + u_q^2 n_q, \quad N_{-q} = v_q^2 + v_q^2 n_q.$$

Такое возбуждение недавно было реализовано. В результате около частиц с нулевым импульсом появляются два сателлита, которые, после выключения ловушечного поля, разлетаются со скоростями  $\pm q/m$ . Кроме того, около частиц с импульсами  $p \simeq \pm B$  возникают две пары сателлитов с импульсами  $p' \simeq \pm B \pm q$ . Измерение интенсивностей этих шести сателлитов явилось наглядной демонстрацией преобразования Боголюбова.

#### VI УРАВНЕНИЕ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО ДЛЯ ГАЗА В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТОМАСА-ФЕРМИ.

Бозе-конденсат экспериментально исследуют в магнитных ловушках. Введем в уравнение Гросса-Питаевского (13) член с внешним потенциалом  $V(\mathbf{r})$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{r}) = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu \right) \Psi(t, \vec{r}) + U_0 \Psi^+(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}). \quad (62)$$

Для определенности, будем считать, что ловушка имеет форму сигары длины  $L$ , потенциал которой имеет цилиндрическую симметрию с параболической зависимостью от расстояния до оси цилиндра

$$V(\rho) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \rho^2. \quad (63)$$

Рассмотрим свойства основного состояния газа в ловушке. Оно описывается стационарным решением уравнения (62)

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \mu \right) \Psi_0 + U_0 \Psi_0^* \Psi_0 \Psi_0 = 0. \quad (64)$$

Если частота ловушки достаточно велика, то потенциал (63) играет определяющую роль, и в первом приближении в уравнении (64) можно

отбросить нелинейный член. Уравнение принимает вид обычного уравнения Шредингера для двумерного осциллятора, решение которого имеет вид

$$\Psi_0(\rho) = \sqrt{n} e^{-\rho^2/2R_0^2}, \quad R_0^2 = \hbar/m\omega_0.$$

В этом разделе  $n$  есть плотность частиц на оси цилиндра. При этом химический потенциал имеет смысл энергии нулевых колебаний

$$\mu = \hbar\omega_0. \quad (65)$$

Это приближение справедливо, когда последний член (64) мал по сравнению с  $\mu\Psi_0$

$$U_0 n \ll \hbar\omega_0. \quad (66)$$

В противоположном пределе большой плотности можно в (64) пренебречь кинетической энергией и получить

$$\Psi_0(\rho) = \sqrt{\frac{1}{U_0}(\mu - \frac{1}{2}m\omega_0^2\rho^2)} = \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}, \quad n = \frac{\mu}{U_0}. \quad (67)$$

В этом приближении, называемом приближением Томаса-Ферми, плотность газа на оси ловушки связана с химическим потенциалом формулой

$$\mu = U_0 n. \quad (68)$$

Газ в ловушке имеет вид газового шнура, радиус которого равен

$$R^2 = 2\mu/m\omega_0^2. \quad (69)$$

Волновой функции (67) отвечает кинетическая энергия порядка величины  $\hbar^2/mR^2$ , и последняя мала по сравнению с  $\mu$  при условии малости корреляционной длины по сравнению с размером системы

$$\lambda = \hbar(m\mu)^{-1/2} \ll R. \quad (70)$$

## В2. "ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ" БОЗЕ-ГАЗА ПРИ НУЛЕВОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ. ВОЗБУЖДЕНИЯ КОНДЕНСАТА В ЛОВУШКАХ.

Еще раз обсудим роль волновой функции конденсата. Нелинейное уравнение Шредингера (62) для волновой функции бозе-конденсата в ловушке, кроме стационарного решения  $\Psi_0(\rho)$ , имеет неоднородные нестационарные решения  $\Psi(t, \vec{r}) = \Psi_0(\rho) + \Psi_1(t, \vec{r})$ , отвечающие эволюции конденсата без потери когерентности. При выводе спектра боголюбовских возбуждений мы не использовали коммутационные свойства оператора  $\Psi_1(t, \vec{r})$ . Поэтому решение линеаризованного уравнения Шредингера для классической функции  $\Psi_1(t, \vec{r})$  снова приводит к звуковому спектру, но теперь он описывает не энергию квантовых квазичастиц, а спектр колебаний конденсата, описываемого классическим комплексным полем. Это означает, что многие свойства возбуждений бозе-газа можно понять, не переходя к вторичному квантованию, подобно тому как о квантовой природе колебаний в твердом теле вспоминают только при рассмотрении элементарных процессов с участием фононов. В частности, интенсивность генерации возбуждений движущейся тяжелой частицей можно вычислить, как мы уже обсуждали в первой части лекции, не только из квантомеханической вероятности излучения фононов, но и, по аналогии с черенковским излучением, как излучение классического поля - колебаний волновой функции конденсата. Подчеркнем, что при рассмотрении нестационарных состояний бозе-газа, фактически, используется обобщенное понимание бозе-конденсата. Теперь это не совокупность частиц с нулевым импульсом или в основном состоянии осциллятора, а когерентное состояние из макроскопического числа частиц, образующих единое целое, и описание индивидуального движения каждой частицы теряет смысл.

Подставим в уравнение (62) волновую функцию конденсата в форме



$\Psi = \sqrt{n}e^{i\varphi}$ , и получим выражение, мнимая часть которого дает уравнение непрерывности конденсата

$$\frac{\partial}{\partial t}n = -\nabla \vec{j}, \quad (71)$$

где

$$\vec{j} = n\vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi.$$

Действительная часть дает

$$-\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n} + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\varphi)^2 + U_0n + V(r) - \mu.$$

Отсюда с помощью операции  $\nabla$  находим точное уравнение движения сверхтекучей жидкости

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left[\frac{mv^2}{2} + U_0n + V(r) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}}\nabla^2\sqrt{n}\right] = 0. \quad (72)$$

Для описания волн, длина которых много больше корреляционной длины  $\lambda = \hbar/\sqrt{m\mu}$ , последним членом можно пренебречь, и описывать волны уравнением

$$m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left[\frac{mv^2}{2} + U_0n + V(r)\right] = 0. \quad (73)$$

Это уравнение не содержит явно постоянной Планка, и имеет вид феноменологического уравнения для скорости сверхтекучей компоненты ((139.6) ГИДРОДИНАМИКА). При этом роль локального химического потенциала  $\tilde{\mu}$  играет выражение

$$\tilde{\mu}(r, t) = U_0n(r, t). \quad (74)$$

Применим уравнения (71), (73), чтобы определить спектр длинноволновых колебаний конденсата в цилиндрической ловушке ( $L \gg R$ ). Для этого линеаризуем уравнения (71), (73) с учетом (67):

$$\frac{\partial}{\partial t}n_1 = -\nabla(n_0\vec{v}), \quad m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + U_0\nabla n_1 = 0, \quad n_0 = n\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \quad (75)$$

Исключая скорость, получаем, следуя Зарембе (1998)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} n_1 = \nabla (c^2(\rho) \nabla n_1), \quad c^2(\rho) = \frac{\mu}{m} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

Для волны, не зависящей от азимутального угла ( $n_1 \sim y(\rho) \exp(ikz - i\omega t)$ ) имеем

$$-\omega^2 y = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [c^2(\rho) \rho \frac{dy}{d\rho}] - k^2 c^2(\rho) y \quad (76)$$

В длинноволновом пределе нижняя ветвь возбуждений эквивалентна продольному сдвигу газа как целого. Энергия такого возбуждения, очевидно, стремится при  $k \rightarrow 0$  к нулю. Это означает, что нижняя продольная ветвь возбуждений является безщелевой. При малом продольном волновом векторе она имеет характер звукового спектра со скоростью звука

$$c = \frac{1}{2} \omega_0 R = \sqrt{\frac{\mu}{2m}}. \quad (77)$$

Эта скорость в  $\sqrt{2}$  раз меньше гидродинамической скорости звука.

Остальные ветви описывают моды с колебаниями поперечного радиуса газового облака. Характерное расстояние между этими модами задается спектром двумерного осциллятора.

Анализ Зарембы привел к набору мод

$$\omega^2 = \omega_0^2 [2q(q+1) + \frac{1}{4} (kR)^2 + (k^4)], \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (78)$$

### ВЗ. ОСЦИЛЛЯЦИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ.

Новые возможности демонстрации свойств сверхтекучего газа возникают, когда частота параболического потенциала  $\omega(t)$  магнитной ловушки зависит от времени. Это приводит к осцилляциям конденсата как целого, которые, как показано ниже, описываются преобразованиями подобия. При этом локальная скорость газа  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  в некоторых точках и некоторые моменты времени может стать большей локальной скорости звука  $c(\vec{r}, t)$ . При наличии

внешнего неподвижного возмущения, такого как лазерный луч, это может привести к диссипации и затуханию осцилляций.

Рассмотрим бозе-газ в цилиндрической ловушке с переменной частотой параболического поперечного потенциала.

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(t)r^2 - \mu\right]\Psi + U_0\Psi^+\Psi\Psi, \quad (79)$$

$$(\hbar = 1, \vec{r} = (r, \varphi, z).)$$

Следуя работе Кагана и др. (1996) проведем преобразование подобия, выявляющее внутреннюю симметрию газа:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{b}\chi(\rho, \tau, \varphi, z) \exp[i\Phi], \quad \rho = r/b. \quad (80)$$

Подставим это выражение в (79) и выберем параметры этого преобразования  $b, \Phi$  таким образом, чтобы уравнение для оператора поля  $\chi$  в сопутствующей системе координат  $\{\rho, \tau\}$  приобрело вид:

$$i\frac{\partial\chi}{\partial\tau} = \left[-\frac{1}{2m}\nabla_\rho^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\rho^2 - \mu\right]\chi + U\chi^+\chi\chi - \frac{1}{2m}b^2\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}, \quad (81)$$

Для этого необходимо положить

$$\Phi = r^2\frac{1}{2b}\frac{db}{dt}, \quad b^2\frac{d\tau}{dt} = 1, \quad \frac{d^2b}{dt^2} + \omega^2(t)b = \omega_0^2b^{-3}. \quad (82)$$

Вид  $\Phi(r, t)$  сокращает члены, содержащие  $\nabla_\rho\chi$ , параметр растяжения  $b(t)$  и ход собственного времени  $\tau(t)$  связаны с лабораторным временем так, что потенциальная энергия и энергия взаимодействия атомов не зависят от времени. Благодаря каноническому преобразованию (80), (82), все члены уравнения (81), кроме последнего, от времени не зависят. Отсюда следует важный вывод: состояние газа, однородное относительно продольной оси в переменных  $\{\rho, \tau\}$  стационарно, а в лабораторной системе координат осциллирует неограниченно долго. Только учет состояний, неоднородных

вдоль оси  $z$ , может дать описание затухания когерентных колебаний. Подчеркнем, что скейлинговое преобразование (80) играет гораздо большую роль, чем способ получения осциллирующего состояния конденсата, в которое система переходит из начального основного состояния. Оно позволяет описывать эволюцию произвольного состояния газа в ловушке с переменной частотой с помощью уравнения (2) с постоянной частотой. Замечательно, что это относится не только к когерентной квазиклассической части волновой функции газа, но и к ее операторной части, которая описывает элементарные возбуждения газа. Единственное, но существенное ограничение - потенциал ловушки должен обладать цилиндрической симметрией и иметь параболическую зависимость от  $r$ .

Будем считать, что в начальный момент времени частота  $\omega(t)$  мгновенно уменьшается от  $\omega_0$  до  $\omega_1$ . Тогда до начала встряхивания  $b = 1$ . При  $t > 0$  имеем

$$b^2 = \frac{1}{2} (\beta^2 + 1) (1 - g \cos 2\omega_1 t) = \frac{2}{\beta^{-2} + 1} (1 + g \cos 2\omega_0 \tau)^{-1}, \quad (83)$$

где  $\beta = \omega_0/\omega_1 > 1$ ,  $g = (\beta^2 - 1) / (\beta^2 + 1)$ . Отсюда

$$b \frac{db}{dt} = \frac{1}{2} \omega_1 (\beta^2 - 1) \sin 2\omega_1 t, \quad b^{-1} \frac{db^{-1}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \omega_0 (1 - \beta^{-2}) \sin 2\omega_0 \tau, \quad (84)$$

$$\frac{db^{-1}}{d\tau} = \pm \frac{\omega_0}{b} \sqrt{(b^2 - 1)(1 - b^2 \beta^{-2})}. \quad (85)$$

Пусть при отрицательных временах, предшествующих переходу параметра ловушки  $\omega(t)$  от  $\omega_0$  к  $\omega_1$ , газ имел нулевую температуру, т.е. находился в основном конденсатном состоянии, однородном вдоль оси  $z$ . В соответствии с уравнением (81), при положительных временах в переменных  $(\rho\tau)$  это состояние сохраняется

$$n(\rho) = \chi_0^2 \cong n(0) \left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right) \theta \left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right), \quad n(0) = \frac{\mu}{U_0} \quad R_0^2 = \frac{2\mu}{m\omega_0^2} \quad (86)$$

причем параметр  $\mu$  приобретает смысл исходного химического потенциала.

Существенно, что в лабораторной системе координат конденсатная волновая функция  $\chi_0$  явно зависит от времени и осциллирует с частотой  $2\omega_1$ :

$$\chi_0(r, t) = \sqrt{n(0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2(t)}\right)}, \quad R(t) = b(t)R_0 \quad (87)$$

Следовательно, при положительных временах газ находится в сильно возбужденном состоянии, энергия которого в  $\beta$  раз больше энергии основного состояния в ловушке с частотой потенциала  $\omega_1$ .

Заметим, что в случае  $\beta - 1 \ll 1$  осцилляции конденсата можно интерпретировать как крупномасштабную звуковую волну (с частотой  $2\omega_1$ ) на фоне неподвижного конденсата.

#### В4. ИЗЛУЧЕНИЕ БОГОЛЮБОВСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ГАЗЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ СТАТИЧЕСКИМ ДЕФЕКТОМ.

Описанные выше осцилляции конденсата в магнитной ловушке не затухают, что является одним из доказательств сверхтекучести системы. Нетривиальной проблемой становится нахождение механизма релаксации конденсата при нулевой температуре, когда нет тепловых возбуждений, которые могли бы стать источником диссипации.

В настоящем разделе в качестве механизма релаксации осциллирующего конденсата рассмотрим спонтанное излучение поперечных фононов, возникающее при взаимодействии газа с продольным лазерным лучом, который в поперечном сечении выглядит как точечный статический дефект (Каган, Максимов, 2000).

Удобнее задачу рассматривать в системе координат  $K_*$ , в которой газ покоится, а дефект ( $\vec{\rho}_d(\tau) = \vec{r}_d/b(\tau)$ ) движется со скоростью (см. (85))

$$\vec{V} = \frac{d\vec{\rho}_d}{d\tau} = \frac{db^{-1}}{d\tau} \vec{r}_d = \pm \vec{r}_d \frac{\omega_0}{b} \sqrt{(b^2 - 1)(1 - b^2\beta^{-2})} \quad (88)$$

Эта скорость может оказаться большей локальной скорости звука около дефекта

$$c(\vec{\rho}_d) = c_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}\right)^{1/2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{\mu}{m}}, \quad (89)$$

и, согласно критерию Ландау, газ становится неустойчивым относительно спонтанного излучения фононов. Обратим внимание, что у края ловушки скорость звука  $c$  стремится к нулю.

Для решения поставленной задачи можно выбрать один из двух подходов: либо вычислить с помощью золотого правила Ферми интенсивность испускания фононов, либо оценить энергетические потери частицы из-за трения в поляризованном дефектом квазиклассическом поле конденсата., аналогичные потерям релятивистской заряженной частицы при черенковском излучении классического электромагнитного поля в конденсированной среде. Оба подхода должны привести к одинаковым результатам.

В первую очередь разовьем квантовомеханический подход. Задача имеет чисто двумерный характер и описывается операторной формой уравнения (81), в которой отброшен последний член, поскольку рассматриваются состояния, однородные относительно продольной оси.

Линеаризуем это уравнение относительно возмущения  $\hat{\chi}' = \hat{\chi} - \chi_0$

$$i \frac{\partial \hat{\chi}'}{\partial \tau} = \left[ \frac{1}{2} (m\omega_0^2 \rho^2) \hat{\chi}' - \frac{1}{2m} \nabla_{\rho}^2 \hat{\chi}' - \mu \hat{\chi}' + 2U_0 \chi_0^2 \hat{\chi}' + U_0 \hat{\chi}'^+ \chi_0^2 \right]. \quad (90)$$

С учетом (86) уравнение можно переписать в форме

$$i \frac{\partial \hat{\chi}'}{\partial \tau} = -\frac{1}{2m} \nabla_{\rho}^2 \hat{\chi}' + g[\hat{\chi}' + \hat{\chi}'^+], \quad (91)$$

где введено специальное обозначения для локальной энергии взаимодействия возбуждений с конденсатом

$$g(\rho) = U_0 \chi_0^2 = \mu (1 - \rho^2 R_0^{-2}). \quad (92)$$

Как мы увидим ниже, основной вклад в интенсивность излучения вносят возбуждения, которые имеют малую длину волны по сравнению с размером области конденсации бозе-газа:

$$\bar{k} \approx mc_0, \quad \bar{k}R_0 \approx \mu/\omega_0 \gg 1. \quad (93)$$

Это оправдывает применимость локального приближения, в котором координатная зависимость энергии (92) учитывается только параметрически. Тогда элементарные возбуждения описываются обычной теорией однородного слабонеидеального газа.

Оператор поперечных возбуждений  $\hat{\chi}'(\vec{\rho}, \tau)$  раскладывается на элементарные операторы поглощения  $b_k$  и рождения  $b_{-k}^+$  фононов

$$\hat{\chi}'(\rho, \tau) = \sum_k \chi_k \hat{a}_k(\tau), \quad \chi_k(\vec{\rho}) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi R_0^2 L}} e^{i\vec{k}\vec{\rho}}, \quad (94)$$

$$\hat{a}_k = u_k \hat{b}_k e^{-i\epsilon_k \tau} - v_k \hat{b}_{-k}^+ e^{i\epsilon_k \tau}. \quad (95)$$

Энергия возбуждений и коэффициенты канонического преобразования равны

$$\epsilon_k = \sqrt{\eta_k^2 - g^2} = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{k^4}{4m^2}}, \quad \eta_k = \frac{k^2}{2m} + g, \\ c^2 = \frac{g}{m} = c_0^2 (1 - \rho^2 R_0^{-2}) \quad (96)$$

$$u = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\epsilon} + 1 \right)}, \quad v = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\epsilon} - 1 \right)}, \quad (u - v)^2 = \frac{k^2}{2m\epsilon}. \quad (97)$$

Теперь дополним исходное уравнение (91) потенциалом взаимодействия газа с дефектом  $B_d(\vec{r} - \vec{r}_d, t)$ , радиус действия которого мал по сравнению с радиусом ловушки  $d \ll R_0$ .

Будем предполагать изменение функции конденсата  $\chi_0$  в поле дефекта малым. Это позволяет рассматривать процесс генерации фононов в борновском приближении. На последнем этапе борновскую амплитуду следует заменить на эффективную амплитуду генерации, которая должна учитывать все соответствующие графики техники Беляева.

Уравнение (91) принимает вид

$$i \frac{\partial \hat{\chi}'}{\partial \tau} = -\frac{1}{2m} \nabla_{\rho}^2 \hat{\chi}' + g(\vec{\rho}) (\hat{\chi}' + \hat{\chi}'^+) + b^2 B_d (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) \chi_0(\vec{\rho}). \quad (98)$$

Множитель  $b^2$  возникает из-за перехода к новому времени согласно (82).

Уравнению (98) соответствует гамильтониан

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_d, \\ H_0 &= L \int d^2 \rho \left[ \frac{1}{2m} \nabla_{\rho} \hat{\chi}'^+ \nabla_{\rho} \hat{\chi}' + \frac{1}{2} g(\hat{\chi}' \hat{\chi}' + \hat{\chi}'^+ \hat{\chi}'^+) \right] = \sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^+ \hat{b}_{\mathbf{k}}, \\ H_d &= L \int d^2 \rho [\chi_0(\vec{\rho}) \theta(\tau) b^2 B_d (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) \hat{\chi}'(\vec{\rho}) + h.c.]. \end{aligned} \quad (99)$$

Имея ввиду локальный характер потенциала, вынесем  $\chi_0(\vec{\rho})$  из-под знака интеграла и используем разложение (94)

$$H_d = \sqrt{\frac{L}{\pi R_0^2}} \chi_0(\vec{r}_d/b) \sum_{\mathbf{k}} [B_{\mathbf{k}/b} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+) e^{i\vec{k}\vec{r}_d/b} + h.c.]. \quad (100)$$

Здесь использовано соотношение

$$\int d^2 \rho b^2 B_d (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) \chi_{\mathbf{k}}(\vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{\pi R_0^2 L}} \int d^2 \tau B_d(\vec{\tau} - \vec{r}_d) e^{i\vec{k}\vec{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi R_0^2 L}} B_{\mathbf{k}/b} e^{i\vec{k}\vec{r}_d/b}$$

Затем проведем каноническое преобразование (95)

$$H_d = 2 \sqrt{\frac{L}{\pi R_0^2}} \chi_0(\vec{r}_d/b) \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}/b} (u_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}) \left( \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}} \tau} + \hat{b}_{-\mathbf{k}}^+ e^{i\epsilon_{\mathbf{k}} \tau} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}_d/b}. \quad (101)$$

Из-за неоднородности параметра (92), который определяет свойства элементарных возбуждений (96), (97), и осциллирующего характера параметра  $b$  (см.(83)) в общем виде получить выражение для генерации фонона не удастся. Для вычисления генерации фонона с частотой порядка  $\mu$  имеет смысл зафиксировать некоторый момент  $\tau_0$  и рассмотреть эту генерацию в течение промежутка времени

$$1/\mu \ll \delta\tau \ll 1/\omega_0. \quad (102)$$



В течение этого времени дефект движется в системе  $K_*$  приблизительно равномерно со скоростью (см. (88)).

С учетом этого обстоятельства получаем

$$e^{i\vec{k}\vec{r}_d/b(\tau)} \simeq e^{i\vec{k}\vec{r}_d/b(\tau_0)} e^{i\vec{k}\vec{V}\tau'}, \quad \tau' = \tau - \tau_0. \quad (103)$$

В результате зависимость фазы от времени в гамильтониане возмущений (101) принимает стандартный вид, и можно применить золотое правило Ферми, согласно которому вероятность в единицу времени рождения одного фонона с импульсом  $\vec{k}$  равна

$$W_k = 2\pi \left| \langle \vec{k} | H_k | 0 \rangle \right|^2 \delta(\epsilon_k - \vec{k}\vec{V}), \quad (104)$$

$$H_k = 2\sqrt{\frac{L}{\pi R_0^2}} B_{k/b} \chi_0(\vec{r}_d/b(\tau_0)) (u_k - v_k) \hat{b}_k^\dagger + h.c. \quad (105)$$

Здесь под знаком дельта-функции выражен закон сохранения энергии - изменение энергии  $\vec{k}\vec{V}$  дефекта в результате излучения фонона равно энергии фонона  $\epsilon_k$ .

Далее оценим интенсивность излучения энергии:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\tau &= \sum_k W_k \epsilon_k = \\ &= \int \frac{(\pi R_0^2) d^2k}{(2\pi)^2} 2\pi \left| 2\sqrt{\frac{L}{\pi R_0^2}} B_{k/b} \chi_0(\vec{r}_d/b(\tau_0)) (u_k - v_k) \right|^2 \delta(\epsilon_k - \vec{k}\vec{V}) \epsilon_k \end{aligned}$$

С учетом (97) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\tau &= \frac{L\chi_0^2}{\pi m} J \\ J &= \int d^2k |B_{k/b}|^2 k^2 \delta(\epsilon_k - \vec{k}\vec{V}) \end{aligned} \quad (106)$$

В первую очередь возьмем интеграл по направлениям излучения

$$\int d\varphi \delta(kV \cos \varphi - \epsilon_k) = \frac{2\theta(1 - c_k/V)}{kV \sqrt{1 - (c_k/V)^2}},$$

где

$$c_k = \varepsilon_k/k = \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4m^2}}. \quad (107)$$

Тогда

$$J = \int |B_{k/b}|^2 k^3 dk \frac{2\theta(1 - c_k/V)}{kV\sqrt{1 - (c_k/V)^2}}. \quad (108)$$

Как и должно быть, ответ отличен от нуля, только при тех значениях  $k$ , при которых скорость дефекта (88) больше фазовой скорости фонона  $c_k$ . Наименьшая фазовая скорость - у звуковых фононов. Дефект генерирует такие фононы, когда больше нуля разность

$$V^2 - c^2 = c_0^2 \Delta^2, \quad (109)$$

$$\Delta^2 = b^{-2} [2z^2 (b^2 - 1) (1 - b^2 \beta^{-2}) - b^2 + z^2] \theta (b^2 - z^2) \quad (110)$$

Здесь учтено, что  $R_0 = \sqrt{2}c_0/\omega_0$  и введено обозначение  $z = r_d/R_0$ . Это условие можно переписать в форме неравенства

$$\frac{b^2}{2(b^2 - 1)(1 - b^2 \beta^{-2}) + 1} < z^2 < b^2 \quad (111)$$

Левая часть неравенства в точке  $b = 1$  равна 1, в точке  $b = \beta$  имеет максимальное значение  $\beta^2$ , а в точке  $b_\beta = 2^{-1/4} \beta^{1/2}$  принимает минимальное значение  $z_\beta^2 = 0.5\beta^2 (\beta^2 - \sqrt{2}\beta + 1)^{-1} < 1$ .

Из этого следует, что генерации нет, когда дефект находится достаточно близко от оси ловушки, где мала скорость дефекта. Наоборот, если дефект попадает в область внешней границы газа, где скорость звука мала, а скорость дефекта максимальна, неизбежно возникает "черенковское излучение" фононов.

Пусть в начальный момент времени дефект находился вне ловушки, но находится внутри газа в момент его наибольшего расширения, когда  $b = \beta$  и в системе  $K_*$  дефект приближается на наименьшее расстояние от центра. Тогда  $1 < z < \beta$ , и согласно (111) газ часть времени во время каждого полупериода излучает. См. ниже (118), (119).

Если дефект с самого начала находился внутри ловушки, то большую часть времени генерация невозможна, и только в моменты времени, когда расширение близко к  $b_\beta$ , возникает излучение, если  $z_\beta < z < 1$ .

Возьмем интеграл по величине волнового вектора.

Наибольший вклад в интенсивность излучения (108) дают фононы с максимально возможными волновыми векторами, которые ограничены сверху значением (см.107))

$$\bar{k} = 2m\sqrt{(V^2 - c^2)} = 2mc_0\Delta \quad (112)$$

Заметим, что характерная энергия генерируемых фононов имеет порядок величины

$$\varepsilon = \sqrt{c^2\bar{k}^2 + \frac{\bar{k}^4}{4m^2}} \simeq \mu\sqrt{\Delta^2 + \Delta^4} \quad (113)$$

(см. (96)). Это оправдывает принятое выше локальное приближение для описания поперечных возбуждений, если  $\Delta \gtrsim 1$ . Кроме того, это позволяет приближенно вынести из под знака интеграла фактор  $|B_k|^2$  и получить

$$J = 2 |B_{k/b}|^2 \int_0^{\bar{k}} dk \frac{k^2}{\sqrt{V^2 - c_k^2}} \quad (114)$$

Элементарное вычисление дает

$$J = \frac{2 |B_{k/b}|^2}{c_0\Delta} \int_0^{\bar{k}} k^2 dk \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\bar{k}^2}}} \quad (115)$$

$$= \frac{2 |B_{k/b}|^2 \bar{k}^3}{c_0\Delta} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi \bar{k}^3 |B_{k/b}|^2}{2c_0\Delta} \quad (116)$$

$$= 4\pi m^3 |B_{k/b}|^2 \Delta^2 \quad (117)$$

Подставляя это значение в (106) и используя зависимости (6) и (96), находим:

$$\dot{E}_\tau = 4L\nu_0\mu m |B_{\bar{k}/b}|^2 (1 - z^2/b^2) \Delta^2 \theta(\Delta^2) \quad (118)$$

Оценим интенсивность  $\delta E$  излучения за один период осцилляций газа в случае  $1 < z \ll \beta$ .

В отличие от (118), величина  $\delta E$  инвариантна относительно перехода от сопутствующей системы координат к лабораторной. Начинается излучение в момент  $\tau_1$  касания поверхности газа дефектом, когда  $b(\tau_1) = z$ , а кончается в момент  $\tau_2$ , когда  $b(\tau_2) \simeq \beta$ .

$$\delta E = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{E}_\tau \simeq 2 \int_z^\beta \frac{db}{|\frac{db}{d\tau}|} 4Ln_0\mu t |B_{\bar{k}/b}|^2 (1 - z^2/b^2) \Delta^2 \quad (119)$$

Подробно

$$\delta E = 2 \int_z^\beta \frac{db}{\omega_0 b \sqrt{(b^2 - 1)(1 - b^2\beta^{-2})}} 4Ln_0\mu t |B_{\bar{k}/b}|^2 \quad (120)$$

$$(1 - z^2/b^2) b^{-2} [2z^2 (b^2 - 1)(1 - b^2\beta^{-2}) - b^2 + z^2] \quad (121)$$

Определяющий вклад в интеграл дает начальный этап излучения, когда скорость  $V$  максимальна и, соответственно, имеет максимальное значение величина  $\Delta \simeq z$ . Отсюда получаем оценку интенсивности излучения за период

$$\delta E \simeq Ln_0\mu t |B_{\bar{k}/b}|^2 \frac{z}{\omega_0} \quad (122)$$

Интересно, что на пике генерации характерная энергия фононов имеет порядок величины (113)

$$\varepsilon \simeq \mu \sqrt{z^2 + z^4}$$

(Это объясняет, почему  $\delta E \simeq \mu z^2 I$ , где  $I$  - число фононов)

В случае, когда источником радиации является продольная трубка (луч лазера) малого сечения  $d \ll R_0$ , эффективная вершина 2D-возмущения равна

$$B_k = \frac{B_k^{(0)}}{1 + (mB_k^{(0)}/\pi) \ln(1/kd)} \simeq \frac{\pi}{m \ln(1/kd)}, \quad (123)$$

где  $B_k^{(0)}$  - компонента Фурье голого потенциала. Приведем оценку отношения интенсивности излучения к энергии осцилляций газа  $E_{osc}$ :

$$E_{osc} = E' - E_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta - 1}{\beta} \right)^2 E_0 \quad (124)$$

$$\frac{\delta E}{E_{osc}} = \frac{n_0 m |B_{\bar{k}/b}|^2 z a \omega_0}{\mu^2} \simeq \frac{z \omega_0}{\mu \ln^2 (b/\bar{k}d)}$$

Поскольку  $\omega_0 \ll \mu$ , то это отношение мало, и осцилляции затухнут только после большого числа периодов

### В5. ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим тот же процесс как "черенковское излучение" возбуждений классического бозе-поля. Заменяем операторную функцию в линеаризованном уравнении (98) на амплитуду классического поля

$$i \frac{\partial \chi'}{\partial \tau} = -\frac{1}{2m} \nabla_{\rho}^2 \chi' + g(\chi' + \chi'^*) + b^2 B_d (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) \chi_0 (r_d/b). \quad (125)$$

Для простоты, взаимодействие с 2D-дефектом будем описывать локальным потенциалом:

$$\begin{aligned} B_d (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) &= B_0 \delta (b\vec{\rho} - \vec{r}_d) = B_0 \frac{1}{b} \delta (\vec{\rho} - \vec{r}_d/b) \simeq \\ &\simeq B_0 \frac{1}{b} \delta (\vec{\rho} - \vec{r}_d/b(\tau_0) - \vec{V}\tau') \end{aligned} \quad (126)$$

(Опять рассматриваем излучение в окрестности некоторого момента  $\tau_0$ ). Для амплитуды с импульсом  $k$  имеем

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a_k}{\partial \tau} &= \eta_k a_k + g(\vec{\rho}) a_{-k}^* + A_k e^{-i\omega\tau' + \sigma\tau'}, \\ A_k &= \sqrt{\frac{L}{\pi R_0^2}} B_0 \chi_0 (r_d/b) e^{-i\vec{k}\vec{r}_d/b(\tau_0)}, \quad \omega = \vec{k}\vec{V} \end{aligned} \quad (127)$$

Здесь формально введено адиабатическое включение взаимодействия, чтобы автоматически получить правило обхода при вычислении излучения энергии в единицу времени. Ищем решение в виде

$$a_k = \bar{a}_k e^{-i\omega\tau' + s\tau'}, \bar{a}_{-k}^* = \bar{a}_{-k}^* e^{-i\omega\tau' + s\tau'}$$

$$(\omega + is - \eta)\bar{a}_k = g\bar{a}_{-k}^* + A_k$$

$$(-\omega - is - \eta)\bar{a}_{-k}^* = g\bar{a}_k + A_k$$

Отсюда

$$a_k = \frac{SA_k}{(\omega + is)^2 - \varepsilon^2} e^{-i\omega\tau' + s\tau'}, S = \omega + \frac{k^2}{2m}. \quad (128)$$

Квазиклассический аналог гамильтониана взаимодействия (99) равен

$$H_d = 2 \operatorname{Re} LB_0 [\chi_0(\vec{\rho}) \chi'(\vec{\rho})]_{\vec{\rho}=(\vec{r}_d/b)}. \quad (129)$$

Это выражение можно рассматривать как потенциал, действующий на дефект со стороны возмущенного дефектом конденсата. Этот потенциал создает силу трения

$$\vec{F} = - \left[ \frac{\partial_d}{\partial \vec{\rho}} \right]_{\vec{\rho}=(\vec{r}_d/b)}, \quad (130)$$

которая приводит к потерям энергии

$$\dot{E}_\tau = -\vec{V} \vec{F} = 2LB_0 \chi_0(\vec{\rho}) \operatorname{Re} \left[ \vec{V} \frac{\partial \chi'(\vec{\rho})}{\partial \vec{\rho}} \right]_{\vec{\rho}=(\vec{r}_d/b)}$$

(производной от  $\chi_0(\vec{\rho})$  можно пренебречь). Подставим в эту формулу, только что найденное выражение (128):

$$\dot{E}_\tau = 2LB_0 \chi_0(\vec{\rho}) \operatorname{Re} \sum_k \frac{i\vec{k}\vec{V}}{\sqrt{\pi R_0^2 L}} \left[ e^{i\vec{k}\vec{\rho}} \right]_{\vec{\rho}=(\vec{r}_d/b)} \frac{SA_k}{(\omega + is)^2 - \varepsilon^2} e^{-i\omega\tau' + s\tau'}$$

С учетом (103), (127) все фазы сокращаются, и возникает формула, аналогичная той, которая описывает электромагнитное излучение быстрой частицы в среде

$$\dot{E}_\tau = 2 |A_k|^2 \operatorname{Re} \sum_k \frac{i\omega S}{(\omega + is)^2 - \varepsilon^2}$$

Как и должно быть, интеграл в смысле главного значения вклада в потери не дает. Потери связаны с черенковскими полюсами

$$\omega = kV \cos \varphi = \varepsilon$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \dot{E}_\tau &= \pi |A_k|^2 \frac{\pi R_0^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk \int_0^{2\pi} d\varphi [\delta(kV \cos \varphi - \varepsilon) + \\ &\quad + \delta(kV \cos \varphi + \varepsilon)] (kV \cos \varphi + \frac{k^2}{2m}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{L}{m} (B_0 \chi_0 (r_d/b))^2 \int_0^{\frac{k}{V}} k^2 dk \frac{1}{\sqrt{V^2 - c_k^2}} \end{aligned} \quad (131)$$

Это выражение с точностью до численного множителя совпадает с квантовомеханической формулой (114).

## В6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС.

Оказывается, у газа в сигарообразной ловушке при нулевой температуре существует механизм распада осциллирующего конденсата даже в отсутствии внешних дефектов. Чтобы показать это, линеаризуем квазиклассическое уравнение (81)

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \left[ -\frac{1}{2m} \nabla_\rho^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \rho^2 - \mu \right] \chi + U \chi^+ \chi - \frac{1}{2m} b^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}, \quad (132)$$

относительно слабого отклонения функции  $\chi = \chi_0 + \chi'$  от конденсатного состояния  $\chi_0$ :

$$i \frac{\partial \chi'}{\partial \tau} = \left[ -\frac{1}{2m} \nabla_\rho^2 + G(\rho) \right] \chi' + G(\rho) \chi'^* - \frac{1}{2m} b^2 \frac{\partial^2 \chi'}{\partial z^2}, \quad G(\rho) = U_0 \chi_0^2(\rho) \quad (133)$$

Для поперечных мод в этом уравнении нет последнего члена с зависящим от времени коэффициентом, и его решения дают дискретный спектр с расстоянием между уровнями порядка  $\omega_0$  (см. (78)). При  $T \ll \omega_0$  самовозбуждение поперечных волн невозможно.

Продольная мода с волновым вектором  $k_z$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \chi'_{k_z}}{\partial \tau} = \bar{G}(\chi'_{k_z} - \chi'^{+}_{-k_z}) + \frac{1}{2m} b^2 k_z^2 \chi'_{k_z}, \quad (134)$$

в котором мы пренебрегаем зависимостью решения от радиуса  $\rho$  и заменяем эффективное поле  $G(\rho)$  на среднее  $\bar{G}$ . Роль осцилляций конденсата в системе координат  $(\rho, \tau)$  сводится к колебаниям эффективной продольной массы ( $m^* = mb^{-2}(\tau)$ ).

Искомый механизмом распада конденсата является параметрический резонанс, обусловленный колебаниями эффективной продольной массы. Этот резонанс приводит к генерации безщелевых продольных возбуждений.

Разложим продольное поле на действительную и мнимую части:

$$\chi'_{k_z} = f + iF, \quad (135)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2m} b^2 k_z^2 F, \quad -\frac{\partial F}{\partial \tau} = \left( \frac{1}{2m} b^2 k_z^2 + 2\bar{G} \right) f, \quad (136)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{2m}{b^2 k_z^2} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = \left( \frac{1}{2m} b^2 k_z^2 + 2\bar{G} \right) f. \quad (137)$$

Для малых волновых векторов имеем

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{b^2} \frac{\partial f}{\partial \tau} \right) = \Omega^2 f, \quad \Omega = ck_z, \quad c = \sqrt{\frac{\bar{G}}{m}}. \quad (138)$$

Это уравнение удобно анализировать в смешанной системе координат  $\{\rho, t\}$ .

Поскольку

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_\rho = b^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_\rho,$$

то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Omega^2(t) f = 0, \quad \Omega(t) = c(t) k, \quad c(t) = \frac{\bar{c}}{b(t)}. \quad (139)$$

Это есть классическая форма уравнения параметрического резонанса (см. напр. МЕХАНИКА)

Ограничимся случаем малого изменения радиуса ловушки. Из формулы (83) получаем



$$b^{-2} = 1 + g \cos 2\omega_1 t, \quad g \approx \beta - 1 \ll 1. \quad (140)$$

В этом приближении уравнение (139) имеет вид уравнения Матье:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega^2 (1 + g \cos 2\omega_1 t) f = 0. \quad (141)$$

Ищем решение этого уравнения в форме

$$f = a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t, \quad a \sim b \sim e^{st}. \quad (142)$$

Подставляя эту формулу в уравнение Матье, находим показатель роста амплитуды:

$$s = \left[ \left( \frac{1}{4} g \omega_0 \right)^2 - (\omega - \omega_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (143)$$

Таким образом, параметрический резонанс реализуется в полосе ширины

$$\delta\omega = \tau_1^{-1} = \frac{1}{2} g \omega_1, \quad (144)$$

причем в центре резонанса

$$\omega = c k_z = \omega_1,$$

инкремент роста равен

$$s = \frac{1}{4} g \omega_1. \quad (145)$$

Заметим, что волновой вектор принимает близкие, но дискретные значения  $k_z = (2\pi/L) * number$ . Поэтому, для того чтобы хотя бы одно значение энергии фонона  $ck_z$  попало внутрь резонансной полосы, расстояние между уровнями  $\delta(ck_z) = (2\pi c/L)$  должно быть меньше ширины полосы (145). Для этого необходимо выполнение неравенства

$$(4\pi c/g\omega_1) < L. \quad (146)$$

Параметрический резонанс развивается с момента  $t = 0$  и только в том случае, когда с самого начала имеется ненулевая амплитуда продольной

волны. При конечной температуре - это амплитуда тепловых колебаний. При нулевой температуре, строго говоря, необходимо квантовомеханическое рассмотрение начального этапа, вычисляя интенсивность генерации продольных пар возбуждений с импульсами  $k_x$  и  $-k_x$ . Однако, к тому же результату приводит квазиклассическое описание процесса, если в качестве начального условия принять нулевые продольные колебания.

Благодаря параметрическому резонансу амплитуда продольной волны, принадлежащая резонансной полосе (143), растет как  $\exp(st)$ , а энергия, переходящая от конденсата в продольные возбуждения, равна

$$E(t) \simeq \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k (e^{2st} - 1) \theta \left( \frac{1}{2} \delta \omega - |\omega_k - \omega_1| \right). \quad (147)$$

Если неравенство (146) выполняется с большим запасом, то сумму можно заменить на интеграл и получить

$$E(t) = \frac{gL\hbar\omega_1^2}{16\pi\bar{c}} J(t), \quad J(t) = \int_{-1}^1 dx \left( \exp \left[ \frac{t}{t_1} \sqrt{1-x^2} \right] - 1 \right). \quad (148)$$

При быстром уменьшении частоты ловушки от  $\omega_0$  до  $\omega_1$  конфигурация конденсата не успевает измениться, и энергия конденсата падает от значения  $E_0 = \frac{2}{3} \mu N_0$  до

$$E' = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} + 1 \right) E_0.$$

Вычитая из этой энергии энергию основного состояния, отвечающего конечной частоте  $E_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} E_0$ , получаем начальную энергию осцилляций конденсата

$$E_c = E' - E_1 = \frac{1}{2} g^2 E_0. \quad (149)$$

Таким образом, затухание осцилляций конденсата описывается отношением

$$\frac{E(t)}{E_c} = \frac{3a\omega_0}{4\pi g\bar{c}} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^3 J(t) \simeq \frac{a}{gR_0} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^3 J(t).$$

При малых временах  $J(t) \simeq t/t_1$ , ( $t_1 = 2/g\omega_0$ ) это отношение равно

$$\frac{E(t)}{E_c} \simeq \frac{3}{16} \frac{a\omega_0^2}{\bar{c}} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^3 t. \quad (150)$$

Когда  $t \gg t_1$ , демпинг растет экспоненциально

$$\frac{E(t)}{E_c} \simeq \frac{3}{2\pi} \frac{a}{gR_0} \left( \frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^3 \left( \frac{2\pi t_1}{t} \right)^{1/2} \exp \frac{t}{t_1}. \quad (151)$$

Из этой формулы следует, что время затухания осцилляций конденсата с логарифмической точностью равно

$$t_* = \frac{2}{g\omega_1} \ln \left\{ \frac{gR_0}{a} \left( \frac{\mu}{\hbar\omega_0} \right)^3 \left( \frac{t_*}{2\pi t_1} \right)^{1/2} \right\}. \quad (152)$$

Переход энергии осцилляций конденсата в некогерентные продольные возбуждения приводит к нагреванию газа. Однако энергия (149) в пересчете на одну частицу, равная  $\frac{1}{3}g^2\mu$ , много меньше температуры бозе-конденсации  $T_c$ , и тепловой эффект мал ( $E_c/T_c N_0 \simeq g^2(a\pi^{1/3}) \ll 1$ ).

Таким образом, совокупность свойств бозе-газа в ловушке доказывает, что при температуре, близкой к нулю, газ частиц эквивалентен классическому нелинейному комплексному полю. Бозе-конденсат по своей природе аналогичен полю лазера, а тепловые надконденсатные частицы напоминают кванты черного излучения. И те, и другие описываются распределением Планка-Бозе-Эйнштейна с нулевым химическим потенциалом.

# МОДЕЛИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Ю. В. Копаев

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

## I. Введение.

Высокотемпературные сверхпроводники на основе купратов обладают целым рядом особенностей как в сверхпроводящем, так и в нормальном состояниях:

- 1) высокая критическая температура  $T_C$  сверхпроводящего перехода;
- 2) d-типа симметрия сверхпроводящего параметра порядка  $\Delta$  и слабая чувствительность к рассеянию на немагнитных примесях;
- 3) особенности фазовой диаграммы: близость антиферромагнитного и сверхпроводящего состояний и существование последнего в ограниченном с обеих сторон интервале по концентрации носителей (рис.1), существование псевдощелевого состояния при  $T > T_C$  в недодопированной области;
- 4) «нарушение» оптического правила сумм;
- 5) «пик - провал - горб» (peak - dip - hump) структура в спектрах фотоэмиссии с угловым разрешением (ARPES) и в туннельных характеристиках;
- 6) статическая и динамическая структура страйпов и её связь со сверхпроводимостью;
- 7) особенности в спектрах неупругого рассеяния нейтронов при  $T < T_C$ ;
- 8) отличие концентрации сверхтекучей компоненты от полной концентрации носителей;
- 9) большое отношение  $2\Delta(T=0)/T_C$  в области слабого допирования (underdoped);
- 10) аномальные температурные и частотные зависимости диагонального и холловского сопротивлений.

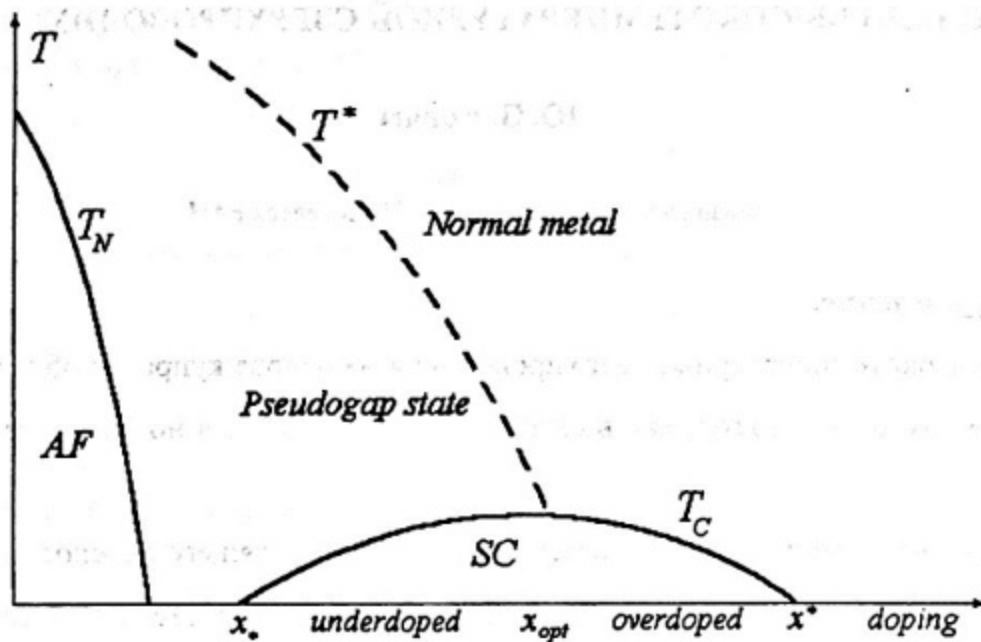


Рис.1. Фазовая диаграмма (температура - уровень допирования) - типичная для дырочно-легированных высокотемпературных купратов.

Нет сомнения, что большинство из этих особенностей связано с проявлением межэлектронных корреляций не только сверхпроводящей природы, о чём, в частности, говорит близость на фазовой диаграмме (рис.1) сверхпроводящего (SC) и антиферромагнитного (AF) упорядочений и проявление ближнего AF порядка в SC области.

## II. Особенности ферми-контура (FC) дырочных купратов.

Как и в большинстве твёрдых тел в купратах нет малого параметра для их последовательного теоретического описания, поскольку кинетическая и потенциальная энергии взаимодействия частиц одного порядка.

Поэтому желателен согласованный подход с противоположных сторон - сильного взаимодействия (когда энергия взаимодействия двух частиц на одном центре больше ширины разрешённой зоны - модель Хаббарда) и со стороны слабого взаимодействия (зонное описание как нулевое приближение).

Антиферромагнитное состояние при слабом взаимодействии (волна спиновой плотности - ВСП) возможно при наличии «нестинга» у FC (совмещение отдельных участков FC при смещении на некоторый импульс Q).

Приблизительно такая форма (квадрат с закруглёнными углами) наблюдается по спектрам фотоэмиссии (ARPES) для всех дырочнолегированных купратов [1].

Возможность существенного повышения величины  $T_C$  за счёт взаимного влияния диэлектрических (антиферромагнитных за счёт ВСП (SDW) или структурных за счёт волн зарядовой плотности ВЗП (CDW)) и сверхпроводящих корреляций исследовалась задолго до обнаружения сверхпроводимости купратов [2].

В Хаббардовском пределе (исключающим существование двух частиц на одном центре) широко исследуемой является так называемая t-J модель. Контур Ферми дырок и их спектр возбуждения определяется, как и в зонной схеме, интегралами перескока на соседние центры с той разницей, что эти интегралы умножаются на концентрацию пустых мест (дырок) в конечном состоянии. Наблюдаемая форма контура Ферми (квадрат с закругленными углами - почти нестинг) теоретически получается при учете перескока электронов только между ближайшими соседями. Однако так полученный контур Ферми развернут на угол  $\pi/4$  относительно экспериментально наблюдаемого. Учёт перескока на ближайшие соседи, вообще говоря, нарушает условие нестинга. При определённом же соотношении между интегралами перескока на ближайшие и следующие соседи получается хорошее совпадение с экспериментом.

Этот разворот, характерный для дырочных купратов, приводит к двум важнейшим следствиям:

1. нестинг сохраняется в широком интервале дырочного легирования и быстро исчезает при электронном легировании
2. при увеличении концентрации дырок контур Ферми приближается к области «расширенных в линию» седловых точек (extended saddle points).

С точки зрения куперовского спаривания с нулевым суммарным импульсом [3] это может быть причиной более высокой критической температуры и ряда особенностей физических свойств из-за появления особенности в плотности состояний [4]. Более существенно эти два свойства проявляются при образовании дырочных пар с большим суммарным импульсом (см. ниже).

Это же свойство FC получается и в обобщенной  $t$ - $J$  модели.

### **III. Определяющие механизмы сверхпроводящего спаривания.**

Основные модели, развиваемые для объяснения свойств сверхпроводящих купратов, можно классифицировать по следующим признакам:

1. принимая за безусловный факт синглетное куперовское спаривание с  $d$ -типом симметрии параметра порядка, предлагаются различные механизмы притяжения, ответственные за такое спаривание:

а) типичный для обычных сверхпроводников фононный механизм [2,5]; основной трудностью при таком механизме является не столько получение достаточно высоких значений  $T_c$ , сколько обоснование  $d$ -типа спаривания. Существует надежда, что перенормировка электрон-фононного взаимодействия за счет сильных межэлектронных корреляций может привести к так называемому преимущественному рассеянию вперед (forward scattering), что и обеспечит устойчивость  $d$ -типа спаривания [6];

б) различные электронные механизмы притяжения, в том числе экситонный [2].

2. куперовское спаривание  $d$ -типа за счет отталкивательного взаимодействия; такой механизм спаривания с конечным угловым моментом впервые был рассмотрен ещё в работе [7]. В настоящее время наиболее продвинутой является теория спаривания за счет обмена спиновыми волнами. Это взаимодействие носит отталкивательный характер, а спаривание обусловлено тем, что взаимодействие такого типа из-за близости системы к антиферромагнитному упорядочению имеет максимум при передаваемом импульсе, соответствующим та-

кому упорядочению. А именно этот импульс соответствует рассеянию между участками FC, на которых сверхпроводящий параметр имеет разные знаки при d-типе спаривания [8].

3. спаривание происходит как при притягательном, так и при отталкивательном взаимодействии, если выигрыш в энергии при сверхпроводящем переходе происходит преимущественно за счет кинетической энергии. Отметим, что в модели БКШ [3] изменение в кинетической энергии соответствует проигрышу.

Существует несколько полуфеноменологических подходов такого типа:

а) в модели [9] предполагается понижение величины эффективной массы (выигрыш в кинетической энергии) при переходе в сверхпроводящее состояние. Наглядным примером такого типа является коррелированное движение двух дырок в антиферромагнитном состоянии. При движении одной дырки возникает нарушение спинового порядка, пропорциональное длине её траектории. Вторая же дырка восстанавливает антиферромагнитный порядок. Обычно при таком подходе не учитывается проигрыш в кинетической энергии относительного движения двух дырок.

б) из анализа спектров фотоэмиссии с угловым разрешением и частотной зависимости проводимости в работе [10] предложена собственно-энергетическая часть для сверхпроводящего состояния, соответствующая выигрышу в кинетической энергии. Более тонкий анализ сопоставления спектров фотоэмиссии по распределению импульсов электронов при фиксированной энергии и по распределению энергии при фиксированном импульсе [11] позволил более строго обосновать выбранную структуру собственно-энергетической части [10].

в) выигрыш в кинетической энергии происходит в результате туннелирования куперовской пары (внутренний эффект Джозефсона) между металлическими участками страйпов, разделенными антиферромагнитными частями



[12]. Такая структура либо в статическом, либо в динамическом режиме является характерной чертой дырочных купратов.

В эффекте Джозефсона вероятность туннелирования пары равна вероятности туннелирования одной частицы (а не квадрату вероятности, что было бы при некоррелированном движении двух частиц). В результате возникает выигрыш в кинетической энергии движения между страйпами при переходе системы в сверхпроводящее состояние. Этот выигрыш и является причиной сверхпроводящего перехода.

4. Сильные межэлектронные корреляции, ответственные за антиферромагнитное состояние при слабом дырочном легировании, могут при увеличении легирования в сторону сверхпроводящей области привести к другим нетривиальным состояниям. Последние могут быть причиной ряда наблюдаемых особенностей купратов. Широко обсуждается в связи с этим состояние с неоднородными спонтанными токами (*staggered current*), соответствующее орбитальному антиферромагнетизму [13].

В рамках зонной схемы с нестингом контура Ферми такое состояние ранее исследовалось в работах [14, 15, 16], а в рамках модели Хаббарда в работе [17].

Другое направление связано с исследованием влияния межэлектронных корреляций на разделение (*separation*) заряда и спина [18]. Сверхпроводящее состояние формируется уже на основе новых квазичастиц - заряженных бесспиновых бозонов (холонов) и нейтральных фермионов (спинов). Сверхпроводящему состоянию соответствует одновременная бозе-конденсация бозонов и аналога куперовских пар из спинов. Строгое доказательство такого разделения заряда и спина существует только для одномерного случая. Существует надежда, что в Хаббардовском случае сильных корреляций при отсутствии в теории малого параметра после преобразования гамильтониана, соответствующего одному из рассматриваемых ниже способов разделения заряда и спина, остаточное взаимодействие окажется слабым. Взаимодействие между бозонами будет соответствовать отталкиванию, необходимому для устойчивости бозе-

конденсации. Куперовское спаривание между спинонами будет обеспечено одним из вариантов куперовского спаривания между дырками. Остаточное взаимодействие между холонами и спинонами должно быть слабым для предотвращения их обратного связывания. Все отмеченные выше особенности контура Ферми соотносятся при таком подходе со спинонами.

Существует несколько моделей для описания разделения заряда и спина и различных типов упорядоченных состояний и фазовых переходов между ними:

а) простейшая модель  $U(1)$  симметрии [19] - электронный оператор уничтожения  $C_{\alpha i}$  на центре  $i$  со спином  $\alpha$  выражается как  $C_{\alpha i} = f_{\alpha i} b_i^+$  произведение оператора  $f_{\alpha i}$  уничтожения фермиона (спинона) и рождения бозона  $b_i^+$ . Новое состояние оказывается, к сожалению, с нарушенной трансляционной симметрией, а d-тип спаривания для спинонов оказывается неустойчивым.

б) модель  $SU(2)$  симметрии [20] устраняет отмеченные выше трудности модели  $U(1)$ . В этой модели вводятся два типа 1 и 2 спинонов и холонов, и оператор  $C_{\alpha i}$  выражается как

$$C_{\alpha i} = 1/\sqrt{2}(b_{1i}^+ f_{1i} + b_{2i}^+ f_{2i}^+)$$

В сверхпроводящем состоянии d-типа  $\langle b_1 \rangle \neq 0$ ,  $\langle b_2 \rangle = 0$ ,  $\langle f_{1i} f_{2j} - f_{2i} f_{1j} \rangle \neq 0$ .

в) калибровочная модель  $Z_2$  [21]; если на узле  $j$  ввести фазу  $\varphi_j$  куперовской пары, то оператор рождения бозона  $b_j^+ \equiv e^{i\varphi/2}$  соответствует «половине» куперовской пары; оператор рождения спинона  $f_{j\alpha}^+$  выражается следующим образом:

$$f_{j\alpha}^+ = b_j c_{j\alpha}^+$$

Отметим, что в стандартной теории БКШ возбуждения - боголобовские квази-частицы  $b_p$  с импульсом  $p$  являются линейными комбинациями электрона со спином  $\sigma$  и импульсом  $k$  и дырки со спином  $-\sigma$  и импульсом  $-k$  [22]

$$b_k = u(k) c_{k\sigma}^+ - v(k) c_{-k-\sigma}$$

При импульсе Ферми  $p_F$  коэффициенты  $u(k_F)$  и  $v(k_F)$  равны  $1/\sqrt{2}$ , т.е. заряд квазичастицы равен нулю. С этим связан ряд особенностей обычных сверхпроводников, в частности, так называемое андреевское отражение, соответствующее превращению электрона в дырку при рассеянии назад на границе нормального металла и сверхпроводника.

5. Спаривание с большим суммарным моментом. При отмеченных выше особенностях FC дырочных купратов амплитуда рассеяния двух дырок друг на друге, кроме особенности при нулевом суммарном импульсе пары, имеет особенность при суммарном импульсе  $K$  порядка удвоенного  $2k_F$  импульса Ферми [23]. При этом области  $\Xi_K$  внутри FC соответствует импульс  $K < 2k_F$ , а области  $\Xi_{K'}$  вне FC соответствует импульс  $K' > 2k_F$  (рис.2).

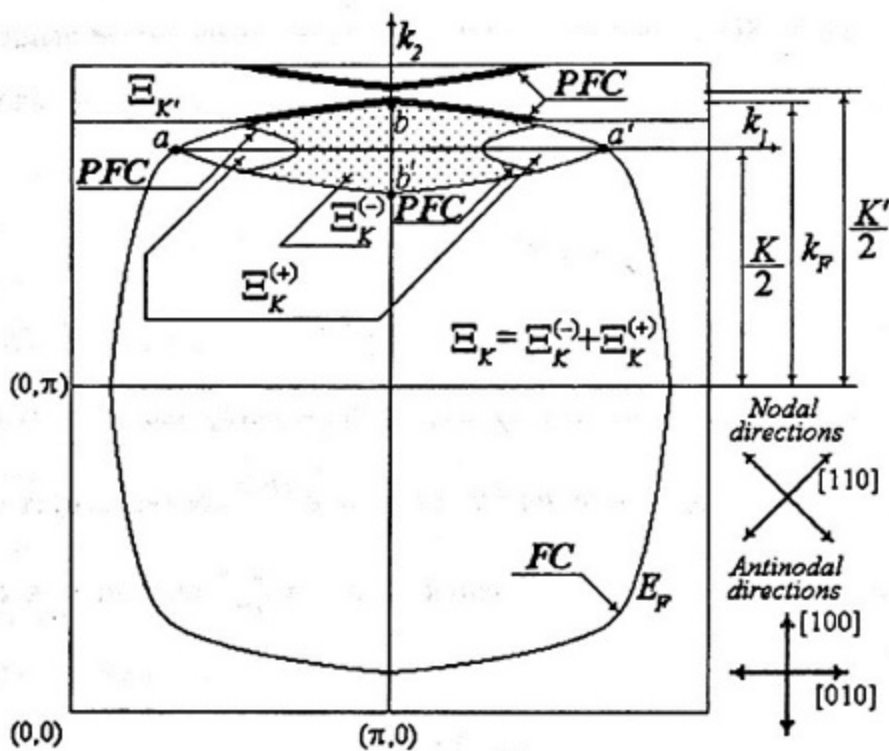


Рис.2. Типичный для дырочных купратов контур Ферми (FC) как квадрат с закругленными углами с энергией  $E_F$ , центрированный в точке  $(\pi, \pi)$  зоны Бриллюэна; линии, разделяющие области с положительной и отрицательной энергией относительного движения, образует парный контур Ферми (PFC).

Таким образом, отсутствует электрон-дырочная симметрия (при куперовском спаривании суммарному нулевому импульсу соответствуют состояния как внутри, так и вне FC).

В амплитуде рассеяния имеются особенности как при притягательном, так и при отталкивательном знаке потенциала (рис.3). При этом эффективное взаимодействие пропорционально соответствующим площадям  $\Xi_K$  или  $\Xi_{K'}$ .

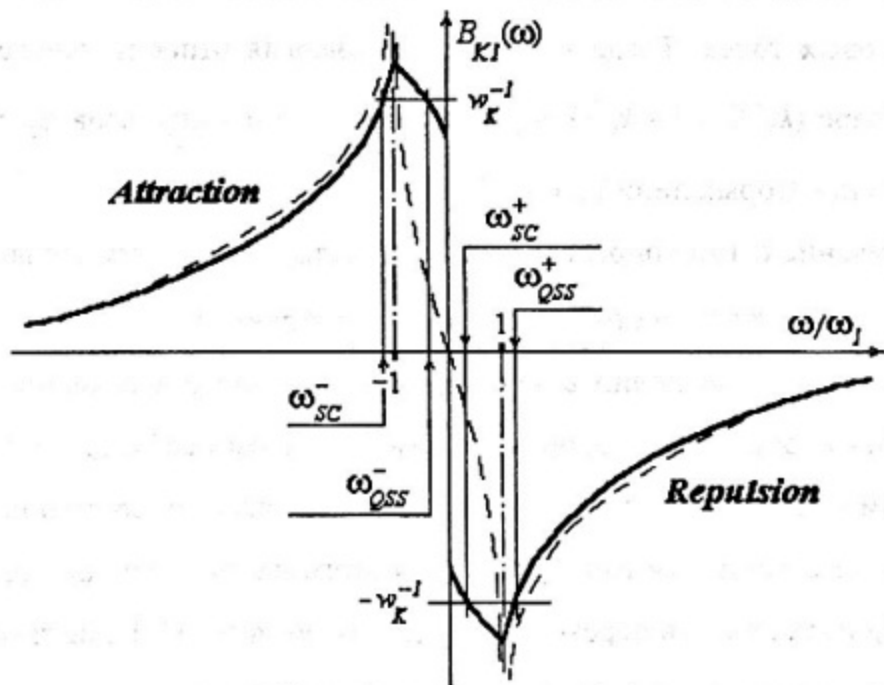


Рис.3. Зависимость действительной части  $B_{KI}(\omega)$  амплитуды рассеяния пары дырок с суммарным импульсом  $K$  от энергии  $\omega$  для случаев притяжения (верхняя часть) и отталкивания (нижняя часть) между дырками; точки пересечения кривой  $B_{KI}$  с горизонтальными линиями, обозначающими обратную величину эффективного взаимодействия  $\omega_K^{-1}$ , соответствуют стационарным ( $\omega_{QSS}^{-,+}$ ) состояниям и сверхпроводящей неустойчивости ( $\omega_{SC}^{-,+}$ ).

Наблюдаемым особенностям дырочных купратов соответствует ситуация с отталкивательным взаимодействием. Один из полюсов на рис.3 ( $\omega_{QSS}^+$ ) соответ-

ствуется стационарному состоянию и качественно описывает псевдощелевую область на фазовой диаграмме (рис.1). Второй полюс ( $\omega_{SC}^+$ ) имеет мнимую часть, соответствующую сверхпроводящей неустойчивости [24]. Качественно частотный ход амплитуды рассеяния (рис.3) совпадает с таковым для феноменологически введённой [10] собственно-энергетической части. Для появления этих решений кроме условий приближительного нестинга, обеспечивающего конечные дозволённые области  $\Xi_K$  и  $\Xi_{K'}$ , существенным является близость FC к «линии» седловых точек. Тогда кинетическая энергия относительного движения частиц в паре ( $k_x^2/2m_x - k_y^2/2|m_y|$ ) с компонентами импульсов  $k_x$  и  $k_y$  имеет нуль вдоль некоторых линий (гиперболическая метрика).

Спаривание d-типа определяется соответствующим суммированием по эквивалентным  $K$  или  $K'$  состояниям [23]. Для устранения указанной неустойчивости необходимо выполнить перестройку основного состояния соответствующим боголюбковским преобразованием. При этом необходимо, чтобы пары с заданным импульсом  $K$  могли рассеиваться из занятых состояний в свободные с тем же суммарным импульсом. Для этого часть дырочных состояний из области  $\Xi_K$  должна быть переведена в область  $\Xi_{K'}$  вне FC. Если такое перераспределение в импульсном пространстве соответствует перераспределению в обычном пространстве (возникновение статических или динамических страйпов), то проигрыш в кинетической энергии может быть компенсирован выигрышем в антиферромагнитной части за счет уменьшения в этой части концентрации дырок [25,26]. Сверхпроводящее спаривание происходит вдоль возникающих таким образом в областях  $\Xi_K$  или  $\Xi_{K'}$  границ, разделяющих заполненными дырками или электронами состояния от соответствующих пустых. Таким образом возникают линии «парного» контура Ферми PFS (рис.2), разделяющего области  $\Xi_K$  и  $\Xi_{K'}$  на части с положительной  $\Xi_K^{(+)}$  и  $\Xi_{K'}^{(+)}$  и отрицательной  $\Xi_K^{(-)}$  и  $\Xi_{K'}^{(-)}$  энергиями относительного движения. Однородного (независящего от относительного импульса) решения сверхпроводящего параметра порядка

$\Delta(K)=\text{const}$  при отталкивательном взаимодействии не существует. Однако существует решение для параметра  $\Delta$ , изменяющегося по модулю и по знаку от  $\Delta_+$  к  $\Delta_-$  при переходе через парный контур Ферми. Такое решение существует потому, что интенсивность рассеяния пары с заданным импульсом  $K$  из области  $\Xi_K^{(+)}$  в область  $\Xi_K^{(-)}$  пропорциональна площади  $\Xi_K = \Xi_K^{(+)} + \Xi_K^{(-)}$ , а рассеяния внутри  $\Xi_K^{(+)}$  и  $\Xi_K^{(-)}$  пропорционально этим площадям.

Для контуров Ферми с различными знаками кривизны на разных их участках или для многосвязных контуров области  $\Xi_K$  и  $\Xi_{K'}$  могут и без образования страйпов содержать одновременно заполненные и незаполненные участки. Тогда линии PFC будут представлять часть контура Ферми. Подобная структура FC наблюдалась недавно в работе [27].

Отличительной от модели БКШ [3] особенностью рассматриваемого типа спаривания является наличие линейного по параметру  $\Delta$  слагаемого в химическом потенциале и в выражении для энергии конденсации [25,26]. Причина такого сдвига обусловлена тем, что размытие фермиевской ступени на PFC при возникновении неодинаковых параметров  $\Delta_+$  и  $|\Delta_-|$  требует сдвига химпотенциала для равенства числа частиц, выходящих за контур Ферми, числу освобождающихся мест внутри контура Ферми (рис.4). Этот линейный сдвиг характеризует существенное проявление спаривания в широкой по сравнению с  $\Delta$  (в отличие от модели БКШ [3]) области и объясняет наблюдаемое «нарушение» оптического правила сумм [28]. Это и является причиной выигрыша в энергии конденсации за счет кинетической энергии.

#### IV. Симметричное описание фазовой диаграммы.

Для понимания природы сверхпроводящего состояния купратов полезным является описание их свойств с симметричной точки зрения независимо от конкретной модели.

В работе [29] предложена теория SO (5) симметрии, в которой вводится 5 компонент параметра порядка - 2 компоненты (действительная и мнимая части)

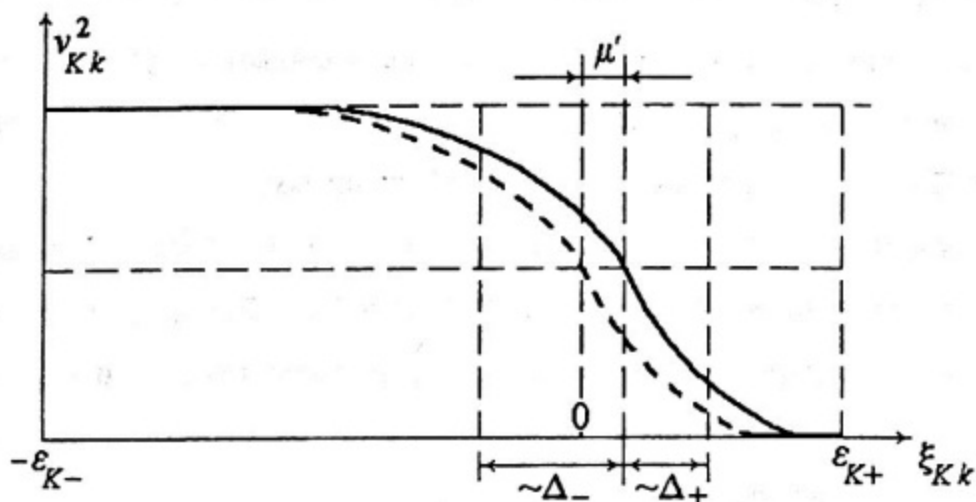


Рис.4. Функция распределения дырок  $v_{Kk}^2$  в сверхпроводящем состоянии вблизи парного контура Ферми (PFC) в зависимости от энергии относительного движения  $\xi_{Kk}$ ; сплошная кривая с учетом сдвига  $\mu'$  уровня Ферми, пунктирная - без учета.

сверхпроводящего и 3 компоненты антиферромагнитного порядков. Нарушение SO(5) симметрии соответствует фазовым переходам в сверхпроводящее, антиферромагнитное и смешанное состояния. Принципиально новым моментом явилось введение динамической степени свободы, соответствующей коллективной триплетной моде ( $\pi$ -мода), перепутывающей сверхпроводящие и антиферромагнитные компоненты. Наблюдаемый в ряде дырочных купратов резонанс в неупругом рассеянии нейтронов объясняется в работе [30] проявлением смягчения этой  $\pi$ -моды.

Рассмотренная выше модель с большим суммарным импульсом пары в синглетном состоянии соответствует смягчению до нуля при импульсе  $K$  синглетной  $\pi$ -моды в точке  $T_C$ . При этом предполагалось, что частота триплетной  $\pi$ -моды остается конечной. Существование рассмотренного выше сверхпроводя-

шего параметра порядка, не включенного в группу  $SO(5)$ , допускается в рамках более общей группы  $SU(4)$  [31].

На возможность существования решений с большим суммарным импульсом пары в модели Хаббарда было указано в работе [32]. Возможность реализации такого состояния в качестве основного для одномерного случая в работе [33] исследована численно при учете перескока между центрами пары носителей.

### Литература

- [1] Z.X.Shen, W.E.Spicer, D.M.King, D.S.Dessau, B.O.Wells, *Science*, 267,343, (1995).
- [2] «Проблема высокотемпературной сверхпроводимости» (под ред. В.Л. Гинзбурга и Д.А. Киржница. М.Наука 1977 (англ.перевод High-Temperature Superconductivity (Eds. V.L. Ginzburg, D.A. Kirzhnits, New York: Consultant Bureau, 1982).
- [3] J.Bardeen, L.N.Cooper, J.R.Schrieffer, *Phys.Rev.*, 108, 1175 (1957).
- [4] A.A.Abrikosov, *Physica C* 341-348, 97 (2000).
- [5] Е.Г.Максимов, *УФН*, 170, 1033 (2000).
- [6] G.Varelogiannis, *Phys.Rev.B* 57, 13743 (1998).
- [7] А.И.Ахиезер, И.Л.Померанчук, *ЖЭТФ*, 36,. 856 (1959).
- [8] P.Monthoux, D.Pines, *Phys.Rev.B* 47, 6069 (1993).
- [9] J.E.Hirsch, *Phys.Rev.B* 62, 14487,14498 (2000).
- [10] M.R.Norman, M.Randeria, B.Janko, J.C.Campuzano, *Phys.Rev.B* 61, 14742 (2000).
- [11] M.R.Norman, M.Eschrig, A.Kaminski, J.C.Campuzano, *Phys.Rev.B* 64, 184508 (2001).
- [12] V.J.Emery, S.A.Kivelson, *Nature (London)* 374,434 (1995).



- [13] S.Chakravarty, R.B.Laughlin, D.K.Morr, C.Nayak, Phys.Rev. B 63, 094503 (2001).
- [14] B.I.Halperin, T.M.Pice, Solid State Physics, 21, 115 (1968).
- [15] B.A.Volkov, A.A.Gorbatsevich, Yu.V.Kopaev, V.V.Tugushev, JETP, 81, 726, (1981).
- [16] V.L.Ginzburg, A.A.Gorbatsevich, Yu.V.Kopaev, B.A.Volkov, Solid State Commun. 50, 339, (1984).
- [17] I.Afflec, J.B.Marston, Phys.Rev. B 37, 3774 (1988).
- [18] P.W.Anderson, The theory of Superconductivity in the high- $T_c$  Cuprates (Princeton University Press, Princeton, 1997).
- [19] H.Dingetal, Nature (London), 382, 51 (1996).
- [20] P.A.Lee, N.Nagaosa, T.K.Ng, X.G.Wen, Phys. Rev. B 57, 6003 (1998).
- [21] N.Senthil, M.P.A.Fisher, Phys.Rev. B 62, 7850 (2000).
- [22] Н.Н.Боголюбов, ЖЭТФ, 34, 58 (1958).
- [23] В.И.Белявский, В.В.Капаев, Ю.В.Копаев, ЖЭТФ, 91, 817 (2000)  
V.I.Belyavsky, V.V.Kapaev, Yu.V.Kopaev, Physica C, 341-348,185 (2000).
- [24] В.И.Белявский, Ю.В.Копаев, Письма в ЖЭТФ, 72, 734 (2000).
- [25] V.I.Belyavsky, Yu.V.Kopaev, Phys. Lett. A287, 152 (2001)
- [26] В.И.Белявский, Ю.В.Копаев, ЖЭТФ, 94 150 (2002)
- [27] P.V.Bogdanov, A.Lanzara, X.J.Zhou, S.A.Kellar, D.L.Feng, E.D.Lu, H.Eisaki, J.I.Shimoyama, K.Kishio, Z.Hussain, Z.X.Shen, Phys. Rev. B 64, 180505 (2001).
- [28] D.N.Basov, S.I.Woods, A.S.Katz et al, Science, 283, 49 (1999).
- [29] S.C.Zhang, Science, 275, 1089 (1997).
- [30] J.P.Hu, S.C.Zhang, Phys. Rev. B 64, 100502 (2001).
- [31] M.Guidry, L.A.Wu, Y.Sun, C.L.Wu, Phys. Rev. B 63, 134516 (2001).
- [32] C.N.Yang, Phys. Rev. Lett, 63, 2144 (1989).
- [33] G.I.Japaridze, dry, A.P.Kampf, M.Sekania, P.Kakashvili, Ph.Brune, Phys. Rev. B 65, 0145188 (2002).

# ИССЛЕДОВАНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ НАНООБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ СКАНИРУЮЩЕГО ОПТИЧЕСКОГО МИКРОСКОПА БЛИЖНЕГО ПОЛЯ

А. Г. Витухновский

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

## Введение

Одним из наиболее современных методов, позволяющих производить исследования морфологии и локальных физических свойств поверхности твердого тела и структур на этой поверхности со сверхвысоким пространственным разрешением, является сканирующая зондовая микроскопия, отмеченная в 1986г. нобелевской премией (G. Binnig, H. Rohrer). Этот метод включает в себя, в частности, сканирующую туннельную микроскопию/спектроскопию (STM) [1], атомно-силовую микроскопию (AFM) [2] и сканирующую оптическую микроскопию ближнего поля (NSOM) [3, 4, 5].

NSOM является в настоящее время интенсивно развивающимся методом изучения оптических свойств субмикро- и наноструктур со сверхвысоким пространственным разрешением, который позволяет получать информацию о различных (в том числе спектральных и поляризационных) оптических свойствах объектов с разрешением, значительно превышающим дифракционный предел, т.е. много меньшим, чем длина волны оптического излучения.

Еще в середине прошлого века классическая микроскопия и спектроскопия достигла дифракционного предела разрешения. Но только в 1984г. Д. Поль (D. W. Pohl) [4] базируясь на идеях туннельной и атомно-силовой микроскопии, предложил и построил первый сканирующий микроскоп ближнего поля (*NSOM — Near-field Scanning Optical Microscope*). Создание микроскопа позволило преодолеть предел Аббе.

Физической основой нового метода является наличие в дальней зоне излучения следов взаимодействия света с объектом, находящимся в ближнем поле [6].

NSOM позволяет также получать информацию о локальной трехмерной структуре электромагнитного поля в окрестностях субмикроскопических и наноструктур с разрешением, более чем на порядок превышающим дифракционный предел.

Принцип действия микроскопа NSOM, заключается в том, что изображение объекта строится по точкам, в каждой из которых излучение от образца собирается в ближнем поле зондом — заостренным кончиком оптического волокна с покрытой металлом боковой поверхностью. Величина зазора между зондом и поверхностью объекта находится в пределах  $1 \div 10$  нм. Оптическая разрешающая способность такого микроскопа определяется размером кончика зонда (апертурой) и составляет  $20 \div 30$  нм. Кроме оптической картинки, микроскоп NSOM может одновременно строить топографию поверхности объекта. Наивысшее достигнутое методом NSOM оптическое разрешение составляет 12 нм при длине волны излучения 514 нм для NSOM апертурного типа [7] и 1 нм при длине волны излучения 632 нм для NSOM безапертурного типа [8].

Таким образом, на сегодняшний день существует инструмент, позволяющий изучать объекты размером много меньшим длины волны света в оптическом диапазоне.

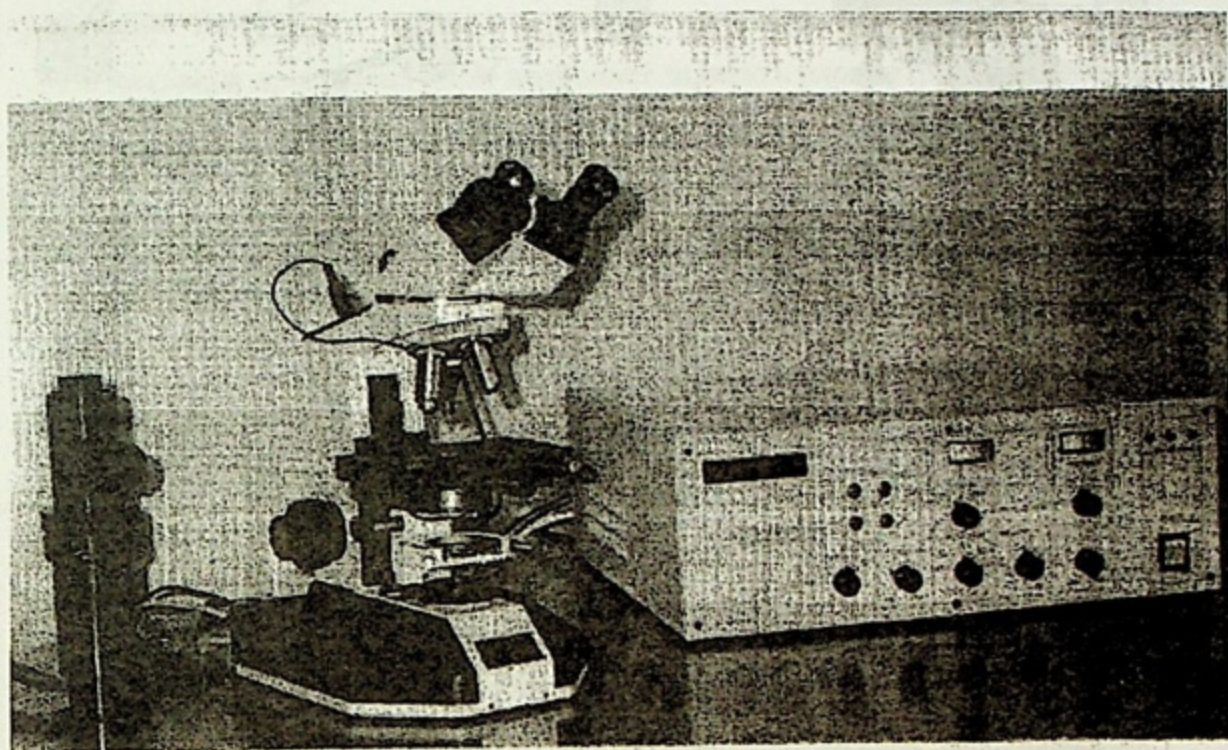
В данной работе излагаются принципы работы оптического сканирующего микроскопа ближнего поля (NSOM).

Рассматриваются методы определения масштабных коэффициентов по  $k_x$  и  $k_z$ , оптического коэффициента  $k_{opt}$  и разрешающей способности — микроскопа NSOM с помощью эталонных образцов (дифракционных решеток).

Работа NSOM демонстрируется при изучении топографии поверхности тонких пленок МЕН-PPV в ближнем поле, а также при исследовании поверхности пленок раствора биологического препарата PDE, определение размеров и формы частиц PDE, построение гистограммы распределения числа частиц по размерам.

### Описание экспериментальных методик

В нашей работе использовался микроскоп NSOM фирмы "CDP Systems", г. Москва, собранный на основе стандартного медицинского микроскопа МИКМЕД-2 предприятия "ЛОМО": четыре классических объектива и один молекулярный объектив. Молекулярный объектив представляет собой ближнепольный зонд с детектором зазора между зондом и поверхностью образца. Общий вид установки приведен на рис. 1. Общая схема установки приведена на рис. 2.



*Рис. 1. Общий вид установки; слева направо: ФЭУ, микроскоп NSOM, электронный блок управления микроскопом.*

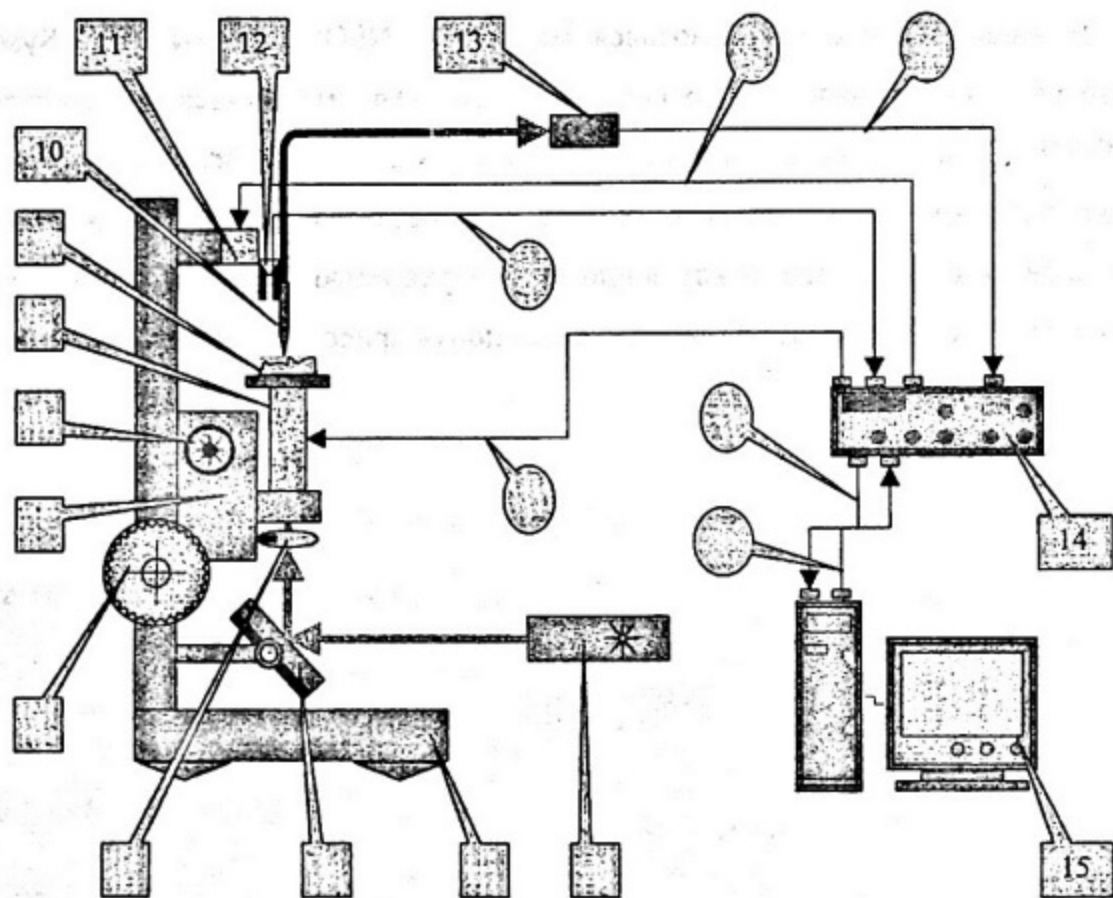


Рис. 2. Общая схема установки: 1 — источник света; 2 — стойка микроскопа NSOM; 3 — зеркало; 4 — линза; 5 — винт "грубой" вертикальной подачи образца; 6 — ходовая часть микроскопа; 7 — микрометрический винт "точной" подачи образца; 8 — пьезоманипулятор; 9 — образец; 10 — зонд с оптическим волокном; 11 — пьезокерамический генератор механических колебаний зонда; 12 — пьезокерамический детектор зазора (камертон); 13 — фотодетектор (ФЭУ); 14 — электронный блок управления микроскопом NSOM; 15 — IBM PC совместимый компьютер; а — сигнал управления генератором механических колебаний зонда; б — сигнал с фотодетектора; в — сигнал с детектора зазора; г — передача данных компьютеру; д — сигнал управления пьезоманипулятором (сканирование); ж — сигнал управления параметрами сканирования.

Образец фиксируется на пьезоманипуляторе 8, представляющий собой полую цилиндрическую трубку. Пьезоманипулятор жестко закреплен на ходовой части микроскопа 6, способной перемещаться в вертикальном направлении с помощью винта "грубой" подачи 5 и микрометрического винта "точной" подачи 7. Свет от

источника 1, отражаясь от зеркала 3, фокусируется линзой 4 на образец 8. Зонд 10 приклеен к детектору зазора 12, который, в свою очередь, жестко закреплен на пьезокерамическом генераторе механических колебаний 11. Зонд, собирая излучение от образца, передает его по оптическому волокну на фотодетектор 13. Электронный блок управления микроскопом 14, получая сигналы с фотодетектора и детектора зазора, оцифровывает их и передает компьютеру 15. Компьютер включает в себя плату, которая, во-первых, осуществляет сканирование, посылая соответствующие сигналы пьезоманипулятору через электронный блок, во-вторых, записывает сигналы от электронного блока, полученные в каждой точке сканирования в оперативную память.

Специальная программа *NFM* позволяет задавать параметры сканирования. Во время самого процесса сканирования она строит два изображения — оптическое ближнепольное и топографическое изображения поверхности образца. Изображения записываются на жесткий диск компьютера в два файла в формате *DAT* в виде трех колонок чисел, где числа из первых двух колонок означают координаты точки, а числа в третьей колонке — интенсивность света и высоту  $z$  точки поверхности для оптической и топографической картинок соответственно. Полученные изображения обрабатывались программой *FemtoScan*, которая позволяет проводить анализ изображений (в том числе и статистический анализ).

Существенным элементом установки является *источник возбуждения*. В работе использовались следующие источники света:

- галогеновая лампа;
- гелий-неоновый лазер, длина волны излучения  $\lambda=633$  нм;
- аргонный лазер, длина волны излучения  $\lambda=488$  нм.

Исключительно важным элементом установки представляется *пьезоманипулятор*.

Пьезоманипулятор представляет собой цилиндрическую полую трубку с внешним диаметром  $D=12$  мм, внутренним диаметром  $d=8$  мм и высотой  $h=20$  мм,

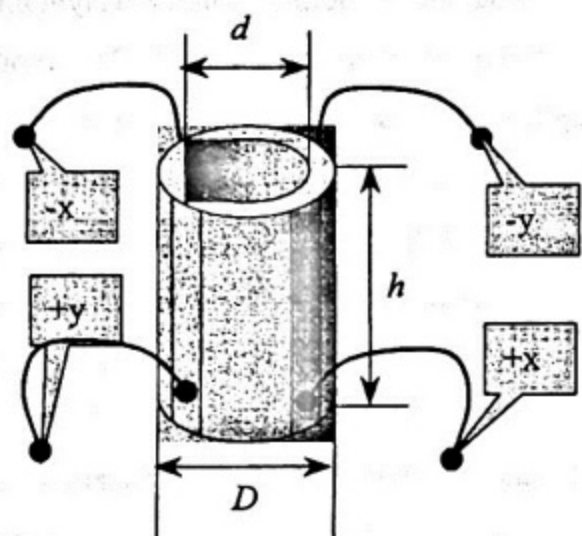


Рис. 3. Пьезоманипулятор

изготовленную из пьезокерамики на основе ЦТС (рис. 3). На трубку нанесены четыре алюминиевых контакта по два на каждую ось сканирования:  $(+x, -x)$  и  $(+y, -y)$ . Диапазон рабочих напряжений:

$$U_{min} = -250 \text{ В,}$$

$U_{max} = +250 \text{ В.}$  Трубка отклоняется вдоль каждой из осей изгибным способом. Для отклонения трубки в плоскости сканирования к соответствующим контактам прикладывается напряже-

ние. Для перемещения трубки перпендикулярно плоскости сканирования ко всем контактам одновременно прибавляется некое напряжение, зависящее от величины отклонения в плоскости сканирования, со знаком, соответствующим перемещению трубки вдоль оси  $Oz$  в сторону "положительных" или "отрицательных"  $z$ . Следует заметить, что при отклонении трубки в плоскости сканирования  $xOy$  в силу самого принципа отклонения (изгибный способ) происходит также смещение и вдоль оси  $Oz$  (рис. 4). Его также называют "паразитное смещение". В связи с этим всю максимальную область, которую может охватить пьезоманипулятор, разделяют на две: область линейных и область нелинейных смещений по оси  $Oz$ . В первой области смещение вдоль оси  $Oz$  возрастает линейно с увеличением отклонения в плоскости  $xOy$ . Во второй области смещение вдоль оси  $Oz$  возрастает как функция более высокой степени. Поэтому обычно, когда говорят о максимальной области сканирования, то имеют в виду первую область (область линейных смещений), поскольку в этом случае компенсировать паразитное смещение вдоль оси  $Oz$  легко: необходимо

всего лишь прибавлять к  $z$ -составляющей пьезоманипулятора напряжение, пропор-

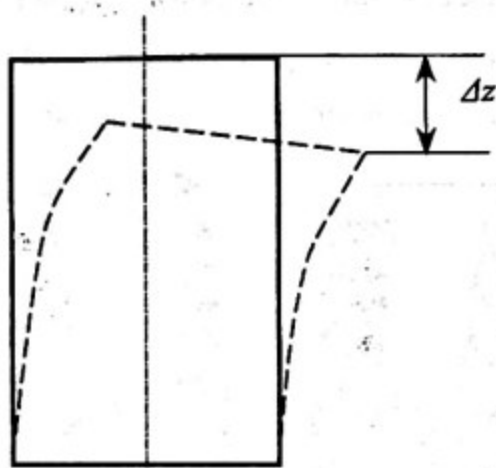


Рис. 4. Паразитное смещение пьезоманипулятора

циональное отклонению в плоскости  $xOy$ , с учетом знака. Область сканирования на аппаратном уровне определяется в относительных единицах (о.е.) или, так называемых, единицах устройства. Для определения реальных линейных размеров области необходимо использовать эталонные образцы.

Генератор механических колебаний является необходимым элементом установки.

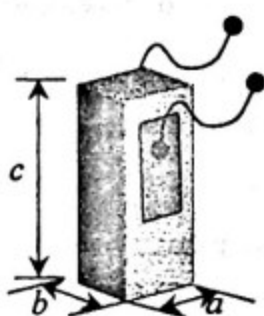


Рис. 5. Генератор механических колебаний.

Генератор механических колебаний представляет собой прямоугольную пьезокерамическую пластинку с размерами  $a=5$  мм,  $b=1$  мм,  $c=8$  мм, с контактами, нанесенными на каждое из ее оснований (рис. 5). Генератор является электромеханическим преобразователем. К его контактам подается переменное напряжение, возбуждающее механические колебания пластинки. Амплитуду, частоту и фазу перемен-

ного напряжения позволяет регулировать электронный блок управления микроскопом.



На рис. 6 представлен другой важный элемент — детектор зазора.

Детектор зазора (рис. 6) представляет собой стандартный часовой кварцевый резонатор (камертон) с собственной частотой колебания 32 768 Гц. Детектор является механоэлектрическим преобразователем: величина электрического поля наве-

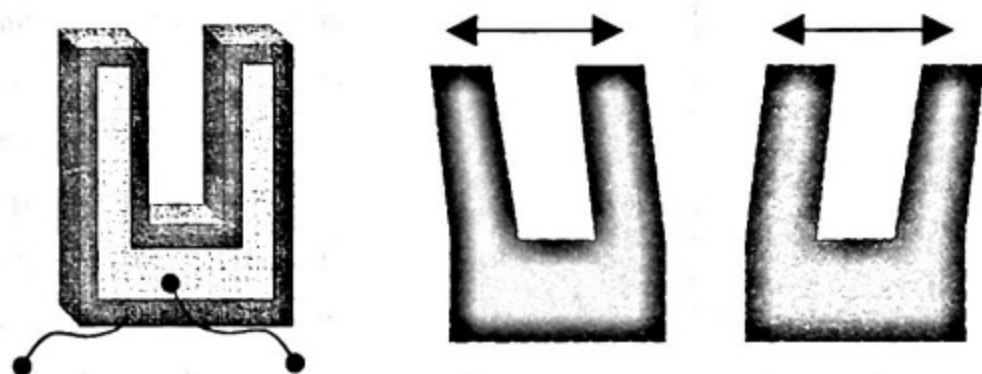


Рис. 6. Детектор зазора; слева общий вид, справа — отклонения плеч камертона при колебании.

денного на его контактах прямо пропорциональна амплитуде колебаний “зубчиков” камертона. Поскольку на детектор зазора приклеен зонд, то собственная частота системы камертон-зонд меняется по отношению к собственной частоте отдельного камертона. Настроиться на собственную частоту такой системы вручную позволяет генератор механических колебаний при помощи электронного блока управления микроскопом. Детектор зазора жестко фиксируется на генераторе. Существенным является требование, чтобы камертон фиксировался на генераторе механических колебаний своим основанием, т.е. зубчики должны быть свободными и выступать за генератор (см. рис. 2). Амплитуда, частота и фаза напряжения, прикладываемого к генератору механических колебаний, задает амплитуду, частоту и фазу колебания камертона. Следует отметить, что у камертона, изначально предназначенного для стабилизации частоты в микросхемах, в случае его прямого применения зубчики колеблются в противофазе (стоячая волна). В данном случае камертон используется как бы в обратном направлении: совершая колебания при помощи генератора, зубчики колеблются в фазе (см. правую часть рис. 6). Напря-

жение, возникающее на контактах камертона при его колебании, подается на электронный блок управления. О величине напряжения можно судить по индикатору на электронном блоке. Если к колеблющемуся в резонансе камертону приложить внешнюю диссипативную силу, которая будет "мешать" камертону колебаться, то амплитуды колебания и, следовательно, величина напряжения, регистрируемого электронным блоком, изменится. В роли такой диссипативной силы выступает си-

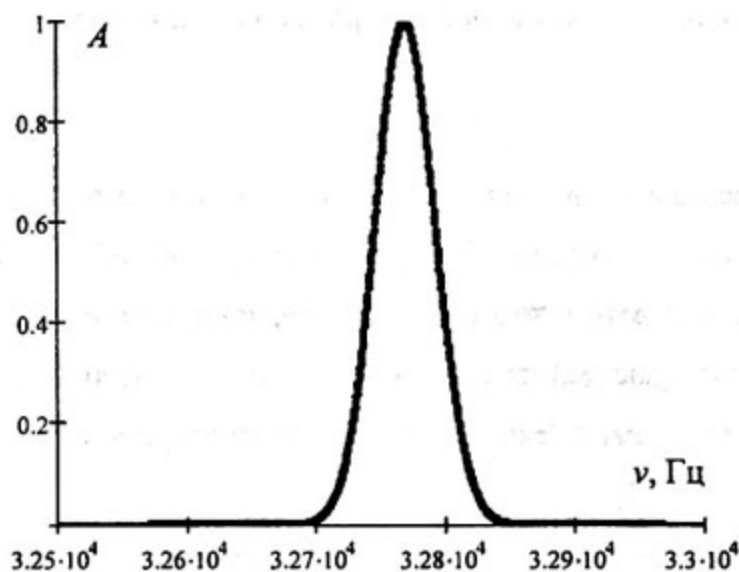


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика механических колебаний камертона;  $A$  — амплитуда колебаний, нормированная на  $A_{max}$ ;  $\nu$  — частота колебаний.

ла межатомного взаимодействия между кончиком зонда и поверхностью образца<sup>1)</sup>. Зонд приклеен к камертону, так, чтобы кончик зонда выступал за край камертона на  $1 \div 1,5$  мм. Таким образом, взаимодействие зонда с образцом передается камертону.

<sup>1)</sup> На сегодняшний день существует ряд предположений, пытающихся объяснить, какие силы действуют в ближнем поле между концом зонда и поверхностью, но единого мнения на этот счет пока не существует.

На рис. 7 изображена амплитудно-частотная характеристика камертона, рассчитанная на основе модели гармонического осциллятора [9]. Видно, что отношение резонансной частоты колебания  $\nu_{рез}=32768$  Гц к ширине резонансной линии колебания  $\Delta\nu \approx 30$  Гц есть величина порядка 1090. Экспериментально показано, что система поддержания зазора, построенная на основе данного камертона обладает добротностью  $Q \approx 1000$ . Экспериментальный результат хорошо согласуется с теорией, следовательно, данный детектор зазора является чувствительным механизмом для удержания зонда вблизи поверхности образца и определения величины зазора.

### Зонд

Как указывалось выше, в микроскопии ближнего поля чаще всего используются два типа зондов: “апертурный” [10] и “безапертурный” зонд [8]. Их единственное отличие состоит в том, что боковая поверхность “апертурного” зонда покрыта слоем металла (рис. 8а) толщиной достаточной, чтобы удерживать свет, внутри зонда (так называемый, скин-слой), а у “безапертурного” зонда боковая поверхность открыта (рис. 8б).

В данной работе использовались безапертурные зонды. Это связано с тем, что для нанесения тонкого слоя металла на боковую поверхность зонда необходима напылительная установка и специальные приспособления [11]. Такая напылительная установка появилась в лаборатории сравнительно недавно и методика напыления еще не до конца разработана.



Рис. 8. Примеры ближнепольных зондов: а — апертурный, б — безапертурный.

Зонд представляет собой кварцевое одномодовое оптическое волокно с областью пропускания, лежащей в области ближнего ультрафиолетового, видимого и ближнего инфракрасного диапазона оптического спектра. Один конец волокна заострен так, что диаметр кончика острия составляет в среднем 50 нм. Волокно заостряли химическим способом — травлением — по известной методике, предложенной Раулем Стоклом и Кристианом Фокасом [12].

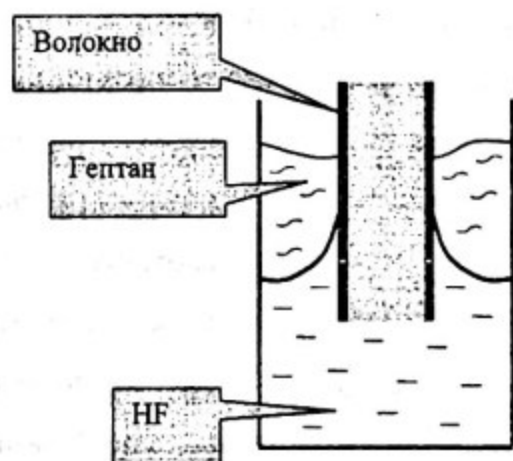


Рис. 9. Травление волокна.

Необходимо привести *метод химического травления оптического волокна.*

Для травления использовали 40% раствор фторводородной кислоты (химическая формула HF, ОСЧ 9-5, производство ООО «Галоген», г. Пермь). Кислоту помещали в прозрачную пластиковую посуду, не растворимую кислотой. Так как фторводородная кислота быстро испаряется и относится к классу опасных для здоровья и жизни людей веществ, сверху наливали слой н-гептана (производство ООО «Лабораторная техника», г. Москва) толщиной 2÷5 мм. Гептан легче кислоты

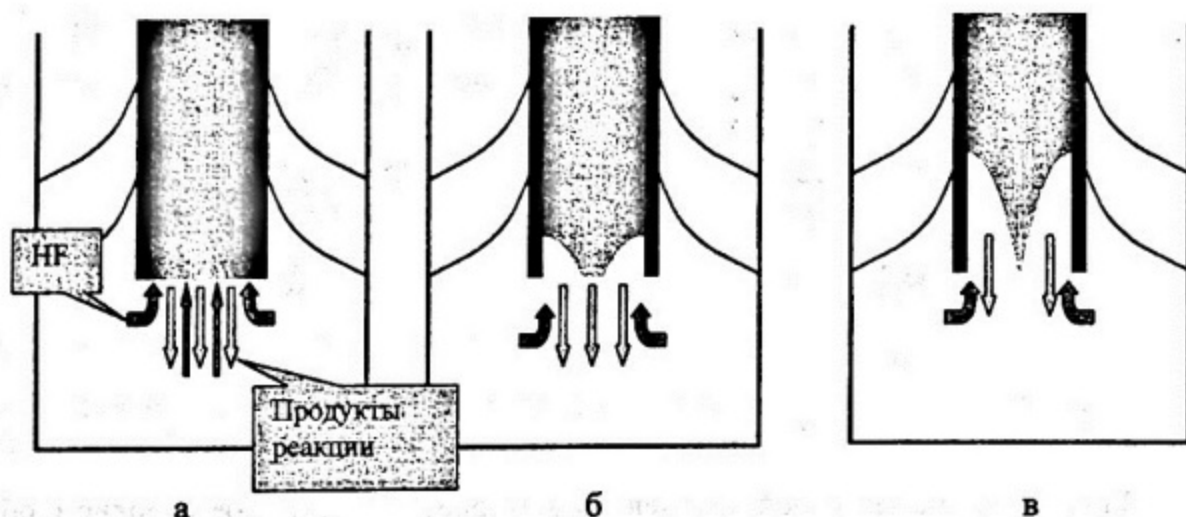


Рис. 10. Травление волокна.

и в ней не растворяется. Таким образом, он не позволял кислоте испаряться. Не очищенный от оплетки конец волокна обрезали специальными бокорезами для нарезки тонкой проволоки диаметром от 0,1 мм. При этом получали довольно гладкую поверхность торца оптического волокна (проверяли под микроскопом NSOM, работающим в обычном режиме медицинского микроскопа). Волокно опускали под границу раздела сред на 1+2 мм и оставляли при комнатной температуре на 90-120 минут (рис. 9). Оплетка в кислоте не растворялась. После травления, оплетку растворяли в ацетоне. Стокл и Фокас предложили свое объяснение процессу образования конусообразного кончика волокна (рис. 10). Они утверждают, что в процессе образования кончика главную играют роль три фактора: во-первых, геометрия волокна, во-вторых, разница скоростей реакций фторводородной кислоты с оболочкой и сердцевиной волокна и, в-третьих, микроконвекция кислоты. Первый фактор обусловлен тем, что на края кварцевого цилиндра волокна приходится большее количество кислоты, чем на его центральную часть (рис. 10а). Второй фактор обусловлен тем, что сердцевина волокна содержит ионы германия  $Ge$  — они являются ингибиторами, т.е. их присутствие замедляет реакцию кислоты с сердцевиной. Первые два фактора отвечают за первоначальное формирование кон-

чика с углом раствора конуса в среднем  $80 \div 100^\circ$  (рис. 10б). Угол раствора хорошо-го кончика зонда составляет  $15^\circ$  (рис. 10в). Именно третий фактор — микроконвекция — отвечает за образование конуса с таким углом раствора (рис. 11): после первоначального формирования конуса конвекция как бы доставляет фторводородную кислоту к кварцевому волокну, образующиеся продукты реакции тяжелее кислоты и оседают на дно сосуда. Примечательно, что данный способ химического травления волокна — процесс самопрекращающийся: вся часть волокна, которая находится в кислоте, полностью растворяется, над границей раздела сред остается конусообразный кончик длиной  $1,5 \div 2$  мм диаметром острия порядка 50 нм. Подробное объяснение полного процесса травления с учетом всех факторов, включая влияние гравитации, изложил М. Юнг [13].

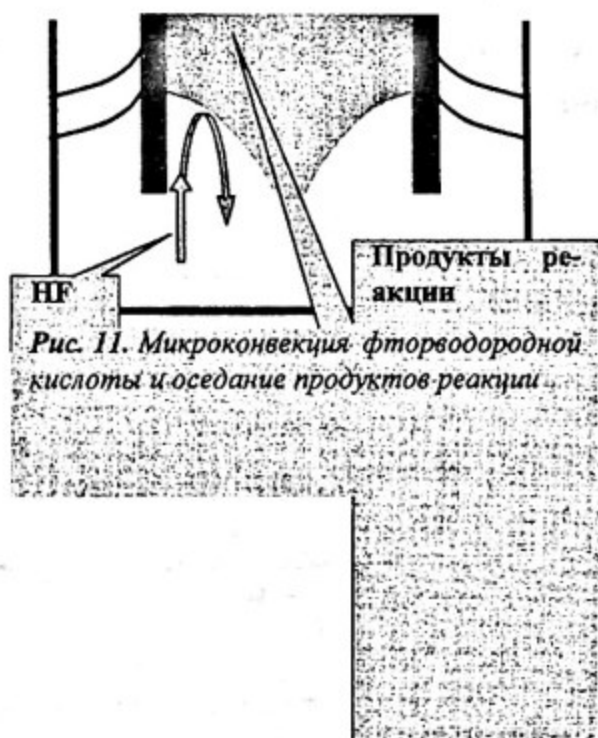


Рис. 11. Микроконвекция фторводородной кислоты и оседание продуктов реакции.

После описания всех важных элементов микроскопа следует детально описать **принципы сканирования**

Пьезоманипулятор с образцом подводится к колеблющемуся зонду так, чтобы расстояние между кончиком зонда и поверхностью образца равнялась заданной величине зазора  $d_0$  (рис. 12а). Если величина зазора в какой-либо точке сканирования изменяется, то действующие между кончиком зонда и поверхностью образца силы квазитрения изменяют амплитуду колебания системы зонд-камертон: амплитуда увеличивается с увеличением зазора и уменьшается с уменьшением зазора (рис. 12б). Изменение амплитуды регистрируется электронным блоком управления, который, во-первых, подает сигнал (напряжение) нужной величины на z-составляющую пьезоманипулятора, чтобы вернуть прежнюю величину зазора (рис. 12в), во-вторых, записывает величину двух сигналов в компьютер: первый сигнал — величина зазора, второй — интенсивность света, собранного фотодетектором в данной точке. Таким образом, одновременно строятся два изображения: топографическое и оптическое.

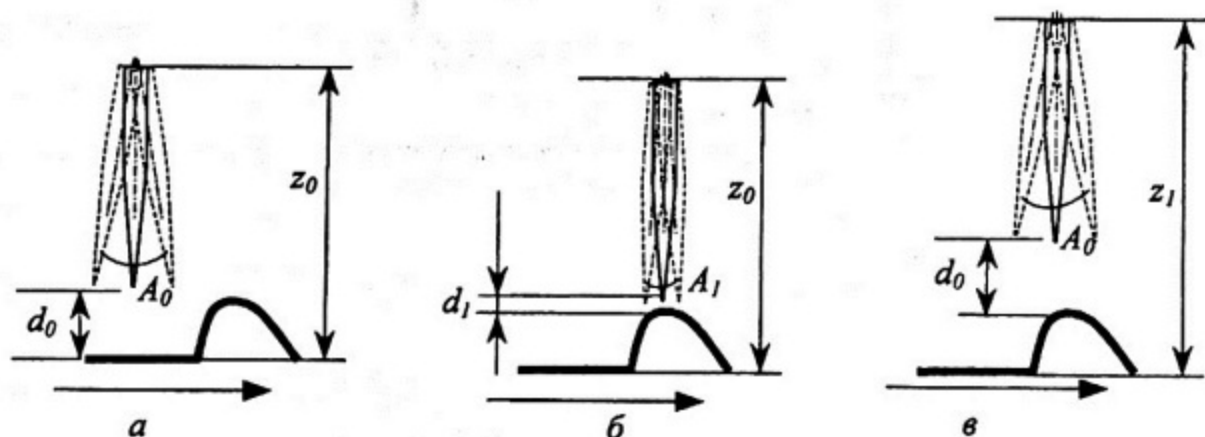


Рис. 12. Пример действия системы поддержания зазора, стрелкой обозначено направление сканирования вдоль одной из осей плоскости  $xOy$ .

Необходимо детально остановиться на *образцах*, которые использовались нами. В данной работе исследовали образцы следующих категорий:

- эталонные образцы;
- тонкие пленки органических соединений *МЕН-РРV*;
- пленки раствора на основе биологического высокоактивного препарата

*PDE*.

### Эталонные образцы

Образцами первой категории являлись эталонные образцы. Эталонные образцы представляют собой две дифракционные решетки. Параметры образцов приведены в таблице 1.

	Эталонный образец №1	Эталонный образец №2
Тип	Параллельные полосы треугольного профиля	Параллельные П-образные ступеньки
Период	278 нм	8 мкм
Высота профиля	30 нм	270 нм
Материал	Алюминий на халькогенидном стекле	Алюминий на стекле

Таблица 1. Параметры эталонных образцов.

### Эталонный образец №1

Эталонный образец №1 (производитель ЗАО "НТ-МДТ", г. Зеленоград) представляет собой параллельные полосы треугольного профиля, вытравленные с периодом 278 нм в слое алюминия высотой 30 нм, нанесенном на халькогенидное



стекло (рис. 13). Его использовали для определения масштабного коэффициента  $k$  по оси  $Ox$  (и  $Oy$ ).

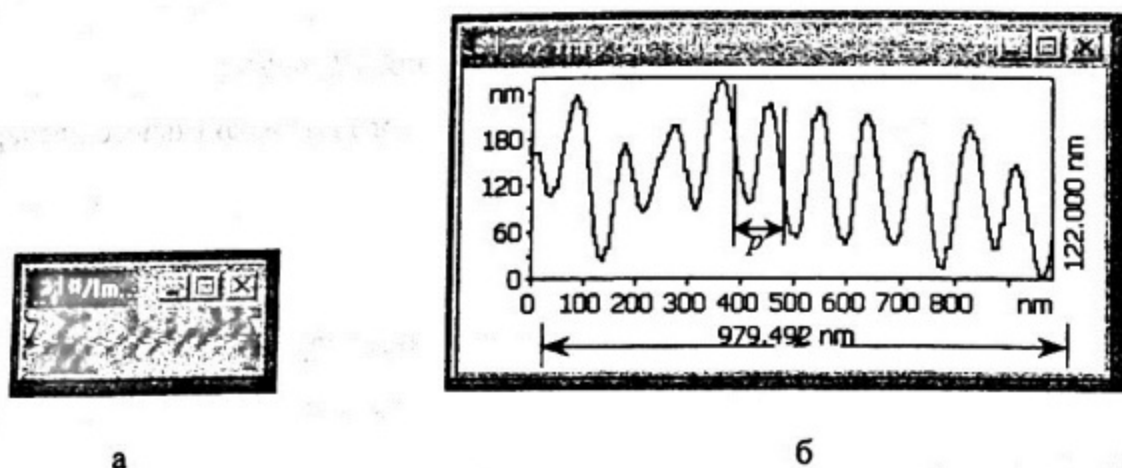


Рис. 13. а — эталонный образец №1. б — сечение изображения по линии на рис. а

### Метод определения масштабного коэффициента по оси $Ox$

Задавали область сканирования  $L_{o.e.}$  в относительных единицах (о.е.). После сканирования в программе FemtoScan проводили сечение через все изображение вдоль одной из осей сканирования (см. рис. 13б). Умножали количество периодов  $n$ , уместившихся в сечении, на величину периода  $p$  в нанометрах. Получали линейный размер области сканирования  $L_{nm}$ . Поделив  $L_{nm}$  на  $L_{o.e.}$ , получали масштабный коэффициент  $k$ : количество о.е. пьезоманипулятора, приходящихся на единицу длины (1 нм).

### Эталонный образец №2

Эталонный образец №2 (предоставлен изготовителем микроскопа NSOM) представляет собой параллельные алюминиевые полоски с профилем в форме П-образной ступеньки высотой 270 нм, нанесенные с периодом 8 мкм на кварцевую подложку (рис. 14). Отношение коэффициента пропускания света прозрачной

и непрозрачной частей 8:1. Его использовали для определения разрешающей способности микроскопа и масштабного коэффициента пьезоманипулятора  $k_z$  по оси  $Oz$  и оптического коэффициента  $k_{opt}$ , связывающего отношение интенсивностей с о.е.

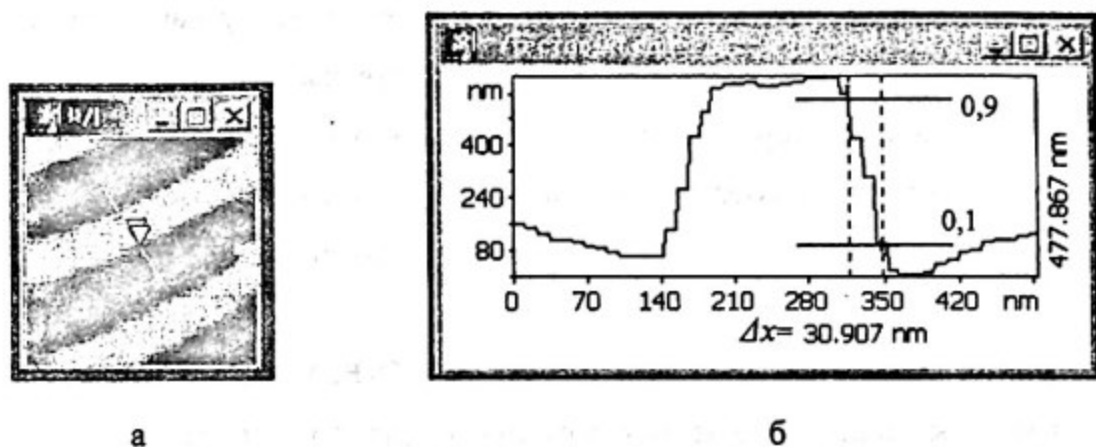


Рис. 14. а — изображение эталонного образца №2, б — поперечное сечение ступеньки.

**Метод определения разрешающей способности, масштабного коэффициента по оси  $Oz$  и оптического коэффициента  $k_{opt}$**

Разрешающую способность определяли исходя из того факта, что угол наклона стенки ступеньки с плоскостью образца составляет с хорошей точностью  $90^\circ$ . На изображении ступеньки получаются не с идеально перпендикулярными к плоскости образца стенками, а несколько “размытые”, так что проекция стенки на плоскость отлична от нуля (см. рис. 14б). В программе FemtoScan проводили поперечное сечение изображения образца так, чтобы получить профиль ступеньки. Разрешение определяли как величину проекции  $\Delta x$  стенки на плоскость образца, где  $\Delta x$  отсчитывали от 0,1 до 0,9 высоты ступеньки.

Масштабный коэффициент  $k_2$  определяли, разделив количество о.е., приходящихся на высоту ступеньки, на реальную высоту ступеньки в нанометрах. Оптический коэффициент определяли по схеме, похожей на схему определения  $k_2$ : делили отношение количества о.е. для прозрачной и непрозрачной областей решетки на действительную величину отношения коэффициентов пропускания света.

Образцами второй категории являлись растворы органического соединения МЕН-PPV. Растворы органического соединения МЕНPPV (poly[2-methoxy ethylhexy(оxу) phenylene vinylene]) представляют интерес как материал для изготовления светонизлучающего диода (*LED* — light emission diode).

#### **Метод приготовления тонких пленок МЕН-PPV**

Образцы приготовлены методом центрифугирования (spin-coating). Каплю раствора объемом 100 мкл наносили на прозрачную проводящую подложку ИТО (indium-till oxide). Подложку фиксировали на диске ротора, который затем вращали со скоростью до 10 000 об./мин. В результате получали тонкую пленку.

#### **Метод приготовления тонких пленок раствора препарата PDE**

Третья категория образцов представляла собой пленки на основе раствора биологического высокоактивного препарата PDE, предоставленного ООО "МНПК Биотехиндустрия", г. Москва. Исходное вещество препарата PDE представляло собой взвесь мелких частичек в физиологическом растворе. До того, как препарат исследовали в работе, его наблюдали при помощи электронного микроскопа и установили, что минимальный размер частиц, еще регистрируемый электронным микроскопом, составлял порядка 1 мкм: частицы с меньшими размерами не наблюдали. В работе использовали растворы различной концентрации препарата.

Исходную взвесь препарата PDE разводили в дважды дистиллированной воде в 10, 100, 300, 1000 раз. Капельку раствора объемом 100 мкл, наносили на подложку (обычное предметное стекло) размером  $10 \times 10 \text{ мм}^2$ , давали высохнуть в течение 1 часа. Такие разведения подбирали опытным путем для того, чтобы получить пленку, в которой частицы препарата находились бы отдельно на расстояниях порядка размера частиц.

### Экспериментальные результаты и их обсуждение

Ниже приводятся результаты исследования первого эталонного образца, для которого были получены только топографические изображения, т.к. образец непрозрачен.

Примеры полученных изображений приведены на рис. 15 и рис. 16: более светлые области соответствуют большей высоте по Oz.

Размер области сканирования в относительных единицах (о.е.) составляет  $14500 \text{ о.е.} \times 3000 \text{ о.е.}$  ( $x \times y$ ), шаг сканирования 100 о.е. На сечении видим, что по оси Ox уместилось 10 полных периодов решетки. Следовательно, размер области по этой оси составляет  $L_x = 10 \cdot 278 \text{ нм} = 2780 \text{ нм}$  или 2,78 мкм. Разделив эту величину на

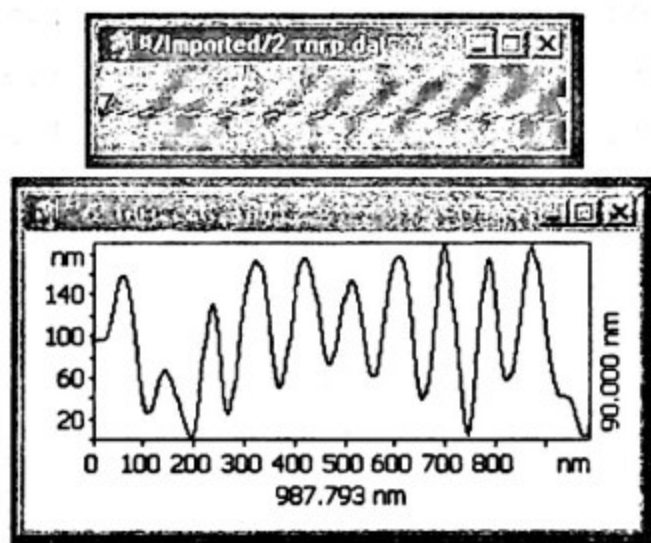


Рис. 15. Вверху — топографическое изображение эталонного образца №1. Внизу — сечение изображения по линии на верхнем рисунке.

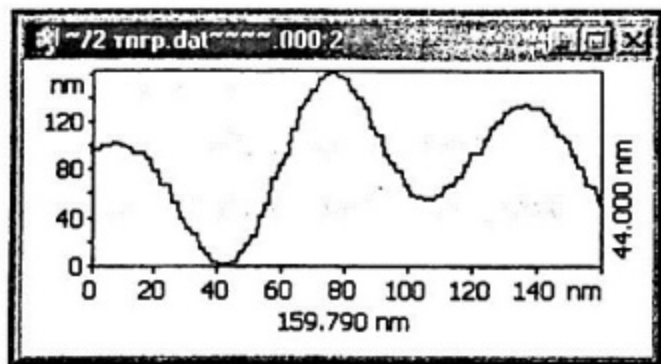


Рис. 16. Слева — топографическое изображение эталонного образца №1. размер области сканирования 0,57 мкм×0,57 мкм. Справа — сечение картинку по указанной линии.

количество относительных единиц по оси  $Ox$ , получили масштабный коэффициент  $k_x \approx 0,2$  нм/о.е.: число нанометров на одну о.е. В случае поворота образца на пьезоманипуляторе на  $90^\circ$  и повторном сканировании с сохранением всех предыдущих параметров, полученный коэффициент  $k_y$ , отличался от  $k_x$  не более, чем на 10%. Следовательно, достаточно определить один из масштабных коэффициентов, а второй принять равным первому. Таким образом, реальный размер максимальной области сканирования, равный 64000 о.е., составляет 12270 нм. Неодинаковость высоты профилей решетки не позволила этот использовать образец для определения масштабного коэффициента пьезоманипулятора по оси  $Oz$ . На рисунке также видны небольшие дефекты. Характерный размер дефектов составляет половину периода решетки.

На рис. 16 представлено изображение — выделенный квадрат на рис. 15 — с размером области 0,57 мкм×0,57 мкм и шагом 20 нм. Видно, что уменьшение размера шага сканирования позволило получить более четкую картинку по сравнению с предыдущей.

## Эталонный образец №2

При применении эталонного образца №2 для определения коэффициента  $k_z$  и разрешающей способности микроскопа получили топографические изображения подобные приведенным на рис. 16 и 17, а для определения  $k_{opt}$  — изображения подобные приведенным на рис. 20 и 21.

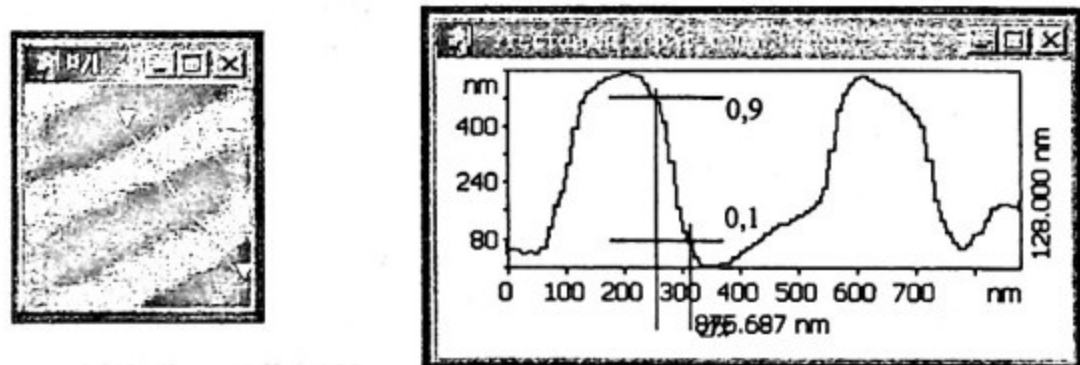


Рис. 17. Топографическое изображение эталонного образца №2 и сечение по указанной линии.

В связи с тем, что период решетки довольно большой, необходимо было брать максимальную область сканирования: в нее укладывалось два полных периода. Приведенное на рис. 17 сечение изображения позволило определить разрешение микроскопа как величину  $\Delta x$  проекции стенки ступеньки решетки, взятой от 10% до 90% высоты ступеньки. Характерное разрешение, полученное в работе, составило 100 нм для топографического канала микроскопа. На рис. 18 показан пример трехмерной модели, построенной программой FemtoScan на основе двумерной картинки образца.

Для определения оптического разрешения исходили из следующих соображений. Топографическое разрешение микроскопа непосредственно связано с размером кончика волоконного зонда, подобно тому, как разрешение атомно-силового микроскопа (АСМ) определяется размером металлического зонда. Величину зазора между кончиком зонда и поверхностью образца варьировали в пределах  $1 \div 50$  нм.

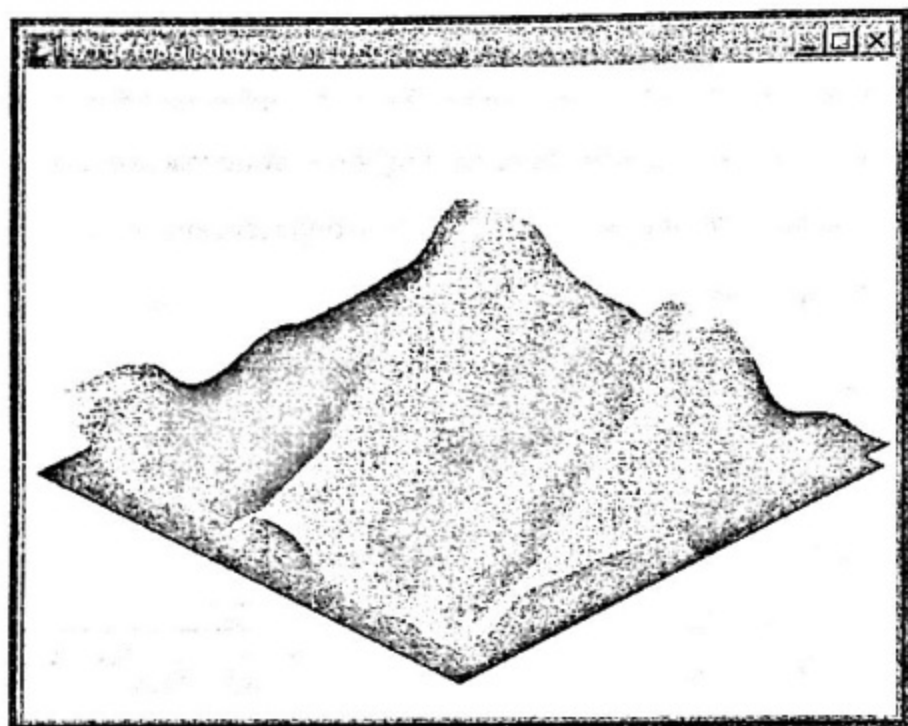


Рис. 18. Трехмерная модель изображения, приведенного на рис. 17, построенная программой FemtoScan.

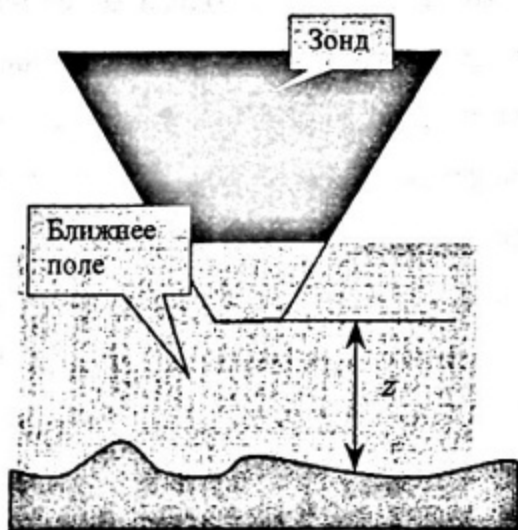


Рис. 19. Кроме самого кончика зонда ("апертуры") в сборе света участвует та часть зонда, в которую еще проникает волна;  $z$  — зазор.

При работе с эталонным образцом №2 зазор выставляли равным 25 нм (середина динамического диапазона). Интенсивность волны (ее нерadiационная часть) в ближнем поле убывает как функция 4-й степени расстояния [11]. Следовательно, чем дальше зонд находится от поверхности образца, тем меньшая часть (по оси  $Oz$ ) зонда участвует в сборе света (рис. 19). На расстоянии порядка 50 нм от поверхности образца микроскоп ничего не регистрировал. Таким образом, в слу-

чае, когда величина зазора составляет порядка  $\lambda/20$  (25 нм), только самый кончик зонда собирает свет от образца, и, следовательно, оптическое разрешение микроскопа определяется величиной “апертуры” зонд (кавычки здесь поставлены, т.к. формально нельзя называть не металлизированный зонд апертурой). Средние размеры кончиков зондов, полученных в работе, составляли 50 нм. Значит, оптическое разрешение микроскопа NSOM составляло порядка 50 нм.

На рис. 20 приведены оптические изображения эталонного образца №2. На двумерной картинке заметна некоторая нелинейность изображения: прямые полоски образца на картинке несколько выгнуты. Это объясняется нелинейностью пьезоманипулятора: при отклонении пьезоманипулятора в плоскости сканирования на расстояние больше 5 мкм от положения равновесия нарушается линейная зависимость его смещения от приложенного напряжения. В случае, когда отклонение происходило не более чем на 6,25 мкм, погрешность не превышала 10%. Таким образом, определили, что вся область сканирования составляла  $12500 \times 12500$  мкм<sup>2</sup>.

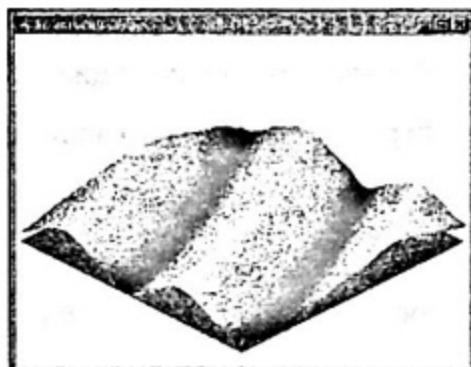


Рис. 20. Оптические двумерное (слева) и трехмерное (справа) изображения эталонного образца №2.

### Тонкие пленки МЕН-PPV

Тонкие пленки МЕН-PPV исследовали на предмет выявления неоднородностей поверхности пленки, связанных как с топографией поверхности, так и с оптическими свойствами пленки. Пример полученного изображения и сечение по ука-



званной линии приведены на рис. 21. Заметны крупные неоднородности с характерным поперечным размером 1 мкм. Средняя высота неоднородностей со-

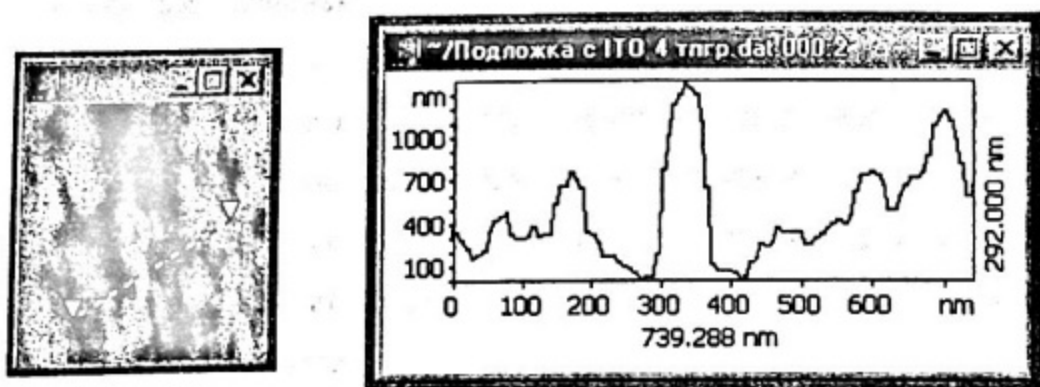


Рис. 21. Топографическое изображение поверхности тонкой пленки МЕН-PPV и сечение по указанной линии.

ставляет 300 нм. Такой размер неоднородностей по высоте оказался слишком большим для приготовления качественной электролюминесцирующей ячейки (светоизлучающего диода). Большие колебания толщины пленки приводят к невозможности равномерно напылить тонкий слой металлических контактов. Для решения этой проблемы проводящие подложки (на основе ITO) шлифовали до 14-го класса шероховатости. На отшлифованных подложках методом центрифугирования приготавливали тонкие пленки МЕН-PPV. Поверхности полученных образцов исследовали на микроскопе NSOM (рис. 22). Средний размер неоднородностей по высоте составил 20-30 нм. Различия также четко видны и на оптических изображениях (рис. 23): слева — картинка поверхности пленки, приготовленной на нешлифованной подложке ITO, справа — на шлифованной подложке ITO. Темные пятна соответствуют областям слабого пропускания света, светлые пятна — областям хорошего пропускания. Учитывая, что средняя толщина пленок на каждой из подложек составляла 1000 Å (100 нм), очевидно, что неоднородности пленки на нешлифованной подложке, в три раза превышающие по высоте толщину пленки (300 нм) пропускают меньше света. Наоборот, случайные ямки в пленке почти не

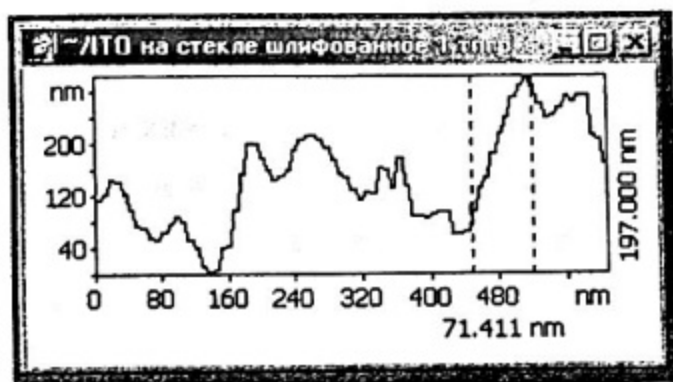


Рис. 22. Топографическое изображение и сечение поверхности тонкой пленки МЕН-PPV, полученной на шлифованной подложке.

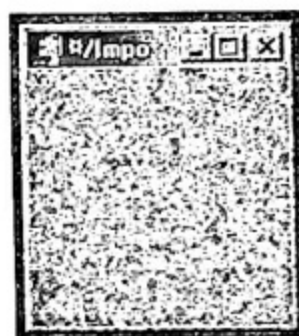


Рис. 23. Оптические изображения поверхности тонкой пленки МЕН-PPV: слева — приготовленной на нешлифованной, справа — на шлифованной подложке ITO.

задерживают свет. Отношение интенсивности прошедшего света в таких темных и светлых пятнах составляло 40%. Таким образом, при исследовании тонких пленок МЕН-PPV с помощью микроскопа NSOM, установили, что степень шероховатости подложки ITO существенно влияет на качества тонкой пленки МЕН-PPV, а, значит, и на свойства электролюминесцирующей ячейки светоизлучающего диода.

### Пленки раствора препарата PDE

В работе исследовали пленки раствора PDE с разведением в 10, 100, 1000 раз. Расстояние между частицами в образцах с разведением в 10 раз было слишком малым по сравнению с размером самих частиц, поэтому отдельные частицы не наблюдали. Расстояние между частицами в образцах с разведением в 1000 раз было слишком большим, поэтому в кадр в лучшем случае попадало не более 5 частиц, что не позволяло набирать статистику. В связи с этим картинки этих образцов не информативны и здесь не приводятся. Наиболее полезными с точки зрения возможности извлечения информации о размерах и структуре частиц PDE оказались образцы с разведением препарата в 100 раз. При их изучении получили изображения (рис. 24, 25, 26).

На рис. 24 представлено изображение образца раствора PDE с разведением в 100 раз: участок с бедным содержанием частиц. Такие изображения получали в случае, когда сканировали края пленки. На рис. 25 представлены два изображения одного и того же участка образца. Поскольку обнаружили область с богатым содержанием частиц препарата PDE, то произвели повторное сканирование этой же области (на рис. 24 справа). Перед началом работы с данной категорией образцов вызывал опасение тот факт, что во многих исследованиях пленок на основе биологических объектов наблюдали эффект "налипания" частиц объектов на зонд, что



Рис. 24. Топографическое изображение: размер области сканирования  $12,5 \times 12,5$  мкм; разведение PDE в 100 раз.



Рис. 25. Топографические изображения одного и того же участка образца (справа — изображение при повторном сканировании): размер области сканирования  $12,5 \times 12,5 \text{ мкм}^2$ , разведение PDE в 100 раз.

естественным образом сказывалось на качестве конечных экспериментальных данных. Совпадение изображений на рис. 24 говорит о том, что пленки раствора препарата PDE хорошо “сидят” на подложке. В ряде случаев наблюдали эффект “налипания”: в таких случаях для уменьшения эффекта данные образцы покрывали мономолекулярной пленкой поверхностно активного вещества.

Средний размер частиц PDE на рис. 25 составляет 400 нм. Частицы с меньшими размерами трудно различимы. Для разрешения мелких частиц проводили гра-

фическую обработку двух типов изображений: во-первых, измененные топографические и, во-вторых, оптические изображения.

В первом случае использовали такую функцию программы графической и статистической обработки изображений FemtoScan, как боковая подсветка. На рис. 26 представлено топографическое изображение из предыдущего рисунка после применения функции боковой подсветки. В результате мелкие частицы ста-



Рис. 26. Топографическое изображение образца после применения функции боковой подсветки.

ли видны более отчетливо. Однако проводить оконтуривание этих частиц для определения среднего размера все еще представлялось затрудненным.

Во втором случае обрабатывали оптические изображения образцов (рис. 27). Хорошо различимы как крупные частицы размером более 300 нм, так и мелкие — размером менее 100 нм. В данных изображениях уже можно провести оконтуривание частиц и определить их размеры.



Рис. 27. Оптические изображения двух различных участков поверхности пленки ПДЕ; размер области сканирования:  $12,5 \times 12,5$  мкм<sup>2</sup>

Для оценки размеров частиц по высоте построили функцию корреляции изображений (рис. 28). По ширине функции корреляции определили среднюю высоту неоднородностей: 30 нм. Узкий пик свидетельствует о наличии малых по высоте частиц размером порядка 10 нм.

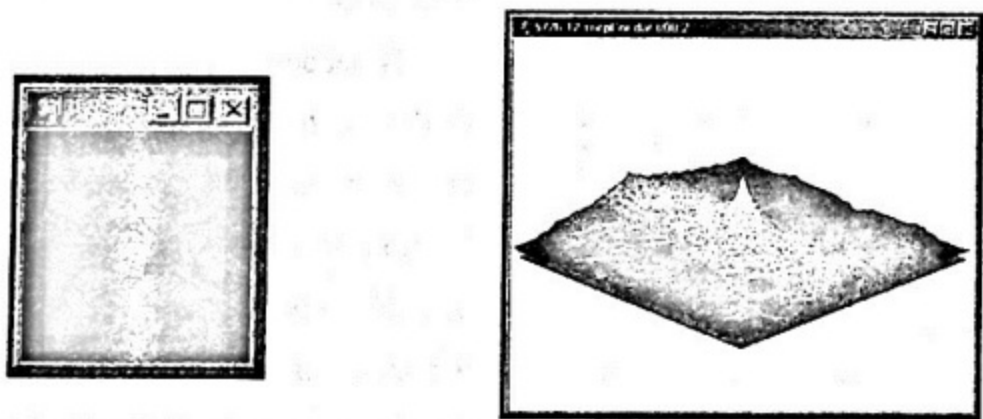


Рис. 28. Функция корреляции топографического изображения пленки ПДЕ и ее трехмерная модель

По полученным данным построили гистограмму распределения числа частиц по их размерам (рис. 29).

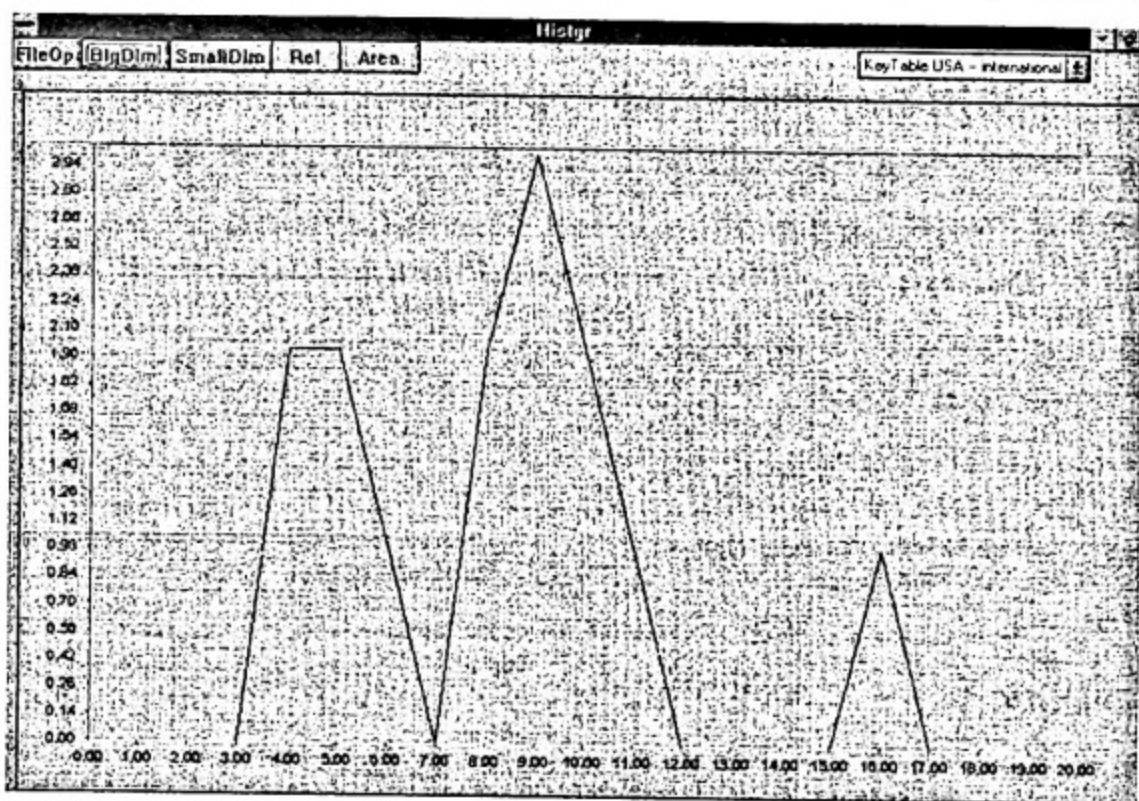


Рис. 29. Гистограмма распределения числа частиц ПДЕ по размерам: ось абсцисс — размер частиц (1 деление шкалы соответствует 10 нм), ось ординат — число частиц.

## **Выводы**

1. Детально проанализированы принципы работы сканирующего оптического микроскопа ближнего поля. Описаны важные элементы микроскопа и представлены основные физические ограничения функционирования микроскопов такого типа.
2. Представляется важным подробное описание эталонных образцов, с помощью которых проведена калибровка установки.
3. На примерах практически важных образцов (пленок МЕН-PPV, важных для конструирования сэндвичевых структур органических светоизлучающих диодов и биологических важных для фармакологии препаратов PDE) продемонстрированы реальные возможности установки.
4. Развитие данного метода оптических исследований с предельным пространственным разрешением авторы видят в сочетании NSOM с возможностями коррелированного счета одиночных фотонов, позволяющего исследования кинетики флуоресценции образцов с субнаносекундным разрешением для предельных для оптики областей поверхности. Данный подход исключительно важен для исследования молекулярных наноструктур, которые в свою очередь, дают новые возможности для исследования и применения в бурно развивающейся области молекулярной электроники.

## **Благодарности**

Авторы приносят искреннюю благодарность к.ф.-м.н. А. Ежову (МГУ, Москва), Г. Мишакову (фирма CDP Ltd, Россия) и к.ф.-м.н. А.В. Крайскому (ФИАН, Москва), а также сотрудникам Отдела люминесценции ФИАН (д.ф.-м.н. И.С. Осадько, к.ф.-м.н. Г.М. Свищеву, А.С. Аверюшкину). Работа была бы невозможна без финансовой поддержки РФФИ (гранты 00-15-96707, 99-02-17326) и НАТО (грант 97-1940).

1. G. Binnig, H. Rohrer. Scanning tunneling microscopy // *Helv. Phys. Acta*. 1982. Vol. 55. No. 6. P. 726÷735.
2. G. Binnig, C. F. Quate, Ch. Gerber. Atomic force microscope // *Phys. Rev. Lett*. 1986. Vol. 56. No. 9. P. 930÷933.
3. A. Lewis, M. Issacson, A. Muray, A. Harootunian. Scanning optical spectral microscopy with 500 Å spatial resolution // *Biophys. J*. 1983. Vol. 41. P. 405a.
4. D. W. Pohl, W. Denk, M. Lanz. Optical stethoscopy: image recording with resolution  $\lambda/20$  // *Appl. Phys. Lett*. 1984. Vol. 44. No. 7. P. 651÷653.
5. A. Lewis, M. Issacson, A. Muray A. Harootunian. Development of a 500 Å spatial resolution light microscope // *Ultramicroscopy*. 1984. Vol. 13. P. 227÷231.
6. Жданов Г. С., Либенсон М. Н., Марциновский Г. А. Оптика внутри дифракционного предела // *УФН*. 1998. Т. 168. № 7. С. 801÷804.
7. E. Betzig, J. K. Nrautman, T. D. Harris *et al.* Breaking the diffraction barrier: optical microscopy on nanometer scale // *Science*. 1991. Vol. 251. No. 3. P. 1468÷1470.
8. F. Zenhausern, Y. Martin and H. K. Wickramasinghe, Scanning interferometric apertureless microscopy: optical imaging at 10 anrstrom resolution // *Science*. 1995. Vol. 269, No. 8. P. 1083÷1085.
9. K. Karrai, R. Grober, Piezoelectric tip-sample distance control for near-field optical microscopes // *Appl. Phys Lett.*, 64:1842, 1995.
10. D.A. Vanden Bout, J. Kerimo, Near-Field Optical Studies of Thin-Film Mesostructured Organic Materials // *Acc. Chem. Res.*, 30, 204-212, 1997
11. Bert Hecht, Forbidden Light Scanning Near-Field Optical Microscopy // Inauguraldissertation zur Erlangung der Würde eins Doctors der Philosophie vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel.
12. R. Stöckle, C. Fokas, V. Deckert and R. Zenobi. High-quality near-field probes by tube etching // *Appl. Phys. Lett.*, 75:160, 1999.
13. M.A. Unge, D.A. Kossakovski, R. Kongovi, J.L. Beauchamp, J.D. Baldeschwieler and D.V. Palanker // *Rev. Sci. Instrum.*, 69, 2988, 1998.



# ЛАЗЕРЫ НА КВАНТОВЫХ ЯМАХ С КОГЕРЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДСИСТЕМОЙ

В.Ф. Елесин

Московский инженерно-физический институт

## Введение

Простейшими наноструктурами, используемыми в нанoeлектронике, являются двухбарьерные квантовые ямы с одним резонансным уровнем (так называемый резонансно-туннельный диод - РТД) или с двумя уровнями (лазерная структура). Резонансные уровни с энергией  $\varepsilon_{nR}$  возникают за счет пространственного квантования (квантовой интерференции).

Ток  $J_0(\varepsilon)$  через РТД носит резонансный характер, при энергии электрона  $\varepsilon$ , большей резонансной  $\varepsilon_R$ ,  $\frac{dJ_0}{d\varepsilon} < 0$  (отрицательная дифференциальная проводимость). Это дает возможность усиления высокочастотного поля  $V(r,t)$ , приложенного к РТД. За экспериментальное создание РТД и развитие элементарной теории [1] Есаки и Цу была присуждена Нобелевская премия по физике.

В работах [2,3] была продемонстрирована генерация в РТД вплоть до частот 712 ГГц. Однако достигнутая мощность была и остается небольшой, особенно на высоких частотах. Причины этого остаются неясными, что связано, по-видимому, и с проблемами теории РТД.

Несмотря на значительное количество теоретических работ, выполненных в основном численными методами, имеется ряд не до конца решенных вопросов:

1. Существует ли фундаментальное ограничение на частоту генерации в РТД? Согласно довольно широко распространенной точке зрения [4,5], частота РТД ограничена шириной резонансного уровня  $\Gamma$  (или обратным

временем жизни электрона в квантовой яме  $\tau_y^{-1} = \Gamma, \hbar = 1$ ), что справедливо для «классических» генераторов типа диодов Ганна.

2. Является ли РТД «квантовым» или «классическим» генератором, свойства которого определяются отрицательной дифференциальной проводимостью?

3. Как зависит мощность генерации от частоты и других параметров, и каковы предельно допустимые мощности?

В лекциях делается попытка ответить на эти и другие вопросы.

Структура с двумя резонансными уровнями  $\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} = \omega$ , ( $\omega$  – частота электромагнитного поля) – это лазерная система, предложенная Казариновым и Сурисом [6] в 1973 г. Она реализована в работах Капассо с сотр. [7] в виде каскадных лазеров. РТД и каскадные лазеры расширяют диапазон длин волн и обладают рядом преимуществ. Но самой интригующей их чертой является возможность когерентной генерации за счет резонансного туннелирования. Т.е. когерентным является не только электромагнитное поле, но и электронная подсистема.

Цель лекций – ознакомить с теорией когерентной генерации РТД и когерентного лазера. Задачи оказываются чисто квантовыми и не требующими приближений теории необратимых процессов.

Лекции основаны в основном на оригинальных работах автора и его сотрудников. Развиваемый подход основан на простейшей, но точно решаемой модели. Первая лекция посвящена РТД, вторая – когерентному лазеру.

## **ЛЕКЦИЯ 1. ОТКЛИК И ГЕНЕРАЦИЯ РТД**

### **§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Мы рассмотрим простейшую модель когерентного туннелирования [8], которая с одной стороны строго отражает все особенности задачи, а с другой допускает точное аналитическое решение.

Рассматривается одномерная квантовая яма (КЯ) с  $\delta$ -функциональными барьерами в точках  $x = 0$  и  $x = a$ . Слева ( $x = -\infty$ ) к КЯ подводится стационарный поток электронов, пропорциональный  $q^2$ , с энергией  $\varepsilon$ , приблизительно равной энергии резонансного уровня  $\varepsilon_R$ . В области КЯ действует переменное электрическое поле  $E(t)$  с потенциалом  $U(x,t)$

$$U(x,t) = U(x)\text{Cos}\omega t,$$

$$U(x) = \begin{cases} xU\Theta(x), & x < a \\ aU, & x > a, \quad U = -eE/2 \end{cases} \quad (1)$$

Волновая функция  $\Psi(x,t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + [\alpha_2\delta(x) + \alpha_1\delta(x-a)]\Psi + U(x,t)\Psi \quad (2)$$

Здесь положено  $\hbar = 2m = 1$ . Установившееся решение (2) ищем в виде [8]

$$\Psi(x,t) = e^{-i\varepsilon t} [\psi_0(x) + e^{-i\omega t} \psi_{+1}(x) + e^{i\omega t} \psi_{-1}(x)] \quad (3)$$

Парциальные волновые функции  $\psi_0, \psi_n, n = \pm 1$  описывают электроны с квазиэнергиями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon + n\omega$  соответственно.

Переменное поле вызывает токи поляризации (отклика)

$$J_c(x,t) = J_c(x)\text{Cos}\omega t, \quad J_s(x,t) = J_s(x)\text{Sin}\omega t,$$

Здесь  $J_c$  - синфазный с полем и  $J_s$  - реактивные токи;  $J_c$  и  $J_s$  можно выразить через функции  $\psi_0$  и  $\psi_n$ :

$$J_c(x) = J_{+1}^c(x) + J_{-1}^c(x), \quad J_n^c(x) = -ie \left[ (\psi_0^* \psi'_n + \psi_n^* \psi'_0) - \kappa.c \right] \quad (4)$$

$$J_s(x) = J_{+1}^s(x) - J_{-1}^s(x), \quad J_n^s(x) = e \left[ (\psi_0^* \psi'_n - \psi_n^* \psi'_0) + \kappa.c \right], \quad \psi' \equiv \frac{d\psi}{dx}$$

Функция нулевого приближения  $\psi_0(x)$  в области  $0 < x < a$  удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \psi_0(x) + \psi_0''(x) = 0, \quad \psi_0'' = \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} \quad (5)$$

и граничным условиям (см. [8])

$$\psi_0(0)(1 - \beta_2) + \psi_0'(0)/ip = q, \quad p^2 = \varepsilon \quad (6)$$

$$\psi_0(a)(1 - \beta_1) - \psi_0'(a)/ip = 0, \quad \beta_j = \alpha_j / ip, \quad j = 1, 2$$

Соответствующие уравнения и граничные условия для функций  $\psi_n(x)$  в линейном по полю приближении имеют вид

$$p_n^2 \psi_n(x) + \psi_n''(x) = U(x) \psi_0(x), \quad p_n^2 = p^2 + n\omega \quad (7)$$

$$\psi_n(0)(1 - \beta_{2n}) + \psi_n'(0)/ip = 0, \quad (8)$$

$$\psi_n(a)(1 - \beta_{1n}) - \psi_n'(a)/ip_n = aU\psi_0(a)/2p_n^2, \quad \beta_{jn} = \alpha_j / ip_n, \quad j = 1, 2$$

В (5) - (8) предполагается, что  $\psi_n \ll \psi_0$ .

Решение системы (5) - (8) можно представить в следующей форме

$$\psi_0(x) = A \exp(ipx) + B \exp(-ipx) \equiv \gamma_0 \text{Cosp}x + i\delta_0 \text{Sin}px,$$

$$A\Delta_0 = q(2 - \beta_1) \exp(-2ipa), \quad B\Delta_0 = q\beta_1, \quad (9)$$

$$\Delta_0 = (2 - \beta_1)(2 - \beta_2) \exp(-2ipa) - \beta_1 \beta_2 \approx \frac{2}{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}} (i\delta - \Gamma), \quad (10)$$

$$\delta = \varepsilon - \varepsilon_R, \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \Gamma_j = 2p^3 / \alpha \alpha_j^2$$

$$\psi_n = A_n \exp(ip_n x) + B_n \exp(-ip_n x) - \frac{xU}{\omega_n} \psi_0 - \frac{2U}{\omega_n^2} \psi_0', \quad (11)$$

$$A_n \Delta_n = q_n (2 - \beta_{1n}) \exp(-2ip_n a) + \beta_{2n} \tilde{q}_n,$$

$$B_n \Delta_n = q_n \beta_{1n} + (2 - \beta_{2n}) \tilde{q}_n, \quad \omega_n = -n\omega$$

$$\Delta_n \approx \left( 2 / \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) [i(\delta + n\omega) - \Gamma], \quad (12)$$

$$q_n = \frac{2Uip}{\omega_n^2} \left[ A(2 - \beta_{2n}) + \beta_{2n} B + \frac{\omega_n^2}{4p^4} (A + B) \right], \quad (13)$$

$$\tilde{q}_n = -\frac{2Uip}{\omega_n^2} \left[ \beta_{1n} A + (2 - \beta_{1n}) B e^{-2ip_n a} + \frac{\omega_n^2}{4p^4} (A + B e^{-2ip_n a}) \right] e^{i(p - p_n)a}$$

Постоянный резонансный ток

$$J_0 = -ie [\psi_0^* \psi_0' - \text{к.с.}] -$$

легко получается с помощью (9), (10)

$$J_0 = \frac{Q\Gamma^2}{\delta^2 + \Gamma^2}, \quad Q = pq^2.$$

В резонансе ( $\delta = 0$ )  $J_0 = Q$ , т.е. все падающие на структуру электроны проходят без отражения. Отсутствие отражения связано с деструктивной интерференцией в области 1.

Формулы (9) - (13) дают точное решение задачи, которое, к сожалению, громоздко и необозримо. Однако, как показано в [8], существует возможность преобразовать общие формулы для  $\psi_n$  и токов  $J_c, J_s$  к простым и физически на-

глядным выражениям, используя естественный для РТД малый параметр  $\omega/\varepsilon_R$ . Действительно, малость частоты  $\omega$  по сравнению с энергией  $\varepsilon_R$  присуща генератору на РТД.

Чтобы провести это преобразование, представим величины  $\gamma_n = A_n + B_n$  и  $\delta_n = A_n - B_n$  в виде суммы слагаемых

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)} + \gamma_n^{(3)}, \\ \delta_n &= \delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)} + \delta_n^{(3)}\end{aligned}\quad (14)$$

В слагаемых  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  полагаем  $p = p_n$  в показателях экспонент, а в  $\gamma_n^{(2,3)}$  и  $\delta_n^{(2,3)}$  формируем разность между точными и выделенными выражениями. После компенсации в  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  ряда членов и сокращения определителя в знаменателе, получаем

$$\gamma_n^{(1)} = \frac{2Uip}{\omega_n^2} \delta_o, \quad \delta_n^{(1)} = \frac{2Uip}{\omega_n^2} \gamma_o \quad (15)$$

Отметим, что  $\gamma_n^{(1)}$  и  $\delta_n^{(1)}$  расходятся при  $\omega \rightarrow 0$ . Оставшиеся слагаемые оказываются конечными в низкочастотном пределе и равными

$$\gamma_n^{(2)} = -\frac{4Uip}{\omega_n^2 \Delta_n} \left[ \beta_{1n} A z_n + (2 - \beta_{1n}) B e^{-2\varphi_n a} z_n^* \right], \quad (16)$$

$$\delta_n^{(2)} = \gamma_n^{(2)} (\beta_{2n} - 1), \quad z_n = \exp(ipa - ip_n a) - 1. \quad (17)$$

В (16), (17) опущены малые члены порядка  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$ . Здесь мы рассматриваем наиболее интересный случай квантовой ямы с "сильными" барьерами, когда  $\Gamma/\varepsilon_R \ll 1$  и  $p/\alpha_j \ll 1$ . Именно в этом пределе реализуются замечательные

свойства квантовых ям. С учетом малости  $\omega/\varepsilon_R$  и  $\Gamma/\varepsilon_R$  (16) окончательно приводится к виду

$$\gamma_n^{(2)} = -\frac{4Ua^2\alpha_1 A}{p^2\Delta_n} \quad (18)$$

Видим, что  $\gamma_n^{(2)}$  и согласно (17)  $\delta_n^{(2)}$  конечны при  $\omega \rightarrow 0$ .

Разбиение  $\gamma_n$  и  $\delta_n$  (а, следовательно, и  $A_n$  и  $B_n$ ) позволяет записать волновую функцию  $\psi_n(x)$  в более простой форме

$$\psi_n = \gamma_n^{(2)} \text{Cosp}_n x + i\delta_n^{(2)} \text{Sinp}_n x \quad (19)$$

Действительно, можно показать, что расходящиеся при  $\omega \rightarrow 0$  выражения в  $\psi_n(x)$  взаимно компенсируются. Таким образом, волновые функции  $\psi_n(x)$  конечны в низкочастотном пределе, и, на границах ямы принимают значения

$$\psi_n(0) = \psi_n(a) = \gamma_n^{(2)} \quad (20)$$

Следует отметить, что в упомянутых выше работах [4,5,9]  $\psi_n(x)$  расходятся при  $\omega \rightarrow 0$ . В тоже время нетрудно убедиться непосредственно (полагая  $\omega = 0$  в (1) с самого начала), что  $\psi_n$  не должно иметь особенностей при  $\omega = 0$ . Не исключено, что это обстоятельство и является причиной расхождения частотных зависимостей токов поляризации.

Пользуясь (9) и (20), найдем критерий линейного приближения при  $\omega \ll \Gamma$ :  $Ua/\Gamma \ll 1$ . Он резко отличается от соответствующего критерия в [4,5,9]:  $Ua/\omega \ll 1$ . Разница связана с поведением  $\psi_n(x)$  при  $\omega \rightarrow 0$ .

## § 2. Высокочастотный отклик РТД.

Вначале найдем активную составляющую тока  $J_c$ , Подставляя  $\psi_0$  из (9) и  $\psi_n$  из (19) в (4), получим

$$\begin{aligned}
 J_n^c(x) = ep \{ & (K_n + \kappa.c)[\text{Sin}p_n x \text{Sin}p x + \text{Cos}p_n x \text{Cos}p x] \\
 & - i(F_n - \kappa.c)[\text{Sin}p x \text{Cos}p_n x - \text{Sin}p_n x \text{Cos}p x] \} \equiv \\
 \equiv ep \{ & (K_n + \kappa.c)\text{Cos}(p - p_n)x - i(F_n - \kappa.c)\text{Sin}(p - p_n)x \} ,
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$K_n = \delta_0^* \gamma_n^{(2)} + \gamma_0^* \delta_n^{(2)}, F_n = \delta_0^* \delta_n^{(2)} + \gamma_0^* \gamma_n^{(2)} \tag{22}$$

Вклад в ток  $J_n^c(x)$  вносят слагаемые четырех типов: переходы под действием поля между состояниями с волновыми функциями,  $\text{Sin}p x$  и  $\text{Sin}p_n x$  с весом  $\delta_0^* \delta_n^{(2)}$ , между  $\text{Cos}p x$  и  $\text{Cos}p_n x$  с весом  $\gamma_0^* \gamma_n^{(2)}$  между  $\text{Sin}p x$  и  $\text{Cos}p_n x$  весом  $\delta_0^* \gamma_n^{(2)}$  и, наконец, между  $\text{Cos}p x$  и  $\text{Sin}p_n x$  с весом  $\gamma_0^* \delta_n^{(2)}$ . Следует иметь в виду, что слагаемое в токе, пропорциональное, например,  $\text{Sin}p x \text{Cos}p_n x$  (или  $p \leftrightarrow p_n$ ) происходит от перехода между состояниями  $\text{Sin}p x$  и  $\text{Sin}p_n x$ , т.к.  $J_n^c \sim (\psi^* \psi' - \kappa.c.)$ . Это слагаемое соответствует переходу "лазерного" типа, т.к. волновые функции,  $\text{Sin}p x$  и  $\text{Sin}p_n x$  совпадают с собственными функциями изолированной квантовой ямы. Правда, в рассматриваемой ситуации импульсы



$p$  и  $p_n$  отличаются на малую величину  $\omega_n/2p$ . (В лазере  $p-p_n = \pm\pi/a$ ). Так как коэффициенты  $\delta_0 \sim \beta\gamma_0$ ,  $\delta_n^{(2)} \sim \beta\gamma_n^{(2)}$ , то вклад этого слагаемого по сравнению со вторым  $\gamma_0^*\gamma_n^{(2)}$  (между  $\text{Cosp}x$  и  $\text{Cosp}_nx$ ) велик по параметру  $\alpha^2/p^2 \gg 1$ .

Слагаемые между "смешанными" состояниями (характерными для токового состояния в РТД и исчезающими в изолированной яме)  $\text{Sin}p_nx$  и  $\text{Cosp}x$ ,  $\text{Sin}px$  и  $\text{Cosp}_nx$  входят с примерно одинаковыми весами  $\delta_0^*\gamma_n^{(2)}$  и  $\gamma_0^*\delta_n^{(2)}$ , что позволяет им эффективно интерферировать. Именно эти переходы приводят к необычной частотной зависимости  $J_n^c(x)$ , а также к исключительной чувствительности тока от разности "мощности" барьеров  $\alpha_2 - \alpha_1$  эмиттера ( $\alpha_2$ ) и коллектора ( $\alpha_1$ ) РТД.

Подставляя (18) в (22), получаем выражение для  $K_n$

$$K_n = \frac{q}{\Delta_0^*} \gamma_n^{(2)} \varphi, \quad \frac{\varphi}{\Delta_0^*} = \beta_{2n} (A^* + B^*) - 2B^*, \quad (23)$$

$$\varphi = \beta_2(2 + \beta_1) \exp(2ipa) - \beta_1\beta_2 + 2\beta_1 = \Delta_0^* - 2\Delta_{01}^* \exp(ipa), \quad (24)$$

снова пренебрегая членами порядка  $\omega/\epsilon_R$ . Здесь  $\Delta_0$  дается (10), а  $\Delta_{01}$  "урезанный определитель"

$$\Delta_{01} = (2 - \beta_1) \exp(-ipa) + \beta_1 \exp(ipa) \quad (25)$$

Функция  $\varphi$  (24) описывает суперпозицию упомянутых выше переходов "нелазерного" типа и сильно зависит от разностей  $\delta = \epsilon - \epsilon_R$  и  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Здесь  $\epsilon_R$  - энергия резонансного уровня, определяемая из уравнения

$$\operatorname{Re} \Delta_0(\varepsilon_R) = 0 \quad (26)$$

Вблизи резонанса и при условии  $\Gamma \varepsilon_R \ll 1$  функцию  $\varphi$  можно представить

в виде

$$\varphi = -\frac{i\alpha_1\alpha_2 a\delta}{p^3} + 2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \quad (27)$$

При  $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$  (23) переходит в соответствующее выражение для  $K_n$ , полученное в [8].

Вначале рассмотрим ситуацию при  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Из (27) видно, что в резонансе, когда  $\varepsilon = \varepsilon_R$ ,  $\varphi = 0$ . Это означает, что вклады в ток  $J_n^c$  при  $\cos(p-p_n)x$  (практически не зависящие от координаты и являющиеся основными при  $\omega \ll \Gamma$ ) равны нулю в отдельности, как  $J_{+1}^c$ , так и  $J_{-1}^c$ . Если  $\delta \neq 0$ , оба тока  $J_{+1}^c$  и  $J_{-1}^c$  отличны от нуля и имеют одинаковый знак. Мы увидим, что это соответствует излучению при  $\delta > 0$  и поглощению при  $\delta < 0$ . Обычно же предполагается, что  $J_{+1}^c$  приводит к поглощению,  $J_{-1}^c$  - к излучению, а результирующий знак отклика определяется их разницей. Это, кстати, позволяет получать в [9] при  $\omega \rightarrow 0$  конечные выражения для тока, хотя волновые функции расходятся (см. § 1).

Согласно же (23), (27) и (18) знаки низкочастотных вкладов в  $J_n^c$  одинаковы и определяются интерференцией переходов "нелазерного" типа, зависящей от условий резонанса (т.е. от  $\delta$ ).

Теперь рассмотрим влияние границ. Как следует из (27) неравенство  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ведет к появлению мнимой добавки к  $\delta$ , зависящей от разности  $\alpha_1/\alpha_2 - \alpha_2/\alpha_1$

$$\varphi = -\frac{2i}{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}} \left[ \delta + i\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \right] \quad (28)$$

Подставляя значения для  $\gamma_n^{(2)}$  из (18) и  $\varphi$  в (22), приходим к следующему выражению для  $K_n + \text{к.с.}$ :

$$K_n + \text{к.с.} = -\frac{4Ua}{|\Delta_0|^2 \Gamma_1^{3/2} \Gamma_2^{1/2}} \left[ \delta \left( \frac{1}{\Delta_n} + \frac{1}{\Delta_n^*} \right) + i(\Gamma_1\Gamma_2)^{1/2} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \left( \frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_n^*} \right) \right] \quad (29)$$

Аналогичным путем найдем выражение для “лазерно-подобных” переходов

$$F_n - \text{к.с.} = \frac{iUp8}{|\Delta_0|^2 \Gamma_1^{3/2} \Gamma_2^{1/2}} \left( \frac{1}{\Delta_n} - \frac{1}{\Delta_n^*} \right) \quad (30)$$

которое слабо зависит от разницы при  $\alpha_2 - \alpha_1$ . Можно показать, что вклад в  $J_n^c$  от  $(F_n - \text{к.с.})$  дает поглощение для  $n = +1$  и излучение при  $n = -1$ , в соответствии с обычными представлениями.

Подставляя  $\Delta_n$ ,  $\Delta_0$  в (29) и (30) и собирая результаты, получаем окончательные выражения для тока  $J_c(x) = J_{+1}^c(x) + J_{-1}^c(x)$  и приведенного тока  $J_c$

$$J_c(x) = -\frac{e^2 Ea Q \Gamma \Gamma_2 \delta}{(\delta^2 + \Gamma^2) [(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]} \left\{ [(\delta^2 + \Gamma^2 + \omega^2) - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (\delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2)] \cos \frac{\omega}{2p} x - \frac{4\omega p}{a} \sin \frac{\omega}{2p} x \right\}, \quad (31)$$

$$J_c = \frac{1}{a} \int_0^a J_c(x) dx = -\frac{e^2 Ea Q \Gamma \Gamma_2 \delta \left[ (\Gamma^2 + \delta^2) + \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (\Gamma^2 + \delta^2 - \omega^2) \right]}{(\Gamma^2 + \delta^2) [(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]}, \quad Q = pq^2. \quad (32)$$

(Вклад "лазерного" слагаемого ( $F_n$  - к.с.) в приведенный ток  $J_n^c$ , пропорциональный  $\omega^2$ , в точности компенсируется с соответствующим членом в ( $K_n$  + к.с.). Поэтому, результирующее выражение (32) имеет интерференционную природу и происходит от ( $K_n$  + к.с.).

При одинаковых барьерах  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma/2$  мы приходим к результату, впервые полученному в [8]

$$J_c = -\frac{e^2 Ea Q \Gamma^2 \delta}{2 [(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]}. \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что ток  $J_c(\delta, \omega)$  не меняет знака во всем интервале частот. В низкочастотном пределе  $\omega \ll \Gamma J_c$  выражается через статическую дифференциальную проводимость

$$J_c(\delta, 0) = \frac{e^2 E a}{2} \frac{dJ_0(\delta)}{d\delta}, \quad (34)$$

$$J_0(\delta) = \frac{Q\Gamma^2}{2(\delta^2 + \Gamma^2)} \quad (35)$$

где  $J_0(\delta)$  статический резонансный ток.

Как показано в [8], кроме обычного режима, в котором  $J_c$  имеет максимум при  $\omega = 0$  (и  $\delta < \Gamma$ ), существует и так называемый "квантовый" режим при  $\delta > \Gamma$ . Ему соответствует максимум  $J_c$  при частоте  $\omega_m$

$$\omega_m^2 = \delta^2 - \Gamma^2, \quad \delta > \Gamma \quad (36)$$

Излучение (поглощение) происходит благодаря квазирезонансным переходам между состояниями с энергиями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_R$ . Отсюда следует, что при одинаковых барьерах ( $\alpha_2 = \alpha_1$ ) генерация возможна на частотах, значительно превосходящих  $\Gamma$ , если выбрать энергию электронов (аналог постоянного напряжения смещения)  $\varepsilon = \varepsilon_R + \omega$  вне области максимальной отрицательной дифференциальной проводимости (где  $\delta < \Gamma$ ).

Отметим, что описанные выше результаты были подтверждены с высокой точностью численным решением системы (5) - (8), а также непосредственно временного уравнения (2) в работах [10,11]. На рис. 1 изображены соответствующие аналитические и численные результаты.

В случае разных барьеров ( $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ) частотная зависимость тока  $J_c$  может стать кардинально другой. Так при  $\Gamma_1 > \Gamma_2$  ток меняет знак при некотором значении частоты  $\omega_0$

$$\omega_0^2 = \frac{2\Gamma_1(\delta^2 + \Gamma^2)}{\Gamma_1 - \Gamma_2} \quad (37)$$

В тоже время "квантовый" режим реализуется при любых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . В частности, при  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$  максимум тока достигается при частоте  $\omega_m^2 = 2(\delta^2 + \Gamma^2) - (\delta^4 + 10\delta^2\Gamma^2 + 9\Gamma^4)^{1/2}$ . (Если  $\delta \gg \Gamma$ , то  $\omega_m \approx \delta$ ).

При выполнении обратного неравенства  $\Gamma_2 > \Gamma_1$  ток сохраняет знак при любых частотах. В предельном случае  $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$  частотная зависимость становится необычной для РТД

$$J_{c=} = \frac{e^2 E a Q \Gamma_2^2 \delta \omega^2}{(\Gamma^2 + \delta^2) [(\delta + \omega)^2 + \Gamma_2^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma_2^2]} \quad (38)$$

Действительно, при  $\omega \rightarrow 0$  ток обращается в нуль и не выражается через дифференциальную проводимость. Остается только квантовый режим, причем максимум  $J_c(\delta, \omega)$  достигается для частоты

$$\omega_m^2 = \delta^2 + \Gamma^2 \quad (39)$$

для любого  $\delta > 0$ .

Найдем также реактивный ток. После некоторых вычислений, получаем

$$J_n^s(x) = e p \left[ i(K_n - c.c.) \cos(p - p_n)x + (F_n + c.c.) \sin(p - p_n)x \right] \quad (40)$$

и для приведенного реактивного тока

$$J_s = - \frac{e^2 E a Q \Gamma_2 \delta \omega \left[ \delta^2 - \omega^2 - 3\Gamma^2 + 4(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2) \right]}{2(\Gamma^2 + \delta^2) [(\delta + \omega)^2 + \Gamma^2] [(\delta - \omega)^2 + \Gamma^2]} \quad (41)$$

При  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  переходит в соответствующее выражение работы [10] если исправить там знак на противоположный.

## ЛЕКЦИЯ 2. КОГЕРЕНТНЫЙ ЛАЗЕР

### *§1. Постановка задачи. Основные уравнения.*

Тридцать лет назад Казаринов и Сурис [6] предложили новый тип полупроводникового униполярного лазера (каскадного лазера), в котором излучательные переходы происходят между уровнями (подзонами) пространственного квантования. Основным элементом каскадного лазера является квантовая яма с двумя рабочими резонансными уровнями. Накачка на верхний уровень и отвод электронов с нижнего осуществляется с помощью резонансного туннелирования.

Каскадные лазеры были созданы в 1994 [7] и оказались способными перекрывать длину волны от инфракрасного до субмиллиметрового диапазона.

Уникальной особенностью этих лазеров является возможность когерентной накачки, т.е. доставки электронов из эмиттера на рабочий уровень за счет когерентного резонансного туннелирования. Когерентное туннелирование реализуется, если время разрушения фазы  $\tau_{ph}$  превосходит время жизни электрона в наноструктуре  $\tau_\Gamma = \hbar / \Gamma$  ( $\Gamma$  – ширина резонансного уровня). Это, вообще говоря, возможно в квантовых ямах, проволоках и, особенно, в квантовых точках. Например, такое условие фактически необходимо, чтобы достичь инверсной населенности в каскадном лазере [7].

Если условие  $\tau_{ph} > \tau_\Gamma$  выполнено, то в принципе возможна ситуация, когда электрон доставляется на верхний уровень, совершает излучательный переход на нижний уровень и покидает его без разрушения когерентности.

Действительно, как было показано в [12], генерация может осуществляться вообще без участия диссипационных процессов. Такой лазер, в котором когерентны не только электромагнитное поле, но и электронная подсистема, будем для краткости называть когерентным лазером. Оказалось, что когерентный лазер принципиально отличается от обычных тем, что инверсная населенность не является необходимым условием. Когерентное туннелирование обеспечивает более эффективную накачку, так как происходит накопление электронов в яме за счет квантовой интерференции, а отражение стремится к нулю.

Цель настоящей работы — развитие теории стационарной генерации когерентного лазера, вычисление мощности и частоты электромагнитного поля в зависимости от тока когерентной накачки и параметров системы. Нами рассмотрена простая модель, допускающая аналитическое решение и позволяющая представить результаты в аналитической форме для широкого интервала полей от слабого до сильного. Генерация происходит в одной квантовой яме (точке) (см. рисунок), имеющей два рабочих уровня (подзоны) с энергиями  $\varepsilon_{2R}$  и  $\varepsilon_{1R}$ , разница которых определяет частоту электромагнитного поля  $\hbar\omega$ . (Далее для краткости будем говорить о яме и уровнях.) Электроны с энергией  $\varepsilon > \varepsilon_{2R}$  поступают в яму слева с постоянной скоростью, совершают излучательный переход на уровень с энергией  $\varepsilon_{1R}$  и покидают яму за счет туннелирования (или снова переходят на уровень 2).

Следует отметить, что нельзя находить волновые функции открытой системы в электромагнитном поле с помощью обычно используемого в теории лазеров разложения по собственным функциям гамильтониана без поля из-за их неортогональности. Мы применили другой подход, состоящий в отыскании установившихся во времени решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям. Такой метод использовался ранее для задач резонансного туннелирования в переменном поле, для резонансно-туннельных диодов, но, как правило, в первом приближении теории возмущений по полю. В применении к лазерам это позволяет найти только коэффициент усиления на пороге генерации. В настоящей работе найдены волновые функции



без использования теории возмущений и построена теория когерентного лазера слабого и сильного поля.

## §2. Описание модели. Основные уравнения.

Для установления основных закономерностей изучим следующую модель когерентного квантового каскадного лазера. На рисунке изображена одномерная квантовая яма с барьерами в точках  $x = 0$  и  $x = a$ . Параметры ямы подобраны таким образом, что два нижних уровня с энергиями  $\varepsilon_{1R}$  и  $\varepsilon_{2R}$  имеют разность, примерно равную частоте электромагнитного поля:  $\hbar\omega > \varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} = \hbar\omega_{21}$ . Слева на систему падает стационарный поток электронов с плотностью, пропорциональной  $q^2$ , и энергией  $\varepsilon$ , приблизительно равной  $\varepsilon_{2R}$ .

Электромагнитное поле, которое с хорошей точностью можно считать классическим,

$$E_x(z, t) = E(t) \sin(kz) \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (42)$$

излучается при переходе электронов с верхнего уровня 2 на нижний уровень 1.

При этом в соответствии с экспериментом [7] принимается, что поле поляризовано перпендикулярно плоскости ямы (т. е. по оси  $x$ ), а волновой вектор направлен вдоль плоскости (по оси  $z$ ). Оптический резонатор длиной  $L$  выделяет эти моды. Мы ограничимся рассмотрением одномодового режима. Как известно, уравнения для медленно меняющихся амплитуды поля  $E(t)$  и фазы  $\varphi(t)$  имеют вид (см., например, [12])

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{E}{\tau_0} - \frac{2\pi}{\kappa} J_c(k) \quad (43)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} E + (\omega - \Omega) E = -\frac{2\pi}{\kappa} J_s(k) \quad (44)$$

$$J_{c,s}(k) = \int_0^a dx e^{ikx} J_{c,s}(x) \quad (45)$$

где  $J_c(k)$  и  $J_s(k)$  — фурье-компоненты токов поляризации, совпадающие по фазе с полем ( $J_c$ ) и сдвинутые на  $\pi/2$  ( $J_s$ ), описывающие межуровневые переходы,  $\tau_0$  — время жизни фотона в резонаторе,  $\Omega = kc$  — собственные частоты резонатора,  $\kappa$  — диэлектрическая постоянная,  $c$  — скорость света. Токи  $J_c(x)$  и  $J_s(x)$  выражаются через волновую функцию системы  $\Psi(x, t)$ , которая подчиняется следующему уравнению Шредингера:

$$i \frac{2m^*}{\hbar} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi + \hat{V}(x, t)\Psi, \quad (46)$$

где  $m^*$  — эффективная масса электрона,

$$U(x) = \alpha_1 \delta(x) + \alpha_2 \delta(x - a), \quad \alpha_i = \frac{2m^* \tilde{\alpha}_i}{\hbar^2}$$

— потенциальная энергия барьеров. Последнее слагаемое в (46)

$$\hat{V}(x, t)\Psi = \frac{2ei}{\hbar} A_x(t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi$$

описывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем,  $A_x(t)$  — вектор-потенциал в кулоновской калибровке, отличный от нуля в яме. Как известно, такая форма взаимодействия более предпочтительна для нелокализованных волновых функций по сравнению с  $E_x$ . Выражая  $A_x(t)$  через амплитуду поля  $E(t)$ , перепишем последнее слагаемое в виде

$$\hat{V}\Psi = V(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \frac{\partial}{\partial x} \Psi, \quad V = -\frac{eE}{\omega} \quad (47)$$

К системе (43), (44) и (46) следует добавить общее выражение для тока

$$J(x, t) = -\frac{ie}{2m^*} \left[ \Psi^* \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} - \text{к.с.} \right]$$

и граничные условия для  $\Psi(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \Psi(-0, t) &= \Psi(+0, t), \quad \Psi(-a, t) = \Psi(+a, t), \\ \Psi'(+0, t) - \Psi'(-0, t) &= \alpha_1 \Psi(0, t), \quad \Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \Psi'(+a, t) - \Psi'(-a, t) &= \alpha_2 \Psi(a, t) \end{aligned} \quad (48)$$

Учет потока падающих слева и отраженных электронов будет проведен ниже (см. (12)) после конкретизации вида функции  $\Psi(x, t)$ .

Следует отметить, что в (46) опущены квадратичные по  $A(t)$  слагаемые. Это обычно используемое в теории лазеров приближение справедливо и здесь по параметру  $V/p = eE/\omega p \ll 1$ , где  $p$  — импульс электрона (см. (21)).

### §3. Волновые функции.

Установившееся решение (46) ищем в виде ряда:

$$\Psi(x, t) = \sum_n \exp \left[ -it \left( \frac{\varepsilon}{\hbar} + n\omega \right) \right] \psi_n(x), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (49)$$

где функции  $\psi_n(x)$  удовлетворяют системе уравнений

$$(\varepsilon + n\omega) \psi_n(x) + \psi_n''(x) = V [\psi_{n-1}'(x) - \psi_{n+1}'(x)] \quad (50)$$

Здесь  $\psi_n(x)$  описывает состояние с энергией  $\varepsilon + n\omega$ , ( $\varepsilon$  и  $\omega$  есть энергия и частота, умноженные на  $2m^*$ , далее  $\hbar = c = 1$ ).

Хорошо известно, что в процессе генерации основной резонансный вклад вносят два уровня. В нашем случае. — это верхний уровень с энергиями  $\varepsilon_{2R}$  и нижний с  $\varepsilon_{1R}$ , которым соответствуют функции  $\psi_0(x)$  и  $\psi_{-1}(x)$ . Поэтому волновая функция (49) сводится к двум слагаемым

$$\Psi(x, t) = \psi_0(x)e^{-ict} + \psi_{-1}(x)e^{-it(\varepsilon - \omega)}, \quad (51)$$

причем  $\psi_0(x)$  и  $\psi_{-1}(x)$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi_0(x) + \psi_0''(x) &= V \psi_{-1}'(x) \\ (\varepsilon - \omega) \psi_{-1}(x) + \psi_{-1}''(x) &= -V \psi_0'(x) \end{aligned} \quad (52)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi_n(0) \left( 1 - \frac{\alpha_1}{ip_n} \right) + \frac{\psi_n'(0)}{ip_n} &= 2q\delta_{n0} \\ \psi_n(a) \left( 1 - \frac{\alpha_2}{ip_n} \right) - \frac{\psi_n'(a)}{ip_n} &= 0, \quad p_n = \sqrt{\varepsilon + n\omega}, \quad n = 0, -1 \end{aligned} \quad (53)$$

Последние получаются из (48), если подставить (51) и учесть падающий слева с энергией  $\varepsilon$  постоянный поток электронов, пропорциональный  $q$ , а также уход электронов из ямы с энергиями  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_{2R} - \omega$ . Установившееся решение (51) справедливо, когда в системе при постоянном потоке электронов поле достигает стационарного значения.

С помощью (51) выражения для токов  $J_c(x)$  и  $J_s(x)$  можно представить с помощью функций  $\psi_0(x)$ ,  $\psi_{-1}(x)$ :

$$\begin{aligned} J_c(x) &= -\frac{ie}{2m^*} \left[ (\psi_0^* \psi_{-1}' + \psi_{-1}^* \psi_0') - \text{к.с.} \right], \\ J_s(x) &= \frac{e}{2m^*} \left[ (\psi_{-1}^* \psi_0' - \psi_0^* \psi_{-1}') - \text{к.с.} \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Заметим, что фурье-компоненты  $J_c(k)$  и  $J_s(k)$  можно заменить просто интегралами, так как  $ka \ll 1$ , т.е.

$$J_{c,s}(k) = \frac{1}{a} \int_0^a dx J_{c,s}(x) \quad (55)$$

Обычно ищут решение по теории возмущения по  $V$  в форме (51), подставляя его в исходное уравнение (46) и ограничиваясь первым приближением.

Однако, благодаря полученной системе уравнений (52), а также выбранной форме взаимодействия (48), мы можем найти точное решение (52), не прибегая к теории возмущений.

Решение системы (52) можно искать в виде

$$\psi_n(x) = A_n e^{\gamma x}, \quad n = 0, -1 \quad (56)$$

причем собственные значения  $\gamma$  удовлетворяют уравнению

$$\gamma^4 + 2\gamma^2 \left( \varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} \right) + \varepsilon^2 - \varepsilon\omega = 0 \quad (57)$$

и равны

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm\gamma_-, \quad \gamma_{3,4} = \pm\gamma_0, \\ \gamma_- &= i \sqrt{\varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} - \sqrt{\left(\frac{V^2 - \omega}{2}\right)^2 + \varepsilon V^2}} \\ \gamma_0 &= i \sqrt{\varepsilon + \frac{V^2 - \omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{V^2 - \omega}{2}\right)^2 + \varepsilon V^2}} \end{aligned} \quad (58)$$

Общее решение (52) представим в форме

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^4 A_{nj} \exp(\gamma_j x) \quad (59)$$

Коэффициенты  $A_{0j}$  и  $A_{-1j}$ , связаны соотношением, получаемым из (53):

$$A_{-1j} = \varepsilon_j A_{0j}, \quad \varepsilon_j = \frac{\gamma_j^2}{\varepsilon - \omega + \gamma_j^2}, \quad \bar{V} = \frac{eE}{\omega} \quad (60)$$

Подставляя (59), (60) в граничные условия (53), приходим к системе алгебраических уравнений для  $A_{nj}$

$$\sum_{j=1}^4 A_{0j}(1 - \beta_j) = 2q, \quad \sum_{j=1}^4 A_{0j} \exp(\gamma_j a)(1 - \tilde{\beta}_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^4 A_{0j}(1 - \beta_{-j})\varepsilon_j = 0, \quad \sum_{j=1}^4 A_{0j} \exp(\gamma_j a)(1 - \tilde{\beta}_{-j})\varepsilon_j = 0, \quad (61)$$

где

$$\beta_j = \frac{\alpha_1 - \gamma_j}{ip}, \quad \beta_{-j} = \frac{\alpha_1 - \gamma_j}{ip_-}, \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\alpha_2 + \gamma_j}{ip},$$

$$\tilde{\beta}_{-j} = \frac{\alpha_2 + \gamma_j}{ip_-}, \quad p = \sqrt{\varepsilon}, \quad p_- = \sqrt{\varepsilon - \omega} \quad (62)$$

Решение системы (61) можно записать в следующем виде:

$$A_{0j} = \frac{2q(-1)^{j+1}}{\Delta} \sum_{l \neq j} \sum_{\substack{m \neq j, l \\ s \neq j, l}} \exp(\gamma_l a)(1 - \tilde{\beta}_l) \Lambda_{lj} \Delta_{ms}(p_-) \varepsilon_m \varepsilon_s \quad (63)$$

где

$$\Lambda_{lj} = \begin{cases} -1 & \text{при } l = 3, j = 1, 2, \\ -1 & \text{при } l = 2, j = 3, 4, \\ +1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь  $\Delta$  – определитель системы (61):

$$\Delta = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta_{12}(p_-) \Delta_{24}(p) + \varepsilon_1 \varepsilon_4 \Delta_{14}(p_-) \Delta_{23}(p) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \Delta_{23}(p_-) \Delta_{24}(p) -$$

$$- \varepsilon_1 \varepsilon_3 \Delta_{13}(p_-) \Delta_{24}(p) - \varepsilon_2 \varepsilon_4 \Delta_{24}(p_-) \Delta_{13}(p) + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \Delta_{34}(p_-) \Delta_{12}(p), \quad (64)$$

где

$$\Delta_{ml}(p) = (1 - \beta_m)(1 - \tilde{\beta}_l) \exp(\gamma_l a) - (1 - \tilde{\beta}_m)(1 - \beta_l) \exp(\gamma_m a),$$

$$\Delta_{ml}(p_-) = (1 - \beta_{-m})(1 - \tilde{\beta}_l) \exp(\gamma_l a) - (1 - \tilde{\beta}_{-m})(1 - \beta_{-l}) \exp(\gamma_m a), \quad (65)$$

Таким образом, выражения (58), (59), (63), (64) дают общее решение системы (52), (53), справедливое вплоть до сильных полей. Подставляя (59) в (54),

(55), нетрудно найти токи  $J_s(k)$ ,  $J_c(k)$  и получить совместно с (43) и (44) замкнутые уравнения для определения поля и фазы (частоты генерации  $\omega$ ). Эти уравнения позволяют провести анализ зависимости порогового тока, мощности и частоты генерации от параметров структуры. Нетрудно обобщить полученные результаты для других типов структур.

#### §4. Токи поляризации когерентного лазера

Находим токи  $J_c$  и  $J_s$

$$J_c = -\frac{EQ\Gamma_1\Gamma_2\eta}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (66)$$

$$J_s = -\frac{EQ\Gamma_2(\xi_1 + \nu)\eta}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad \eta = \frac{64e^2 p_1 p_2}{3\omega^2 a^2} \quad (67)$$

Вначале изучим частотную и энергетическую зависимость тока поляризации  $J_c(\xi, \nu)$ , описывающую межуровневые переходы. Кроме того, найдем коэффициенты отражения электронов от структуры. В этом параграфе поле  $\lambda$  и ток  $Q$  будем считать фиксированными и независимыми.

Наиболее интересные результаты получаются для случая одинаковых ширин резонансных уровней  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ . Это достигается следующим выбором параметров барьеров

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{3/2} \cong 2\sqrt{2}\alpha_1 \quad (68)$$

Обобщение на случай разных  $\Gamma_j$  не представляет труда (см. ниже).

Удобно ввести величину  $K(\xi, \nu)$

$$K(\xi, \nu) = -\frac{J_c}{E\eta} = \frac{Q\Gamma^2}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (69)$$

имеющую смысл высокочастотного нелинейного отклика, описывающего усиление (или поглощение) электромагнитного поля. С другой стороны,  $KE^2/2\omega$  пропорциональна скорости перехода электронов с уровня 2 на уровень 1.

Вначале проведем анализ для невзаимодействующих электронов ( $g = 0$ ), чтобы затем контрастнее выявить вклад взаимодействия. Кроме того, анализ при  $g = 0$  представляет и самостоятельный интерес, поскольку рассматривается оптимизированная структура, а также обнаруживаются новые особенности когерентного резонансного туннелирования в сильном электромагнитном поле. Напомним, что здесь сильным полем считаются с  $\lambda > \Gamma$ .

Прежде всего, найдем  $\xi_0$  и  $\omega_0$ , при которых  $K(\xi, \nu)$  максимально, исходя из уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial \xi_0} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \nu_0} = 0 \quad (70)$$

Поскольку при  $g = 0$  квадрат модуля определителя равен

$$|\tilde{\Delta}|^2 = (\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi^2 - \xi\nu)^2 + \Gamma^2(2\xi + \nu)^2 \quad (71)$$

уравнения (70) можно представить в виде

$$\begin{aligned} (2\xi_0 + \nu_0)(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2 + \xi_0\nu_0) &= 0, \\ \xi_0(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2 + \xi_0\nu_0) + \nu_0\Gamma^2 &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

Нетрудно убедиться, что для любых  $\xi_0$  максимум усиления  $K(\xi_0, \nu_0)$  соответствует  $\nu_0 = 0$ , т.е. частоте  $\omega$ , совпадающей с резонансным значением  $\omega_{21}$ . Полагая в (72)  $\nu_0 = 0$ , приходим к уравнению для оптимальной подстройки энергии  $\xi_0$

$$\xi_0(\xi_0^2 + \Gamma^2 - \lambda^2) = 0 \quad (73)$$

Первое решение  $\xi_0 = 0$  соответствует максимуму  $K(\xi_0, 0)$  при  $\lambda < \Gamma$  и минимуму, если  $\lambda > \Gamma$ . Второе решение

$$\xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2, \quad \lambda > \Gamma, \quad \xi_0 = \pm\sqrt{\lambda^2 - \Gamma^2} \quad (74)$$

дает максимальное усиление для сильного поля  $\lambda > \Gamma$ . При этом  $K(\xi_0, 0)$  принимает следующие значения при  $\xi_0 = 0$  и  $\xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2$



$$K(0,0) = \frac{4Q\Gamma^2}{(\lambda^2 + \Gamma^2)^2}, \quad (75)$$

$$K(\xi_0, 0) = \frac{Q}{\lambda^2}, \quad \xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2 \quad (76)$$

Чтобы выяснить физический смысл  $\xi_0$ , вычислим коэффициент отражения от структуры

$$R = \frac{(\xi^2 + \Gamma^2 - \lambda^2)^2}{[(\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\Gamma^2]} \quad (77)$$

Подстановка  $\xi_0$  из (74) обращает коэффициент отражения в нуль для любых  $\lambda \geq \Gamma$  и  $Q$ .

Отсюда ясно, что энергия электронов  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2R} + \xi_0$  совпадает с резонансной энергией структуры, в которой резонансные уровни ямы расщепляются за счет действия электромагнитного поля.

Таким образом, каждый подводимый из эмиттера на уровень 2 электрон совершает излучательный переход и отводится в коллектор с уровня 1. Т.е. эффективность (КПД) структуры равна 1. Действительно, если вычислить число переходов в единицу времени с уровня 2 на уровень 1

$$\frac{J_c E}{2\omega} = Q, \quad \omega = \varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R} \cong 3p_1^2; \quad (78)$$

то оно окажется в точности равным подводимому числу электронов  $Q$ .

Исследуем теперь частотную зависимость усиления  $K(\xi, \nu)$ , так называемый контур усиления. В общем случае любых  $\xi$   $K(\xi, \nu)$  описывается формулой (69) с  $\tilde{\lambda}$  из (71).

В резонансной ситуации, когда  $\xi_0$  дается формулой (74), получаем

$$K(\xi_0, \nu) = \frac{Q\Gamma^2}{\lambda^2[\nu^2 + 4\Gamma^2]} \quad (79)$$

Из (79) следует, что уширение определяется только  $\Gamma$  и не зависит от  $\lambda$ . Такая форма линии принципиально отличается от формы линии в обычных лазерах. Например, в газовых и полупроводниковых  $K(\nu)$  имеет вид

$$K(\nu) = \frac{Q}{[\nu^2 + \Gamma^2 + \lambda^2]} \quad (80)$$

Из (80) видно, что ширина линии растет с полем. Уширение вызвано «эффектом насыщения» населенностей уровней за счет межуровневых переходов электронов в сильном поле. «Эффект насыщения» приводит к выжиганию «дырки» в распределении электронов, появлению дополнительных мод, ограничению мощности генерации.

В нерезонансном случае, когда  $\xi_0 = 0$ ,

$$K(0, \nu) = \frac{Q}{[\nu^2 + (\lambda^2 + \Gamma^2)^2 / \Gamma^2]} \quad (81)$$

наблюдается уширение ( $\lambda^4/\Gamma^2 \gg \lambda^2$ ) гораздо более сильное, чем в некогерентных лазерах.

Причина независимости уширения от поля в резонансном случае состоит в том, что поступающие с эмиттера электроны совершают один излучательный переход и выходят в коллектор. Это явление напоминает эффект «самопрозрачности». Но в отличие от этого эффекта здесь решающую роль играет когерентное туннелирование, управляющее доставкой и удалением электронов с определенной фазой.

Найдем зависимость  $K(\xi, 0)$  от  $\xi$  вблизи  $\xi_0$ . После некоторых вычислений получаем

$$K(\xi, 0) = \frac{Q\Gamma^2}{4\lambda^2 [\Gamma^2 + (|\xi| - |\xi_0|)^2]} \quad (82)$$

Отсюда следует, что максимум усиления вблизи  $\xi_0$  очень узкий с шириной, не зависящей от поля  $\lambda$  и равной  $\Gamma$ .

Теперь учтем взаимодействие между электронами. Усиление  $K_g(\xi, \nu)$  дается выражением (69) с  $|\tilde{\Delta}(g)|^2$

$$|\tilde{\Delta}(g)|^2 = (\lambda^2 + \Gamma^2 - \xi_1 \xi_2 - \nu \xi_2)^2 + \Gamma^2 (\xi_1 + \xi_2 + \nu)^2 \quad (83)$$

Взаимодействие приводит к сдвигу уровней и, вообще говоря, нарушению резонансов. Это становится существенным при таких концентрациях электронов, когда энергетический сдвиг начинает превосходить ширину резонансного уровня.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением наиболее интересного решения системы, при котором  $K_g(\xi, \nu)$  достигает максимального значения. Можно убедиться непосредственной проверкой, что таковым является следующее решение системы:

$$n_1 = n_2 = n = \frac{Q}{4\Gamma a}, \quad \xi_1^2 = \xi_2^2 = (\tilde{\xi}_0 - \tilde{g})^2 = \lambda^2 - \Gamma^2, \quad \tilde{g}_1 = \tilde{g}_2 = \tilde{g} = \frac{7g}{2}n, \quad \omega = \omega_2 \quad (84)$$

$$K_g(\tilde{\xi}_0, 0) = \frac{Q}{4\lambda^2} \equiv K(\xi_0, 0) \quad (85)$$

При этом энергия подводимых электронов дается выражением

$$\tilde{\xi}_0 = \pm \sqrt{\lambda^2 - \Gamma^2} + \frac{7gQ}{8\Gamma a} \quad (86)$$

Из (85) следует, что коэффициент усиления сохраняет прежний вид (76), если  $\tilde{\xi}_0$  определяется выражением (86). Причина сохранения резонансного вида  $K_g(\tilde{\xi}_0, 0)$  обусловлена равенством населенностей  $n_1 = n_2$  (84). Действительно, поскольку населенности одинаковы, то энергетическая щель  $\varepsilon_{2R} - \varepsilon_{1R}$  не меняется, а энергия подводимых электронов  $\tilde{\xi}_0$  (86) совпадает с резонансной.

Однако, в отличие от  $\xi_0$  (76), появляется еще добавка, связанная со сдвигом уровня из-за взаимодействия, а  $K(\tilde{\xi}_0, 0)$  становится несимметричной функцией  $\xi$  (см. ниже (89)). Отметим, что второе решение (86) дает уменьшающееся (по модулю) с  $Q$  значение  $\tilde{\xi}_0$ , которое при некотором  $\lambda_0$  обращается в нуль

$$\tilde{\xi}_0 = -\sqrt{\lambda_0^2 - \Gamma^2} + \frac{7gQ}{8a\Gamma} = 0 \quad (87)$$

Т.е. существует возможность оптимального режима в отсутствие подстройки из-за компенсации сдвигов уровней. Можно показать, что коэффициент отражения снова равен нулю, если  $\tilde{\xi}_0$  выбирается согласно (86). Сохраняется также и форма линии усиления

$$K_g(\tilde{\xi}_0, \nu) = \frac{4Q\Gamma^2}{\lambda^2[\nu^2 + 4\Gamma^2]} \quad (88)$$

а также характер зависимости  $K$  от  $\tilde{\xi}$

$$K(\tilde{\xi}, 0) = \frac{Q\Gamma^2}{\lambda^2[\Gamma^2 + (|\tilde{\xi}| - |\tilde{\xi}_0|)^2]} \quad (89)$$

Таким образом, оптимальный режим автоподстройки сохраняется и при учете межэлектронного взаимодействия.

В заключении отметим, что максимальная эффективность структуры достигается только для  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Если  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ , то для  $\lambda \gg \Gamma$  вместо (77) имеем

$$R = \frac{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}{(\Gamma_2 + \Gamma_1)^2} \quad (90)$$

Равенство  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  можно достичь на оптимизированной структуре, рассмотренной в данной работе при условии (68).

### §5. Одномодовая генерация когерентного лазера

Амплитуду и частоту когерентной стационарной генерации находим из уравнений

$$1 = \tilde{Q} \frac{\Gamma^2}{|\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (91)$$

$$\omega - \Omega = \tilde{Q} \frac{\Gamma (\varepsilon - \omega - \varepsilon_{1R}(g))}{\tau_0 |\tilde{\Delta}(g)|^2}, \quad (92)$$

$$\tilde{Q} = 4\pi\tau_0 Q\eta / \kappa$$

которые получаются после подстановки токов  $J_c$  и  $J_s$  в (2) и (3).

Нетрудно видеть, что частота дается выражением

$$\omega = \frac{S(\varepsilon - \varepsilon_{1R}(g)) + \Omega}{1 + S}, \quad S = 1 / \Gamma\tau_0 \quad (93)$$

справедливым при любых  $\tilde{Q}$  и  $\lambda$ .

Коэффициент стабилизации  $S$  может меняться в широких пределах. Если, например, принять типичные значения для каскадного лазера,  $\Gamma = 10^{12}$ ,  $\tau_0 = 10^{-11}$  сек, то  $S \approx 0.1$ . В этом случае

$$\omega \approx \Omega, \quad S \ll 1 \quad (94)$$

частота определяется частотой резонатора. Полагая, что ее можно менять, будем считать  $\omega$  свободным параметром. Обратный случай  $S \gg 1$  будет рассмотрен ниже.

Вначале исследуем генерацию для невзаимодействующих электронов по тем же соображениям, что и в предыдущем параграфе. Пользуясь результатом § 3, где показано, что ток  $J_c$  максимален при  $\nu = 0$ , положим в (91),(93)  $\omega = \Omega = \omega_{21}$ . Найдем из уравнения (91) мощность генерации

$$P_\omega = \lambda^2 = \xi^2 + \Gamma \left( \sqrt{\tilde{Q} - 4\xi^2} - \Gamma \right) \quad (95)$$

Пороговый ток получается, если положить в (95)  $\lambda = 0$

$$\tilde{Q}_{th} = (\xi^2 + \Gamma^2)^2 / \Gamma^2 \quad (96)$$

Как показано в [12], существует такая подстройка энергии  $\xi_0$ , при которой  $P_\omega$  максимально. Уравнение для  $\xi_0$

$$\frac{dP_\omega}{d\xi} = 2\xi_0 \left( 1 - \frac{2\Gamma}{\sqrt{\tilde{Q} - 4\xi_0^2}} \right) = 0 \quad (97)$$

имеет два решения

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_0^2 = \tilde{Q}/4 - \Gamma^2 \quad (98)$$

Первое решение соответствует максимуму мощности в интервале накачки  $1 < \tilde{Q}/\Gamma^2 < 4$ , причем мощность

$$P_\omega = \Gamma(\sqrt{\tilde{Q}} - \Gamma) \quad (99)$$

корневым образом зависит от  $\tilde{Q}$ .

Второе решение реализуется при  $\tilde{Q} > 4\Gamma^2$ , при этом мощность линейно зависит от тока накачки

$$P_\omega = \tilde{Q}/4 \quad (100)$$

что соответствует максимальной эффективности (КПД равен единице). Условия появления второго решения с учетом (100), а также выражение для  $\xi_0^2$  можно переписать в виде

$$\lambda > \Gamma, \quad \xi_0^2 = \lambda^2 - \Gamma^2 \quad (101)$$

Эти выражения в точности совпадают с выражениями (74), определяющими максимум тока  $J_c$  и нуль коэффициента отражения. Следовательно, можно сделать вывод, что энергия подводимых электронов  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2R} + \xi_0$  совпадает с резонансной энергией структуры когерентного лазера, так что каждый электрон вносит вклад в генерацию. Именно поэтому мощность линейно растет с  $\tilde{Q}$  (99). Если же  $\xi_0 = 0$ , то с ростом  $\tilde{Q}$  энергия электронов отличается от резонансной. Это приводит к росту отражения (см. (77)) и уменьшению эффективности генерации, т.е. корневой зависимости мощности (98).

Следует отметить, что мощность генерации  $P_\omega$  (99) не зависит от  $\Gamma$ , а  $\tilde{Q}_{th} = \Gamma^2$  уменьшается с  $\Gamma$ . Поэтому, в принципе, можно стремиться сделать ширину  $\Gamma$  малой. Ограничение снизу связано только с условием когерентности  $\Gamma > \tau_{ph}^{-1}$ . Кроме того, подчеркнем, что максимальная эффективность достигается в оптимизированной структуре с симметричными барьерами при  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

В [12] было указано, что принципиальной особенностью когерентного лазера является отсутствие требования инверсной населенности. Покажем это, вычислив явно разность населенностей  $n_1$  и  $n_2$ . Если подстройка отсутствует ( $\xi_0 = 0$ ), то разность населенностей

$$n_1 - n_2 = \frac{Q\Gamma}{a|\tilde{\Delta}|^2} (\Gamma^2 - \lambda^2) \quad (102)$$

меняется с ростом  $\lambda$ . При  $\lambda > \Gamma$  населенность на нижнем уровне  $n_1$  превосходит населенность верхнего уровня  $n_2$ . В случае оптимальной подстройки  $\xi_0$  (74) населенности в точности равны

$$n_1 = n_2 = \frac{Q}{4\Gamma a} \quad (103)$$

Из (103) видно, что населенности растут с ростом тока накачки  $Q$ , что присуще униполярным лазерам, как полупроводниковым (например, каскадным), так и газовым. Рост концентрации электронов приводит к увеличению межэлектронного взаимодействия, которое может, вообще говоря, нарушить жесткие условия резонансной подстройки (74).

Именно поэтому необходимо рассмотреть влияние межэлектронного взаимодействия на когерентную генерацию. Нетрудно убедиться, что оптимальный режим генерации сохраняется, если энергия поступающих из эмиттера электронов равна

$$\varepsilon = \varepsilon_{2R} + \tilde{\xi}_0 \quad (104)$$

а  $\tilde{\xi}_0$  дается (53). При этом решение системы (91),(92) имеет вид

$$\lambda^2 = Q/4, \quad n_1 = n_2 = Q/4\Gamma a, \quad \omega = \omega_{21} \quad (105)$$

Причины устойчивости режима резонансной подстройки к межэлектронному взаимодействию аналогичны изложенным выше в § 3.

## Литература

- [1]. Esaki L., Tsu R., Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1973).
- [2]. Brown E.R. *at al*, Appl. Phys. Lett. **55**, 1777 (1989).
- [3]. Brown E.R. *at al*, Appl. Phys. Lett. **58**, 2291 (1991).
- [4]. Liu H.C., Phys. Rev. B **43**, 12538 (1991).
- [5]. Liu H.C., Sollner T.C.L.G., Semicond. Semimet **41**, 359 (1994).
- [6]. A. Kazarinov, and R. Suris, Sov. Phys. Semicond. **5**, 207 (1971).
- [7]. J. Fainst, F. Capasso *et al*, Science **264**, 553 (1994).
- [8]. V
- [9]. M.P. Antram, S. Datta, Phys. Rev. B **51**, 7632 (1995).
- [10]. В.Ф. Елесин, И.Ю. Катеев, А.И. Подливаев, ФТП **34**, 1373 (2000).
- [11]. В.Ф. Елесин, А.В. Крашенинников, И.Ю. Катеев, А.И. Подливаев, УФН **170**, 333 (2000).
- [12]. В.Ф. Елесин, ЖЭТФ **112**, 483 (1997).